Прикладная математика и механика. Том XIX, 1955
Институт механики Академии наук Союза ССР

О ПОСТАНОВКЕ ДИНАМИЧЕСКИХ ЗАДАЧ ДЛЯ ИДЕАЛЬНЫХ ПЛАСТИЧЕСКИХ СРЕД

С. С. Григорян

(Москва)

В работе А. Ю. Ишлинского, Н. В. Зволинского и И. З. Степаненко [1] дано уравнение состояния, при помощи которого авторы предлагают описывать процессы динамического деформирования грунтов. В этой заметке мы показываем, что упомянутое уравнение состояния не позволяет решить соответствующую задачу.

1. Сформулируем задачу. Дана среда, в которой внутренними напряжениями являются нормальные давления, характеризующаяся следующим уравнением состояния:

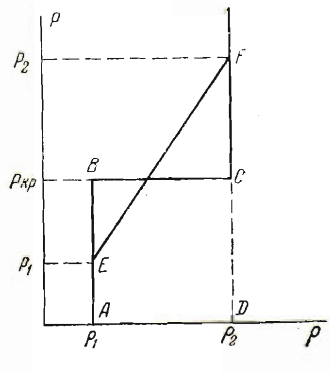
при возрастании давления (нагружение)

$$\rho = \begin{cases} \rho_1 & \text{при} \quad p < p_* \\ \rho_2 & \text{при} \quad p > p_* \quad (\rho_2 > \rho_1) \end{cases} \tag{1.1}$$

при убывании давления (разгрузка)

$$\rho = \text{const}$$

где p — давление, ρ — плотность, p_* — некоторое, характерное для данной среды значение давления, а const — значение плотности, достигнутое в конце нагружения (фиг. 1). Участкам $p < p_*$ и $p > p_*$ соответствует идеальная несжимаемая жидкость, участок $p = p_*$ при отсутствии внешних массовых сил может описывать движение среды по инерции. Характеристика среды (1.1) не учитывает влияние температуры и тепловые эффекты.



Фиг. 1

Среда заполняет все пространство, за исключением полости, представляющей собой сферу, бесконечный круглый цилиндр или слой, ограниченный двумя параллельными плоскостями. В начальный момент давление в среде равно $p_0 < p_*$, плотность $\rho = \rho_1$, а в полости $p = p_н \gg p_*$.

Требуется найти возникающее из этого неравновесного начального состояния покоя движение, если известно, что давление на поверхности полости — известная функция радиуса последней (расстояния граничной плоскости от срединной в случае слоя), монотонно убывающая до нуля, когда радиус полости сремится к бесконечности.

В силу (1.1) решение этой задачи, если оно существует, в области непрерывности может быть решением одной из следующих систем уравнений:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{\rho_1}\frac{\partial p}{\partial r} = 0, \qquad \frac{\partial u}{\partial r} + (\nu - 1)\frac{u}{r} = 0 \tag{1.2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{\rho_2}\frac{\partial p}{\partial r} = 0, \qquad \frac{\partial u}{\partial r} + (\nu - 1)\frac{u}{r} = 0 \tag{1.3}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial r} = 0, \qquad \frac{\partial \rho}{\partial t} + u\frac{\partial \rho}{\partial r} + \rho\frac{\partial u}{\partial r} + (\nu - 1)\frac{\rho u}{r} = 0 \qquad (p = p_*) \tag{1.4}$$

где t — время, r — пространственная координата, u — скорость частицы и $\nu = 1$, $\nu = 2$, $\nu = 3$ для плоских, цилиндрических и сферических движений соответственно.

Решения систем (1.2) и (1.3) описывают движения несжимаемой жидкости, а системы (1.4) — движение сплошной среды, каждая частица которой движется с постоянной скоростью (разные частицы могут иметь различные скорости, плотность же определяется по распределению скоростей по частицам).

Конструируя решение поставленной задачи при помощи решений систем (1.2), (1.3), (1.4), мы должны позаботиться либо о непрерывности при переходе от одного аналитического решения к другому, либо о выполнении динамических условий совместности на разрывах, если переход совершается с разрывом.

2. Имея в виду возможность существования разрывов в решении задачи, выпишем динамические условия совместности, характеризующие разрыв. Обозначив через v скорость частицы относительно поверхности разрыва, будем иметь, есл разрыв переводит частицу из состояния p_1, ρ_1 в состояние p_2, ρ_2 (ρ_1, ρ_2 — величины, фигурирующие в (1.1) и $p_1 \leqslant p_*$, $p_2 \geqslant p_*$):

$$\rho_1 v_1 = \rho_2 v_2 = j, \qquad p_1 + \rho_1 v_1^2 = p_2 + \rho_2 v_2^2 \tag{2.1}$$

соотношения, выражающие законы сохранения массы и импульса при переходе через поверхность разрыва. В силу особой важности для последующего следствий, получающихся из закона сохранения энергии, дадим два выражения для него.

1. Ввиду (1.1) по обе стороны поверхности разрыва мы имеем дело с движением идеальной несжимаемой жидкости, для энергетической характеристики которой достаточно рассмотреть кинетическую энергию среды и работу сил давления (других сил в рассматриваемом случае нет), учитывая, однако, что в такой среде возможна диссипация энергии на поверхностях разрыва (пример — «прыжок воды» в теории мелкой воды [2]). Поэтому энергетической характеристикой разрыва будет служить то, что в нем энергия может лишь диссипироваться. Поскольку в рассматриваемом случае при переходе через поверхность разрыва среда деформируется (уплотняется), то часть энергии тратится на работу деформации. Поэтому потери энергии на разрыве должны превышать работу деформации. Работа деформации единицы массы в силу уравнения (1.1) равна

$$A = -p_*\left(\frac{1}{\rho_2} - \frac{1}{\rho_1}\right) = \frac{1}{\rho_1\rho_2} p_*(\rho_2 - \rho_1) \tag{2.2}$$

Условие того, что разность потоков энергии до разрыва и за ним превышает поток работы деформации, дает

$$j\left(\frac{v_1^2}{2} + \frac{p_1}{\rho_1}\right) - j\left(\frac{v_2^2}{2} + \frac{p_2}{\rho_2}\right) \geqslant jA \tag{2.3}$$

т. е.

$$\frac{v_1^2 - v_2^2}{2} + \frac{p_1}{\rho_1} - \frac{p_2}{\rho_2} - \frac{1}{\rho_1\rho_2} p_*(\rho_2 - \rho_1) \geqslant 0 \tag{2.4}$$

Исключив при помощи (2.1) величины v_1, v_2 из (2.4), получим

$$\frac{1}{2}(p_2 + p_1)(\rho_2 - \rho_1) - p_*(\rho_2 - \rho_1) \geqslant 0 \tag{2.5}$$

или

$$\frac{1}{2}(p_2 + p_1) - p_* \geqslant 0 \tag{2.6}$$

Условие (2.5) означает, что площадь трапеции $AEFD$ должна быть больше (фиг. 1) площади прямоугольника $ABCD$.

2. Условие (2.5) может быть получено и следующим путем. Введя в рассмотрение внутреннюю энергию среды, можем написать закон сохранения энергии для разрыва

$$j\left(\frac{v_1^2}{2} + \varepsilon_1 + \frac{p_1}{\rho_1}\right) = j\left(\frac{v_2^2}{2} + \varepsilon_2 + \frac{p_2}{\rho_2}\right) \tag{2.7}$$

где ε — внутренняя энергия единицы массы.

Проходя через поверхность разрыва, частица подвергается необратимому адиабатическому процессу деформации, в результате которого в силу второго начала термодинамики энтропия ее возрастает. Сопоставим этому необратимому процессу обратимый процесс, переводящий частицу из начального состояния в конечное, и такой, что выполняется уравнение (1.1). Для этого процесса первое начало термодинамики дает

$$TdS = d\varepsilon + pd\,\frac{1}{\rho} \qquad (S \text{ — энтропия единицы массы}) \tag{2.8}$$

или

$$\varepsilon_2 - \varepsilon_1 + p_*\left(\frac{1}{\rho_2} - \frac{1}{\rho_1}\right) = \int\limits_{EBCF} TdS \geqslant 0 \tag{2.9}$$

Исключив из (2.9) и (2.7) $\varepsilon_2 - \varepsilon_1$, и затем с помощью (2.1) — v_1 и v_2, получим

$$\frac{1}{2}(p_2 + p_1)(\rho_2 - \rho_1) - p_*(\rho_2 - \rho_1) = \rho_1\rho_2 \int\limits_{EBCF} TdS \geqslant 0 \tag{2.10}$$

что совпадает с (2.5). Заметим, что условие, аналогичное (2.5), должно учитываться всякий раз, когда уравнение состояния среды задается в виде $\rho = f(p)$. В этом случае условие (2.5) заменяется условием

$$\frac{1}{2}(p_2 + p_1)(\rho_2 - \rho_1) - \rho_1\rho_2 \int\limits_{L} pd\,\frac{1}{\rho} \geqslant 0 \tag{2.11}$$

где L — линия, задаваемая уравнением $\rho = f(p)$.

3. Как указывалось выше, решение поставленной задачи, если оно существует, должно быть составлено из решений систем (1.2)—(1.4).

Общим решением системы (1.3) является

$$\begin{aligned} &ur^{\nu-1} = f(t) \\ &-\frac{\dot f}{r} + \frac{f^2}{1r^4} + \frac{1}{\rho_2}\,p = \varphi(t) \qquad (\nu = 3) \\ &\dot f \ln r + \frac{f^2}{2r^2} + \frac{1}{\rho_2}\,p = \varphi(t) \qquad (\nu = 2) \\ &\dot f r + \frac{1}{\rho_2}\,p = \varphi(t) \qquad (\nu = 1) \end{aligned} \tag{3.1}$$

где $f(t)$, $\varphi(t)$ — произвольные функции. Формулы (3.1) содержат все одномерные движения несжимаемой идеальной жидкости. Заменив в (3.1) ρ_2 на ρ_1, получим общее решение системы (1.2). Выписывать общее решение системы (1.4) не будем, так как в дальнейшем понадобится лишь отмеченное выше свойство этого решения, а именно — постоянство скорости каждой частицы.

Допустим, решение нашей задачи существует. Граница полости может быть поверхностью разрыва лишь в начальный момент, так как она совпадает с одними и теми же частицами, а поверхность разрыва давлений и скоростей обязательно перемещается по частицам. А так как в начале движения давление на границе полости близко к $p_н \gg p_*$, то в любой момент времени существует слой, охватывающий полость, в котором движение описывается решением системы (1.3).

Покажем, что в решении задачи не может существовать область отличной от нуля ширины, в которой движение описывается решением системы (1.4). Для этого убедимся сначала в том, что границы этой области, если на них давление и скорость непрерывны, могут быть только поверхностями сильного или слабого контактного разрыва. В самом деле, имеем (D — скорость границы)

$$\begin{aligned} \rho_1(D - u_1) &= \rho_2(D - u_2), \qquad & p_1 = p_2 = p_* \\ p_1 + \rho_1(D - u_1)^2 &= p_2 + \rho_2(D - u_2)^2, \qquad & u_1 = u_2 \end{aligned} \tag{3.2}$$

Откуда при $\rho_1 \neq \rho_2$ следует $D - u_1 = 0$, т. е. в этом случае имеем сильный контактный разрыв. В случае $\rho_1 = \rho_2$ соотношения (3.2) выполняются при произвольном D. Для доказательства того, что и в этом случае $D - u_1 = 0$, обратимся к фиг. 1. Так как скорость распространения слабых возмущений по частицам в области, соответствующей отрезку BC, равна нулю, то в этой области могут существовать лишь контактные разрывы. Это не относится к самим точкам B и C, так как в них скорость распространения слабых возмущений не определена однозначно (излом диаграммы). Если сгладить углы диаграммы так, чтобы она имела непрерывно поворачивающуюся касательную, и так, чтобы для сглаженного участка существовало решение уравнений движения, то между областью, где действует решение системы (1.4), и областью, где действует решение системы (1.3) или (1.2), будет расположена область, где действует решение, соответствующее сглаженному участку диаграммы, причем граница между первой из названных областей и последней будет уже слабым контактным разрывом. Устремив длину сглаженных участков диаграммы к нулю, получим в пределе заданную диаграмму; при этом ширина соответствующей области также обратиться в нуль, и мы получим интересовавшее нас движение со слабым контактным разрывом.

Предположим теперь, что существует область ненулевой ширины с $p = p_*$. Между ее внутренней границей и границей полости движение описывается решением (3.1) при следующих граничных условиях:

на границе полости

$$r = r_0(t), \qquad u(r_0, t) = \dot{r}_0(t), \qquad p(r_0, t) = p_0(r_0) \tag{3.3}$$

(точка над величиной означает дифференцирование по t);

на второй границе

$$r = r_1(t), \qquad u(r_1, t) = \dot{r}_1(t) = u_1 = \mathrm{const}, \qquad p(r_1, t) = p_* \tag{3.4}$$

Из (3.4) имеем

$$r_1(t) = u_1 t + r_{10} \tag{3.5}$$

Остановившись для определенности на случае $\nu = 3$, из (3.1) будем иметь

$$f(t) = u(r_0, t)\, r_0^2 = r_0^2 \dot{r}_0 = u(r_1, t)\, r_1^2 = r_1^2 \dot{r}_1 \tag{3.6}$$

Это дает

$$r_0^3 = r_1^3 + \mathrm{const} \tag{3.7}$$

Далее

$$\varphi(t) = -\frac{1}{3r_1}\frac{d^2}{dt^2}(r_1^3) + \frac{1}{18 r_1^4}\left[\frac{d}{dt}(r_1^3)\right]^2 + \frac{1}{\rho_2} p_* \tag{3.8}$$

Соотношения (3.5)—(3.8) определяют все неизвестные функции $(r_0, r_1, f, \varphi \,\|\, t)$. По ним определяется поле давлений и, в частности, $p(r_0, t)$, что противоречит (3.3). Тем самым доказывается, что внутренняя граница области с $p = p_*$ может быть только ударной волной. Если областей с $p = p_*$ несколько, то, применив те же рассуждения к слою между двумя соседними областями, убедимся, что его границы являются ударными волнами. Для рассмотрения внешней границы последней из областей с $p = p_*$ следует различать сферический случай от плоского и цилиндрического. В сферическом случае вне этой границы может быть движение, описываемое решением (1.2). Условием на бесконечности здесь естественно принять $p(\infty, t) = p_0$, что дает $\varphi(t) = \mathrm{const}$. По тем же причинам, что приводились выше, это условие противоречит предположению о непрерывности течения на рассматриваемой границе. В плоском и цилиндрическом случаях вне этой границы должен быть покой, ибо если бы там было движение (которое простиралось бы до бесконечности), то кинетическая энергия движущейся среды была бы равна бесконечности, чего не может быть в силу того, что в начальный момент кинетическая энергия среды была равна нулю, а работа сил давления на границе среды конечна. Из уравнений (1.4) следует, что движение, описываемое ими, не может быть непрерывно сопряжено с покоем, т. е. и в этом случае граница области с $p = p_*$ является ударной волной.

Таким образом, доказано, что границами области, где $p = p_*$ и имеется движение, могут быть только ударные волны. Но легко видеть, что одна из этих ударных волн переводит частицы из состояния ρ_1, $p_1 < p_*$ в некоторое состояние ρ', p_*, что противоречит условию (2.5). Это означает, что, конструируя решение нашей задачи, мы не должны пользоваться решениями системы (1.4), что и требовалось доказать.

4. Как показано выше, в плоском и цилиндрическом случаях движение не может продолжаться до бесконечности. Но вблизи полости движение описывается решением системы (1.3), которое аналитически продолжимо до бесконечности. Следовательно, движение не может быть непрерывным, и по покоящейся среде должна распространяться ударная волна. Построив решение с ударной волной, распространяющейся по покоящейся среде с давлением там $p = p_0 < p_*$, можно увидеть, что давления всюду в возмущенной области и, в частности, за ударной волной с течением времени падают. Поэтому ударная волна в таком решении с некоторого момента времени станет несовместимой с условием (2.5) и, следовательно, это решение не может быть принято. Если предположить, что давление перед ударной волной равно p_* (т. е. что в начальный момент времени p_*, распространяясь с бесконечной скоростью, устанавливается во всем пространстве, а это не противоречит уравнениям движения и уравнению состояния среды (1.1), то условие (2.5) будет выполняться все время, но в некоторый момент интенсивность ударной волны и скорости всех частиц среды обратятся в нуль [1]. В работе [1] задача для цилиндрического случая поставлена именно так, и там указанный момент времени считается концом движения. Покажем, что этого делать нельзя. В самом деле, в момент вырождения ударной волны и остановки среды t_0 будем иметь по (3.1)

$$u(r, t_0) = \frac{f(t_0)}{r^{\nu-1}} = 0 \text{ или } f(t_0) = 0 \tag{4.1}$$

$$-\frac{\dot f(t_0)}{r} + \frac{1}{\rho_2} p(r, t_0) = \varphi(t_0) \qquad (\nu = 3)$$

$$\dot f(t_0) \ln r + \frac{1}{\rho_2} p(r, t_0) = \varphi(t_0) \qquad (\nu = 2) \tag{4.2}$$

$$\dot f(t_0)\, r + \frac{1}{\rho_2} p(r, t_0) = \varphi(t_0) \qquad (\nu = 1)$$

Из (4.2) следует

$$p(r_1, t_0) - p(r_0, t_0) = \rho_2 \dot f(t_0) \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_0}\right) \qquad (\nu = 3)$$

$$p(r_1, t_0) - p(r_0, t_0) = \rho_2 \dot f(t_0) \ln \frac{r_0}{r_1} \qquad (\nu = 2) \tag{4.3}$$

$$p(r_1, t_0) - p(r_0, t_0) = \rho_2 \dot f(t_0)(r_0 - r_1) \qquad (\nu = 1)$$

где r_1, r_0 — радиусы ударной волны и полости соответственно в момент t_0. Поскольку $r_0 - r_1 < 0$ и $f(t < t_0) > 0$, а $\dot f(t_0)$, вообще говоря, отлично от нуля [обращение $\dot f(t_0)$ в нуль возможно лишь случайно при специальном виде функции $p = p_0(r_0)$], то $\dot f(t_0) < 0$, и из (4.3) следует, что давление в полости в момент остановки ниже давления на ударной волне, равного p_*.

Если продолжить решение, построенное в работе [1], за момент остановки t_0, то продолженное решение будет описывать движение, порождаемое отличным от нуля градиентом давления, имеющимся в момент t_0 между полостью и ударной волной, причем это движение будет повторять предшествовавшее остановке движение (расширение) в обратном направлении (сжатие); при этом ударная волна пойдет в глубь уплотненной среды, разуплотняя ее, что невозможно в силу свойств среды (см. (1.1)).

Если же считать, что градиент давления, имеющийся в момент t_0, снимается мгновенно, что допускается уравнениями движения и уравнением состояния (1.1), то давление, которое должно установиться во всем пространстве после этого, чтобы отсутствовало движение, будет равно давлению в полости в момент t_0 (так как давления могут скачком меняться в пространстве, занятом средой, но не в полости, где оно однозначно определяется радиусом последней). Это значение давления, вообще говоря, не совпадает с начальным давлением p_0. Решение же задачи должно обладать тем свойством, что после прекращения движения среды давление всюду возвращается к начальному значению p_0. Таким образом, в случае плоской и цилиндрической симметрии поставленная задача не имеет решения.

5. В случае сферической симметрии решения с ударной волной, распространяющейся по покоящейся среде, отвергаются по тем же причинам, однако остается еще решение, в котором движение простирается до бесконечности. Здесь должны существовать две области движения: внутренняя, прилегающая к полости, в которой действует решение системы (1.3), и внешняя с решением системы (1.2), разделенные либо ударной волной, либо контактным разрывом в зависимости от величины давления вблизи линии раздела. Внешняя область не существовала бы, если бы давление на бесконечности было равно p_*, и уплотнение всей среды происходило мгновенно в начальный момент, что невозможно ввиду бесконечного количества энергии, требующейся при этом для уплотнения.

Поскольку по окончании движения давление всюду должно быть равно p_0, в качестве одного из граничных условий выставляем требование

$$\lim p(r, t) = p_0 \quad \text{при} \quad r \to \infty \tag{5.1}$$

На поверхности полости должны удовлетворяться условия (3.3). На границе между двумя областями должна удовлетворяться одна из двух групп условий:

в случае, когда эта поверхность — контактный разрыв

$$r = R(t), \qquad p_1(R, t) = p_2(R, t) < p_*, \qquad u_1(R, t) = u_2(R, t) = \dot{R} \tag{5.2}$$

в случае, когда эта поверхность,— ударная волна

$$\begin{gathered} r = R(t), \; \rho_1(D - u_1) = \rho_2(D - u_2), \qquad D = \dot{R} \\ p_1 + \rho_1(D - u_1)^2 = p_2 + \rho_2(D - u_2)^2, \qquad p_1 = p_* \end{gathered} \tag{5.3}$$

Величины с индексом 1 относятся к внешней области движения, с индексом 2 — к внутренней. Последнее из условий (5.3) обеспечивает выполнение требования (2.5) для ударной волны вплоть до ее полного вырождения.

Поскольку в начальный момент вся среда покоится и имеет плотность ρ_1, в этот момент внешняя область совпадает со всем пространством, занятым средой.

Однако в дальнейшем должна возникнуть внутренняя область, ибо в противном случае мы имели бы в некоторой зоне, прилегающей к полости, плотность ρ_1, а давление $p \approx p_H \gg p_*$, что невозможно в силу (1.1). Ясно, что внутренняя область, может возникнуть только при помощи ударной волны, так как контактный разрыв, который должен ограничивать эту область в противном случае, не может перемещаться по частицам, т. е. ширина внутренней области не может расти. Итак, в следующие после начального моменты времени движение может описываться только решением с ударной волной. Для его построения нужно добавить к условиям (5.3) решения систем (1.2) и (1.3)

$$u_1 r^2 = f_1(t), \qquad -\frac{\dot{f}_1}{r} + \frac{f_1^2}{2r^4} + \frac{1}{\rho_1} p_1 = \varphi_1(t) \tag{5.4}$$

$$u_2 r^2 = f_2(t), \qquad -\frac{\dot{f}_2}{r} + \frac{f_2^2}{2r^4} + \frac{1}{\rho_2} p_2 = \varphi_2(t) \tag{5.5}$$

Искомыми являются функции $f_1, f_2, \varphi_1, \varphi_2, r_0, R$, зависящие от t. Из (5.4), (5.5), (5.3), (3.3), (5.1) следуют соотношения

$$\begin{gathered} \varphi_1(t) = \frac{1}{\rho_1} p_0, \qquad -\frac{\dot{f}_1}{R} + \frac{f_1^2}{2R^4} + \frac{1}{\rho_1} p_* = \frac{1}{\rho_1} p_0 \\ -\frac{\dot{f}_2}{r_0} + \frac{f_2^2}{2r_0^4} + \frac{1}{\rho_2} p_0(r_0) = \varphi_2(t), \qquad r_0^2 \dot{r}_0 = f_2(t) \end{gathered} \tag{5.6}$$

$$\rho_1 (\dot{R} - u_1 (R, t)) = \rho_2 (\dot{R} - u_2 (R, t))$$

$$p_* + \rho_1 (\dot{R} - u_1 (R, t))^2 = p_2 (R, t) + \rho_2 (\dot{R} - u_2 (R, t))^2$$

$$u_1 (R, t) = \frac{f_1}{R^2}, \qquad u_2 (R, t) = \frac{f^2}{R^2}, \qquad -\frac{\dot{f}_2}{R} + \frac{f_2^2}{2R^4} + \frac{1}{\rho_2} p_2 (R, t) = \varphi_2 (t)$$

Из (5.6) можно получить

$$-\frac{1}{3\alpha R} \frac{d^2}{dt^2} [r_0^3 - (1-\alpha) R^3] + \frac{1}{18 \alpha^2 R^4} \left\{ \frac{d}{dt} [r_0^3 - (1-\alpha) R^3] \right\}^2 + \frac{1}{\rho_1} (p_* - p_0) = 0 \tag{5.7}$$

$$\rho_2 \left\{ -\frac{1}{3} \left(\frac{1}{r_0} - \frac{1}{R} \right) \frac{d^2}{dt^2} (r_0^3) + \frac{1}{18} \left(\frac{1}{r_0^4} - \frac{1}{R^4} \right) \left[\frac{d}{dt} (r_0^3) \right]^2 \right\} -$$
$$- \frac{1-\alpha}{9\alpha} \frac{\rho_2}{R^4} \left[\frac{d}{dt} (R^3 - r_0^3) \right]^2 + p_0 (r_0) - p_* = 0 \qquad \left(\alpha = \frac{\rho_1}{\rho_2} \right) \tag{5.8}$$

Если система (5.7), (5.8) проинтегрирована, т. е. найдены $r_0 (t)$, $R (t)$, то все остальные неизвестные функции находятся по формулам, следующим из (5.6).

Переходя к безразмерным величинам по формулам

$$p_0 (r_0) = p_H \Pi \left[\left(\frac{r_0}{\bar{r}_0} \right)^3 \right], \qquad p_H = p_0 \pi_H, \qquad p_* = p_0 \pi_*, \qquad \alpha = \frac{\rho_1}{\rho_2}$$
$$w = \left(\frac{r_0}{\bar{r}_0} \right)^3, \qquad \Lambda = \left(\frac{R}{\bar{r}_0} \right)^3, \qquad \tau = \sqrt{\frac{p_0}{\rho_2 \bar{r}_0^2}}\, t \tag{5.9}$$

получаем из (5.7), (5.8)

$$\frac{d^2}{d\tau^2} [w - (1-\alpha) \Lambda] - \frac{1}{6\alpha \Lambda} \left\{ \frac{d}{d\tau} [w - (1-\alpha) \Lambda] \right\}^2 - 3 (\pi_* - 1) \Lambda^{1/3} = 0 \tag{5.10}$$

$$\left[1 - \left(\frac{w}{\Lambda} \right)^{1/3} \right] \frac{d^2 w}{d\tau^2} - \frac{1}{6w} \left[1 - \left(\frac{w}{\Lambda} \right)^{4/3} \right] \left(\frac{dw}{d\tau} \right)^2 +$$
$$+ \frac{1-\alpha}{3\alpha w} \left(\frac{w}{\Lambda} \right)^{4/3} \left[\frac{d (\Lambda - w)}{d\tau} \right]^2 - 3 w^{1/3} [\pi_H \Pi (w) - \pi_*] = 0 \tag{5.11}$$

Сделав замену

$$\left(\frac{dw}{d\tau} \right)^2 = X, \qquad \Lambda - w = V \tag{5.12}$$

получим окончательно

$$2 \frac{1-\alpha}{\alpha} X V'' - \left(1 - \frac{1-\alpha}{\alpha} V' \right) X' + \frac{1}{3 (V + w)} \left(1 - \frac{1-\alpha}{\alpha} V' \right)^2 X + 6 \frac{\pi_* - 1}{\alpha} (w + V)^{1/3} = 0 \tag{5.13}$$

$$\left[1 - \left(\frac{w}{w + V} \right)^{1/3} \right] X' - \frac{1}{3w} \left[1 - \left(\frac{w}{w + V} \right)^{4/3} \right] X +$$
$$+ \frac{2 (1-\alpha)}{3\alpha w} \left(\frac{w}{w + V} \right)^{4/3} (V')^2 X - 6 w^{1/3} [\pi_H \Pi (w) - \pi_*] = 0 \tag{5.14}$$

$$\tau = \int_1^w \frac{d\xi}{\sqrt{X (\xi)}} \tag{5.15}$$

Систему уравнений (5.13), (5.14) нужно интегрировать при следующих начальных условиях. При $\tau = 0$, $w = 1$, т. е. начальные условия для (5.13) и (5.14) ставятся при $w = 1$. По (5.12) и (5.9) V с точностью до числового множителя — безразмерный объем уплотненной среды, и, поскольку в начальный момент вся среда недеформирована, мы должны положить

$$V (1) = 0 \tag{5.16}$$

Следующее условие получается из требования регулярности уравнения (5.14) при $w=1$, т. е.

$$\left[\frac{2(1-\alpha)}{3\alpha}(V')^2 X\right]_{w=1} - 6(\pi_H - \pi_*) = 0 \tag{5.17}$$

оно выражает условия на ударной волне при $t=0$.

Наконец, последнее начальное условие следует из требования равенства нулю кинетической энергии среды при $t=0$, т. е. $u_1(r, 0)=0$. Обращаясь к (5.6), замечаем, что это сводится к

$$\left[(1-\alpha)\frac{d(R^3)}{dt} - \frac{d(r_0{}^3)}{dt}\right]_{t=0} = 0$$

что в силу (5.9), (5.12), (5.15) дает

$$V'(1) = \frac{\alpha}{1-\alpha} \tag{5.18}$$

А тогда из (5.17) следует

$$X(1) = 9\frac{1-\alpha}{\alpha}(\pi_H - \pi_*) \tag{5.19}$$

Таким образом, для уравнений (5.13), (5.14) имеем полную систему начальных условий, т. е. решение задачи при малых t можно построить. Однако это решение годится для описания движения лишь до того момента, когда ударная волна выродится, т. е. будет $p_2(R, t) = p_*$, а это неизбежно произойдет в силу свойств функции $p = p_0(r_0)$. Дальше решение будет описывать движение с ударной волной, перемещающейся по уплотненной среде и разуплотняющей ее, что недопустимо в силу (1.1); при этом полость будет продолжать расширяться. Решение задачи можно попытаться продолжить, приняв, что после вырождения ударной волны среда продолжает расширяться, но граница между двумя областями является лишь контактным разрывом. В этом случае к (3.3), (5.1), (5.4), (5.5) нужно присоединить (5.2), что приводит к

$$\left[1-\left(\frac{w}{w+V_0}\right)^{1/3}\right]X' - \frac{1}{3w}\left[1-\left(\frac{w}{w+V_0}\right)^{4/3}\right]X - 6w^{1/3}\left[\pi_H \Pi(w) - \pi_*\right] = 0 \tag{5.20}$$

$$V = V_0 = \text{const} \tag{5.21}$$

Здесь V_0 — значение V в момент вырождения ударной волны. В этот же момент будем иметь $w = w_0$, $X = X_0$, $\tau = \tau_0$. Начальные условия для (5.20) нужно ставить при $w = w_0$, но это не будет условие $X(w_0) = X_0$, а будет задание того значения X, которое получится из требования непрерывности давления при переходе от одного решения к другому, т. е. из $p_1(R_0, t_0) = p_*$, что сводится к

$$X'(w_0) - \frac{1}{3(w_0+V_0)}X(w_0) - 6\frac{\pi_* - 1}{\alpha}(w_0+V_0)^{1/3} = 0. \tag{5.22}$$

Исключив из (5.22) и (5.20) $X'(w_0)$ при $w = w_0$, получим уравнение для определения $X(w_0)$. Найденное таким образом значение X не совпадает с X_0. В самом деле, (5.22) получается из (5.13), если положить $V'' = V' = 0$, а (5.20) — из (5.14) при $V' = 0$. Но поскольку в момент $w = w_0$ для (5.13), (5.14) выполняется, вообще говоря, только $V' = 0$, то ясно, что X_0, получающееся из (5.13) и (5.14) при $w = w_0$, $V = V_0$, $V' = 0$ исключением X', не будет совпадать с определенным выше $X(w_0)$. Можно показать, что $X(w_0) > X_0$, если $V''(w_0) < 0$.

Таким образом, если $V''(w_0) \neq 0$, то переход от одного решения к другому с сохранением непрерывности давления возможен только с разрывом скоростей, т. е. при этом переходе кинетическая энергия среды терпит разрыв, а именно возрастает, что недопустимо. Это означает, что, если $V''(w_0) \neq 0$, продолжить решение невозможно. Если же $V''(w_0) = 0$, что может произойти лишь случайно, то решение можно продолжить при помощи решения уравнения (5.20). Рассмотрение интегральных кривых последнего показывает, что движение, описываемое решением (5.20), является колебанием, т. е. расширение среды прекратится при некотором значении $w = w_1$, после чего начнется сжатие (w уменьшается). При $w = w_0$ на линии раздела давление возрастает до p_* и дальнейшее движение возможно только с ударной волной. Однако условия непрерывности перехода от одного решения к другому показывают, что таким движением может быть только движение имевшееся в начале расширения, происходящее теперь в обратном направлении, т. е. с ударной волной, внедряющейся в уплотненную среду и разуплотняющей ее, что запрещено свойствами среды (1.1). Этим и завершается доказательство того, что поставленная задача неразрешима. Таким образом, уравнение состояния (1.1) не допускает решения задачи о расширении полости с высоким давлением внутри в среде, подчиняющейся уравнению (1.1).

Поступила 27 VII 1955

ЛИТЕРАТУРА

1. Ишлинский А. Ю., Зволинский Н. В. и Степаненко И. З. К динамике грунтовых масс, ДАН, т. XCV, № 4, 1954.
2. Ландау Л. Д. и Лифшиц Е. М. Механика сплошных сред. Гостехтеоретиздат, М., 1953.

ЗАМЕЧАНИЯ ПО ПОВОДУ СТАТЬИ С. С. ГРИГОРЯНА «О ПОСТАНОВКЕ ДИНАМИЧЕСКИХ ЗАДАЧ ДЛЯ ИДЕАЛЬНЫХ ПЛАСТИЧЕСКИХ СРЕД»

С. С. Григорян выполнил интересное исследование уравнения состояния пластической среды, предложенного нами (А. Ю. Ишлинский, Н. В. Зволинский и И. З. Степаненко «К динамике грунтовых масс». ДАН, т. XCV, № 4, 1954). Полученные им результаты заслуживают внимания. Он показал, что энергетическое условие на поверхности сильного разрыва выполняется во все время течения процесса лишь при условии, что во внешней области (область 1) давление равно критическому, как и было принято в работе [1]. Он также сделал вывод о невозможности существования зоны III в случае расширения полости посредством взрыва, и, наконец, он изучил в случае сферической симметрии задачу уплотнения грунта при наличии движения во внешней области. В результате всех этих исследований С. С. Григорян сделал категорический вывод о неразрешимости поставленной задачи при помощи уравнения состояния (1). Мы не можем согласиться с категорическим характером этого вывода. Нам ясно было и до появления статьи С. С. Григоряна, что предложенная нами схема должна рассматриваться как предельная, и мы, разумеется, не могли рассчитывать, что она полностью и до конца решает задачу о деформации уплотнения грунта. Весь вопрос заключается в том, позволяет ли она описать главные черты явления динамического уплотнения грунта.

Этот вопрос остается попрежнему открытым и после появления статьи С. С. Григоряна [2], так как в ней не показано, как же следует ставить задачи динамики грунта. Нам кажется, что наша предельная схема будет достаточно хорошо воспроизводить физическое явление, если принять во внимание некоторые «исчезающе малые» дополнительные эффекты. В самом деле, в нашей постановке мы пренебрегли касательными напряжениями, которые, конечно, существуют в грунте. Если принять во внимание связующую с касательными напряжениями «исчезающе малую пластичность», то снимается, в сущности, единственное противоречие в решении задачи, которое состоит в том, что давление на бесконечности после остановки процесса оказывается искаженным. Это противоречие может быть снято также введением «исчезающе малой упругости» среды. Подобного рода поправки, не затрагивая количественных расчетов по уравнению (1), могут привести к другой постановке задачи. Тем самым, в частности, представляется возможным показать, что в рамках расчетов по «предельной схеме» (1) нет нужды требовать сохранения давления в бесконечности.

Динамика грунта пока еще не имеет своей теории. Первоочередным делом при построении этой теории является обсуждение возможных и рациональных постановок задачи. Когда будет найдена такая постановка, которая даст хорошее описание динамического деформирования грунта, тогда только будет окончательно решен вопрос о пригодности уравнения состояния (1) для изображения главных черт явления. *Н. В. Зволинский, А. Ю. Ишлинский, И. З. Степаненко*