Прикладная математика и механика. Том XIX, 1955
Институт механики Академии наук Союза ССР

К ТЕОРИИ ПРОСТОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ ПЛАСТИЧЕСКИХ ТЕЛ

Д. Д. Ивлев
(Москва)

В настоящей заметке дается обобщение теоремы А. А. Ильюшина о простом нагружении [1] на случай зависимости $\sigma_i - e_i$, представимой в виде полинома. Показано, что для любой совместной системы деформаций данного тела для данной зависимости $\sigma_i - e_i$, представимой в виде полинома, существует единственное, вообще говоря, сложное нагружение, при котором в теле имеет место простая деформация. Указывается, что это нагружение практически неосуществимо.

Отметим, что, следуя А. А. Ильюшину [2] (стр. 49, 118), под простым нагружением здесь понимается возрастание внешних сил пропорционально общему параметру, под простой деформацией — деформирование, при котором направляющий тензор напряжений и тензор деформаций остаются неизменными. Соответственно легко определить сложное нагружение и сложную деформацию.

Иногда А. А. Ильюшин [2] (стр. 91) и [3] (стр. 641) говорит о простом нагружении как о процессе простой деформации. Здесь, очевидно, речь идет об элементе тела, так как при простом нагружении элемента, деформация его будет простой, но при простой деформации нагружение его может быть сложным. Что касается самого тела, то при простом нагружении деформация может быть сложной, и наоборот.

§ 1. Пусть в процессе деформирования деформации возрастают пропорционально общему параметру $\mu = \mu(t)$

$$e_{xx} = \mu e_{xx}^*, \ldots \qquad e_i = \mu \cdot e_i^* \tag{1.1}$$

где компоненты со звездочками наверху есть решение некоторой задачи теории малых упруго-пластических деформаций

$$\frac{\partial X_x^*}{\partial x} + \frac{\partial X_y^*}{\partial y} + \frac{\partial X_z^*}{\partial z} = X^*, \qquad X_x^* l + X_y^* m + X_z^* n = X_\nu^* \tag{1.2}$$

$$\frac{X_x^* - \sigma^*}{\sigma_i^*} = \frac{2}{3}\,\frac{e_{xx} - e^*}{e_i^*}, \qquad \frac{X_y^*}{\sigma_i^*} = \frac{1}{3}\,\frac{e_{xy}^*}{e_i^*} \tag{1.3}$$

$$\frac{\partial^2 e_{xx}^*}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 e_{yy}^*}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 e_{xy}^*}{\partial x\,\partial y}, \qquad \frac{\partial^2 e_{xx}^*}{\partial y\,\partial z} = \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{\partial e_{yz}^*}{\partial x} + \frac{\partial e_{zx}^*}{\partial y} + \frac{\partial e_{xy}^*}{\partial z}\right) \tag{1.4}$$

$$\sigma_i^* = \Phi(e_i^*), \qquad \sigma^* = 3Ke^* \tag{1.5}$$

Пусть для данного тела решена задача теории малых упруго-пластических деформаций, т. е. имеют место соотношения (1.2) — (1.5). Докажем тогда, что если взять n геометрически равных данному пластических тел, но с законами (1.5) для k-го тела в виде

$$\sigma_i^k = \Phi_k(e_i), \qquad \sigma^k = 3K_k e \tag{1.6}$$

то совместную систему деформаций (1.1) в k-м теле вызовет некоторая нагрузка $X_k, \ldots X_{\nu k}, \ldots$ и соответствующая система напряжений $X_x^k, \ldots \sigma_i^k, \sigma^k$, причем если

$$\sum_{k=1}^{n} \Phi_k(e_i) = \Phi(e_i), \qquad \sum_{k=1}^{n} K_k = K \tag{1.7}$$

то будет иметь место

$$\sum_{k=1}^{n} X_k = X, \ldots, \quad \sum_{k=1}^{n} X_{\nu k} = X_\nu, \ldots, \quad \sum_{k}^{n} X_x^k = X_x, \ldots \tag{1.8}$$

Доказательство теоремы очевидно. Для совместной системы деформаций (1.1) по формулам (1.6 для k-го тела подсчитаем σ_i^k и σ^k. Напряжения в нем подсчитаем по формуле

$$X_x^k = \frac{2}{3}\frac{\sigma_i^k}{e_i}(e_{xx} - e) + \sigma^k, \qquad X_y^k = \frac{1}{3}\frac{\sigma_i^k}{e_i}e_{xy} \tag{1.9}$$

Из уравнений равновесия и граничных условий легко найдем объемные и поверхностные силы

$$X^k = -\left(\frac{\partial X_x^k}{\partial x} + \frac{\partial X_y^k}{\partial y} + \frac{\partial X_z^k}{\partial z}\right), \qquad X_\nu^k = X_x^k l + X_y^k m + X_z^k n \tag{1.10}$$

Легко видеть, что при выполнении (1.7) имеет место (1.8). Теорема справедлива и при несжимаемости всех тел. В этом легко убедиться, положив $K_k \to \infty$. Чтобы в k-м теле действительно могла иметь место простая деформация (1.1), положим, что оно несжимаемо и

$$\sigma_i^k = A_k e_i^{\varkappa k} \tag{1.11}$$

где A_k и $\varkappa_k$ — произвольные постоянные. Если нагрузки и напряжения в $k_{\varkappa k}$-м теле возрастают пропорционально параметру λ_k, то $\lambda_k = \mu^{\varkappa k}$. Из (1.9) имеем

$$\frac{X_x^k - \sigma^k}{X_x^l - \sigma^l} = \ldots = \frac{\sigma_i^k}{\sigma_i^l} \qquad \binom{k=1,\ldots,n}{l=1,\ldots,n} \tag{1.12}$$

Поэтому направляющий тензор напряженный в данном теле будет также неподвижен в пространстве. Суммируя (1.11) для данного тела, будем иметь

$$\sigma_i = \sum_{k=1}^{n} A_k e_i^{\varkappa k} \qquad \text{ч. т. д.} \tag{1.13}$$

Нагрузки и напряжения в данном теле согласно (1.8) будут иметь вид:

$$X = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k X_k^* = \sum_{k=1}^{n} \mu^{\varkappa k} X_k^*, \ldots, X_\nu = \sum_{k=1}^{n} \mu^{\varkappa k} X_{\nu k}^*, \ldots, X_x = \sum_{k=1}^{n} \mu^{\varkappa k} X_x^{k*}, \ldots \tag{1.14}$$

То, что нагружение (1.14) неосуществимо, следует из необходимости в этом случае объемных сил (1.10), определяемых конкретными условиями задачи. Кривой вида (1.13) всегда можно аппроксимировать достаточно точно опытную кривую $\sigma_i - e_i$ для большинства металлов. Как известно, степенная кривая (1.11) всегда будет иметь расхождение с опытной кривой хотя бы на начальном участке. То,что аппроксимация на данном участке существенна, следует, из того, что для его аппроксимации нужен полином (1.13), который обязательно предполагает сложное нагружение (1.14) при наличии особых объемных сил (1. 10) для выполнения условий применимости теории малых упруго-пластических деформаций. Заметим, что в силу теоремы единственности решения задачи теории малых упруго-пластических деформаций для данной совместной системы деформаций (1.1) для данной функции (1.13) сложное нагружение (1.14), при котором деформация будет простой, будет единственным. Так как нагружение (1.14) сложное, причем особого вида, нам представляется сомнительным, будет ли всегда для пластических тел, девиаторы напряжений и деформаций которых связаны линейным тензорным соотношением [2], при простом нагружении деформация действительно близка простой при упруго-пластическом состоянии материала. Заметим, что для несжимаемого тела σ^k в (1.9) произвольная дифференцируемая функция координат, поэтому из (1.10) массовые силы определяются с точностью до потенциального поля, а поверхностные — до соответствующей нормальной нагрузки.

Поступила 25 V 1955

ЛИТЕРАТУРА

1. Ильюшин А. А К теории малых упруго-пластических деформаций. ПММ, т. X, вып. 3, 1947.
2. Ильюшин А. А. Пластичность. Гостехтеоритиздат, М.—Л., 1948.
3. Ильюшин А. А. О связи между напряжениями и малыми деформациями в механике сплошных сред. ПММ, т. XVIII, вып. 6, 1954.