

УПРУГО-ПЛАСТИЧЕСКИЕ ДЕФОРМАЦИИ ТЕЛ ПРИ ПОВТОРНЫХ НАГРУЖЕНИЯХ

В. В. Москвитин

(Москва)

В работе на основе теории малых упруго-пластических деформаций построены уравнения, приближенно описывающие деформации тел при многократных нагружениях. В общем случае повторное нагружение не является простым. Однако остаточные напряжения и деформации существуют без внешних сил, поэтому пропорциональное повторное нагружение будет близко к простому. В некоторых частных случаях, например в случае подобных деформаций (§ 2), теорема о простом нагружении выполняется точно. В качестве примеров рассмотрены следующие задачи: о чистом упруго-пластическом изгибе бруса при циклических нагрузках, о повторном нагружении полого шара внутренним давлением.

§ 1. Основные уравнения теории малых упруго-пластических деформаций при многократном нагружении. Пусть некоторое тело под действием поверхностных и объемных сил деформируется таким образом, что в определенных областях его появляются пластические деформации. При этом согласно теории малых упруго-пластических деформаций должны удовлетворяться следующие уравнения: уравнения равновесия

$$\frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} + \frac{\partial X_z}{\partial z} + \rho X = C \quad (xyz) \quad (1.1)$$

уравнения, связывающие компоненты напряжений и деформаций:

$$X_x - \sigma = \frac{2}{3} \frac{\sigma_i}{e_i} (e_{xx} - e), \quad X_y = \frac{1}{3} \frac{\sigma_i}{e_i} e_{xy} \quad (xyz) \quad (1.2)$$

$$\sigma = 3Ke, \quad \sigma_i = \Phi(e_i) \quad (1.3)$$

причем в упругой области $\sigma_i = 3Ge_i$. Должны быть выполнены граничные условия

$$X_y = X_x l + X_y m + X_z n \quad (xyz, lmn) \quad (1.4)$$

Здесь и ниже обозначением (xyz) , а также (xyz, lmn) указывается, что не выписанные формулы получаются из написанных круговой перестановкой одновременно всех указанных в скобках букв.

Будем считать, что основная задача пластичности для данного тела и для данной системы внешних сил решена, т. е. величины X_x, X_y, \dots и e_{xx}, e_{xy}, \dots известны.

Если теперь удалить внешние силы, то появившиеся остаточные напряжения X_x^o, X_y^o, \dots и остаточные деформации $e_{xx}^o, e_{xy}^o, \dots$ так же, как и соответствующие величины в процессе разгрузки, могут быть определены согласно теореме о разгрузке А. А. Ильюшина. Но при этом следует предположить, что материал в процессе разгрузки вновь не выходит за предел упругости (упругая разгрузка). Для составления уравнений, связывающих напряжения и деформации в общем случае разгрузки, заметим, что если за некоторое начальное состояние принять то,

при котором существуют лишь пластические слагаемые деформации e_{xx}, e_{xy}, \dots (и, значит, отсутствуют соответствующие напряжения), то, используя пропорциональность следующих тензоров:

$$\tilde{D}_s = \begin{pmatrix} \tilde{X}_x - \tilde{\sigma} & \tilde{X}_y & \tilde{X}_z \\ \tilde{X}_y & \tilde{Y}_y - \tilde{\sigma} & \tilde{Y}_z \\ \tilde{X}_z & \tilde{Y}_z & \tilde{Z}_z - \tilde{\sigma} \end{pmatrix} \quad (1.5)$$

$$(\bar{D}_E) = \begin{pmatrix} \bar{e}_{xx} - \bar{e} & \frac{1}{2} \bar{e}_{xy} & \frac{1}{2} \bar{e}_{xz} \\ \frac{1}{2} \bar{e}_{yx} & \bar{e}_{yy} - \bar{e} & \frac{1}{2} \bar{e}_{yz} \\ \frac{1}{2} \bar{e}_{zx} & \frac{1}{2} \bar{e}_{yz} & \bar{e}_{zz} - \bar{e} \end{pmatrix} \quad (1.6)$$

получим

$$\tilde{X}_x - \tilde{\sigma} = \frac{\tilde{\sigma}_i}{e_i} (\bar{e}_{xx} - \bar{e}), \quad \tilde{X}_y = \frac{1}{3} \frac{\tilde{\sigma}_i}{e_i} \bar{e}_{xy} \quad (xyz) \quad (1.7)$$

причем в области упругой разгрузки

$$\tilde{\sigma}_i = 3G(\bar{e}_i - e_i^{(p)}) \text{ при } \bar{e}_i \geq e_i^{(p)}; \quad \sigma_i = 3G(e_i^{(p)} - \bar{e}_i) \text{ при } \bar{e}_i < e_i^{(p)} \quad (1.8)$$

В соотношениях (1.7) и (1.8) компоненты деформаций, отмеченные индексом (p) сверху, представляют собой пластические слагаемые деформации, существовавших в теле перед началом разгрузки; кроме того, введены следующие обозначения:

$$\bar{e}_{xx} = \tilde{e}_{xx} - e_{xx}^{(p)}, \quad \bar{e}_{xy} = \tilde{e}_{xy} - e_{xy}^{(p)} \quad (xyz)$$

а \bar{e}_i есть интенсивность деформаций $\bar{e}_{xx}, \bar{e}_{xy}, \dots$.

Уравнения (1.7) и (1.8), как это нетрудно показать¹, эквивалентны следующей известной системе уравнений, справедливых при упругой разгрузке:

$$\begin{aligned} \tilde{X}_x - X_x &= \bar{\lambda} (\bar{\theta} - \theta) + 2G(\tilde{e}_{xx} - e_{xx}) & (\bar{\lambda} = K - \frac{2}{3} G) \\ \tilde{X}_y - X_y &= G(\tilde{e}_{xy} - e_{xy}) & (xyz) \end{aligned} \quad (1.9)$$

Заметим, что если в процессе разгрузки материал выходит за предел упругости (появляются вторичные пластические деформации), то интенсивность напряжений σ_i есть определенная функция интенсивности деформаций \bar{e}_i , отличная от (1.8), причем вид этой функции зависит от механических свойств материала в области вторичных пластических деформаций (подробнее об этом будет сказано ниже).

Будем теперь рассмотренное выше тело, имеющее остаточные напряжения \tilde{X}_x, \dots и остаточные деформации \tilde{e}_{xx}, \dots , нагружать некоторой системой внешних сил, поверхностных X'_v, Y'_v, Z'_v и объемных X', Y', Z' . Для построения основных уравнений, характеризующих при этом напряженное и деформированное состояние, следует рассмотреть отдельно следующие два случая:

(1) нагружение силами, вызвавшими указанные выше остаточные напряжения и деформации;

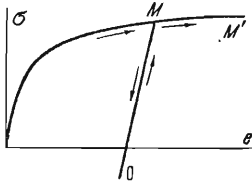
(2) нагружение силами обратного знака по отношению к тем, которые вызвали остаточные напряжения и остаточные деформации.

Заметим, что в указанных выше случаях речь идет о характере сил, величина же последних может быть произвольной. Рассмотрим эти случаи, причем будем рассматривать лишь уравнения, связывающие компоненты напряжений и деформаций, ибо остальные уравнения одни и те же для всех случаев.

¹ Для доказательства необходимо иметь в виду, что при упругой разгрузке, например, $\tilde{e}_{xx} = e_{xx}^{(p)} + \tilde{e}_{xx}^{(e)}$, где $\tilde{e}_{xx}^{(e)}$ — упругое слагаемое деформации \tilde{e}_{xx} .

Первый случай. Если в процессе разгрузки материал не вышел за предел упругости, то при последующем нагружении силами, деформировавшими тело перед началом разгрузки, зависимость между $\sigma_i = |\sigma|$ и $e_i = |e|$ представляется прямой OM (фиг. 1) до перехода за предел упругости и участком MM' после перехода за указанный выше предел упругости.

Можно показать, что если в этом случае нагрузить тело внешними силами, тождественно совпадающими с силами, деформировавшими тело перед началом разгрузки, то последние вызовут напряжения и деформации, тождественно совпадающие с напряжениями и деформациями, существовавшими в теле перед началом разгрузки.



Фиг. 1

В этом нетрудно убедиться, если заметим, что разности между текущими величинами $X_{x'}', \dots, e_{xx}'', \dots$ и соответствующими величинами перед началом разгрузки $X_{x'}^\circ, \dots, e_{xx}^\circ, \dots$ согласно [(1.9)] удовлетворяют обобщенному закону Гука

$$X_{x'}^\circ = \lambda \bar{\theta}^\circ + 2G e_{xx}^\circ, \quad X_{y'}^\circ = G e_{xy}^\circ \quad (xyz)$$

Относительно величин $X_{x'}^\circ, X_{y'}^\circ, \dots$ удовлетворяются уравнения равновесия и граничные условия с нулевыми внешними силами. Отсюда следует, что $X_{x'}^\circ, \dots$ и e_{xx}°, \dots суть соответственно компоненты напряжений и деформаций, существующих в упругом теле при отсутствии внешних сил. Но в этом случае все компоненты напряжений и деформаций тождественно равны нулю, поэтому $X_{x'}^\circ = X_{x'}, X_{y'}^\circ = X_{y'}, \dots, e_{xx}^\circ = e_{xx}, \dots$. Дальнейшее нагружение будет описываться так же, как если бы не было разгрузки.

Пусть теперь в процессе разгрузки появились области пластических деформаций. Будем считать, что остаточные напряжения и деформации известны как в области упругой разгрузки, так и в области вторичных пластических деформаций.

Будем нагружать тело системой сил того же знака, что и силы, действовавшие на тело перед началом разгрузки. Поскольку при повторном нагружении до перехода за предел упругости нагружение характеризуется той же самой зависимостью между σ_i' и e_i' , что и при упругой разгрузке, то в области упругой разгрузки имеют место следующие уравнения:

$$X_{x'}' - X_x = \lambda (\theta' - \bar{\theta}) + 2G (e_{xx}' - e_{xx}), \quad X_{y'}' - X_{y'} = G (e_{xy}' - e_{xy}) \quad (xyz) \quad (1.10)$$

Учитывая, что компоненты напряжений и деформаций перед началом разгрузки и соответствующие остаточные напряжения и деформации удовлетворяют уравнениям (1.9), получим

$$X_{x'}' - \tilde{X}_x = \bar{\lambda} (\theta' - \bar{\theta}) + 2G (e_{xx}' - \tilde{e}_{xx}), \quad X_{y'}' - X_{y'} = \bar{G} (e_{xy}' - \tilde{e}_{xy}) \quad (1.11)$$

где величины с волной сверху — остаточные напряжения и деформации в области упругой разгрузки.

Для построения уравнений, связывающих при повторном нагружении напряжения и деформации в области вторичных пластических деформаций, заметим, что если за некоторое начальное состояние в данном элементе тела принять то, в котором существуют лишь пластические слагаемые остаточных деформаций, то, используя пропорциональность тензора напряжений и тензора деформаций, компоненты которого равны разностям текущих компонент деформаций и пластических слагаемых остаточных деформаций, получим

$$X_{x'}' - \sigma' = \frac{2\sigma_i'}{3\bar{e}_i'} (\bar{e}_{xx}' - \bar{e}'), \quad X_{y'}' = \frac{\sigma_i'}{3\bar{e}_i'} \bar{e}_{xy}' \quad (xyz) \quad (1.12)$$

где, например, $\bar{e}_{xx}' = e_{xx}' - \tilde{e}_{xx}^{(p)}$, а \bar{e}_i' — интенсивность деформаций $\bar{e}_{xx}', \bar{e}_{xy}', \dots$. До перехода за предел упругости $\sigma_s'', e_s''(p) = \tilde{e}_{xx}^{(p)}$ и т. д. и

$$\sigma_i' = 3G(e_i' - \tilde{e}_i^{(p)}) = 3G(e_i' - e_i^{(p)}) = 3Ge_i^{(e)}$$

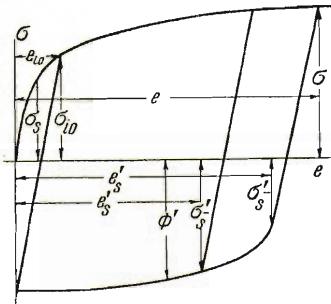
При этом уравнения (1.12) можно представить в следующем виде:

$$X_x' - \sigma' = 2G [e_{xx}' - \tilde{e}_{xx} + \tilde{e}_{xx}^{(e)} - e'], \quad X_y' = G [e_{xy}' - \tilde{e}_{xy} + \tilde{e}_{xy}^{(e)}] \quad (xyz) \quad (1.13)$$

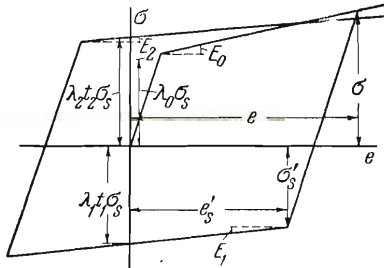
Принимая во внимание

$$\sigma' = 3Ke', \quad \tilde{e}_{xx}^{(e)} = \frac{1}{E} [\bar{X}_x - \nu (\bar{Y}_y + \bar{Z}_z)], \quad \tilde{e}_{xy}^{(e)} = \frac{1}{G} \bar{X}_{xy} \quad (xyz)$$

и учитывая соотношения между константами E, K, G, ν , получим, что уравнения (1.13) преобразуются к виду (1.11).



Фиг. 2



Фиг. 3

Таким образом, при нагружении до появления пластических деформаций во всех точках тела зависимость между напряжениями и деформациями определяется уравнениями (1.11).

В области упругой разгрузки пластические деформации появляются при условии, если $\sigma_i' = \sigma_s'' = \sigma_i$ и $e_i' = e_s'' = e_i$. После перехода за предел упругости между величинами σ_i' и e_i' справедливо соотношение

$$\sigma_i' = \Phi(e_i') \quad (1.14)$$

причем функция Φ характеризует свойство материала в его исходном состоянии.

В области вторичных пластических деформаций параметры σ_s'' и e_s'' , характеризующие предел упругости при повторном нагружении, удовлетворяют уравнению

$$\sigma_s'' = \Phi''(e_s'') \quad (1.15)$$

Функция Φ'' может быть определена из экспериментов на многократные нагружения. Для определения σ_s'' и e_s'' в этом случае к уравнению (1.15) следует добавить очевидное соотношение

$$\sigma_s'' + \tilde{\sigma}_i = 3G(e_s'' - \tilde{e}_i) \quad (1.16)$$

где $\tilde{\sigma}_i$ и \tilde{e}_i — соответственно значения интенсивности остаточных напряжений и деформаций, причем $\tilde{\sigma}_i = \Phi'(e_i)$ (см. второй случай).

После перехода за предел упругости в области вторичных пластических деформаций величины σ_i' и e_i' удовлетворяют следующему уравнению (фиг. 3):

$$\sigma_i' = \Phi''(e_i') \quad (1.17)$$

Уравнения (1.12), (1.14) и (1.17) определяют связь между напряжениями и деформациями после появления пластических деформаций.

Второй случай. При нагружении тела системой циклических объемных и поверхностных сил до перехода за переменный предел¹ упругости σ_s' имеют место уравнения (1.9)

$$X'_x - X_x = \bar{\lambda}(\theta' - \theta) + 2G(e'_{xx} - e_{xx}), \quad X'_y - X_y = G(e'_{xy} - e_{xy}) \quad (xyz) \quad (1.18)$$

Дальнейшее нагружение приведет к появлению областей пластических деформаций, причем вне области пластических деформаций остаются справедливыми уравнения (1.18). Для составления соответствующих уравнений в области пластических деформаций заметим, что при действии циклически меняющихся сил процесс нагружения можно рассматривать как продолжающийся процесс предшествующей разгрузки. Иначе говоря, рассуждая так же, как это делалось при составлении уравнений разгрузки, получим, что в области пластических деформаций при повторном нагружении имеют место уравнения (1.7)

$$X'_x - \sigma' = \frac{2}{3} \frac{\sigma'_i}{e_i} (\bar{e}_{xx} - \bar{e}), \quad X'_y = \frac{1}{3} \frac{\sigma'_i}{e_i} \bar{e}_{xy} \quad (xyz) \quad (1.19)$$

На границе, отделяющей области упругих и пластических деформаций, уравнения (1.18) и (1.19) совпадают.

Между величинами σ'_i и e'_i существует зависимость $\sigma'_i = \Phi'(e'_i)$, определяемая лишь механическими свойствами материала в области пластических деформаций, причем вид функции Φ' согласно теории малых упруго-пластических деформаций не зависит от характера напряженного состояния.

В процессе нагружения пластические деформации появятся в тех точках тела, где $\sigma'_i = \sigma_s'$ и $e'_i = e'_s$ одновременно, причем

$$\sigma'_i = \Phi'(e'_s) \quad (1.20)$$

Для определения переменных величин σ_s' и e'_s следует к уравнению (1.20) добавить уравнение, связывающее величины σ_s' , e'_s , и значение интенсивности деформаций и напряжений перед началом разгрузки (фиг. 2)

$$\sigma'_s + \sigma_i = 3G(e_i - e'_s) \quad (e_i \geq e_{i0}), \quad \sigma'_s + \sigma_i = 3G(e_i + e'_s) \quad (e_i \leq e_{i0}) \quad (1.21)$$

причем e_{i0} удовлетворяет уравнению

$$3Ge_{i0} = \Phi'(0) + \Phi(e_{i0}) \quad (1.22)$$

Используя (1.3), (1.20) и (1.21), получим уравнение, определяющее σ_s' как функцию интенсивности деформаций σ_i , и уравнение, определяющее σ_s' как функцию σ_i :

$$3Ge'_s + \Phi'(e'_s) = 3Ge_i - \Phi(e_i) \quad (e_i \geq e_{i0}) \quad (1.23)$$

$$\Phi'(e'_s) - 3Ge'_s = 3Ge_i - \Phi(e_i) \quad (e_i < e_{i0})$$

$$\sigma'_s + \Phi_{-1}'(\sigma'_s) 3G = 3G\Phi_{-1}(\sigma_i) - \sigma_i \quad (\sigma_i \geq \sigma_{i0}) \quad (1.24)$$

$$\sigma'_s - \Phi_{-1}'(\sigma'_s) 3G = 3G\Phi_{-1}(\sigma_i) - \sigma_i \quad (\sigma_i < \sigma_{i0})$$

где $\sigma_{i0} = \Phi(e_{i0})$, а Φ_{-1} , Φ_{-1}' — функции, определяющие соответственно e_i и e'_i из уравнений (1.3) и (1.20). На границе областей упругих и пластических деформаций напряжения и деформации непрерывны, так как последние удовлетворяют одним и тем же исходным уравнениям, а на границе $\sigma'_i = \sigma_s' = \sigma_i$ и $e'_i = e'_s = \bar{e}_i$.

Следуя А. А. Ильюшину, представим функцию $\Phi(e_i)$ в следующем виде:

$$\sigma_i = \Phi(e_i) = 3Ge_i [1 - \omega(e_i)] \quad (\omega = 0 \text{ при } e_i \leq e_s) \quad (1.25)$$

¹ Предел упругости σ_s' будет постоянным для всего тела лишь в случае отсутствия упрочнения.

Так как

$$e_{xx}^{(p)} = \frac{\varphi}{3G} \left[X_x - \frac{1}{2} (Y_y + Z_z) \right], \quad e_{xy}^{(p)} = \frac{\varphi}{G} X_y \quad (1.26)$$

$$\varphi = \frac{3Ge_i - \sigma_i}{\sigma_i} = \frac{\omega}{1 - \omega} \quad (xy_2)$$

то, учитывая (1.2) и (1.25), получим

$$e_{xx}^{(p)} = \omega (e_{xx} - e), \quad e_{xy}^{(p)} = \omega e_{xy} \quad (xy_2) \quad (1.27)$$

При этом уравнения (1.19) приводятся к виду

$$X_x' - \sigma' = \frac{2}{3} \frac{\sigma_i'}{e_i} \left[e_{xx}' - \omega e_{xx} - (e' - \omega e) \right], \quad X_y' = \frac{\sigma_i'}{3e_i} \left[e_{xy}' - \omega e_{xy} \right] \quad (xy_2) \quad (1.28)$$

где

$$\bar{e}_i = \frac{\sqrt{3}}{3} \sqrt{\left[e_{xx}' - e_{yy}' - \omega (e_{xx} - e_{yy}) \right]^2 + \dots + \frac{3}{2} \left[e_{xy}' - \omega e_{xy} \right]^2 + \dots} \quad (1.29)$$

При $\omega = 0$, т. е. при наличии перед началом разгрузки лишь областей упругих деформаций, уравнения (1.28) переходят в обычные уравнения теории малых упруго-пластических деформаций для исходного материала.

Если в процессе разгрузки появились пластические деформации, то для определения остаточных напряжений и остаточных деформаций следует решить указанную выше задачу при нулевых внешних силах.

Дальнейшее нагружение системой циклических внешних сил (обратных по знаку тем силам, которые действовали на это тело перед началом разгрузки) приведет к увеличению областей пластических деформаций, появившихся в процессе разгрузки; для определения напряженного и деформированного состояния в этом случае справедливы уравнения (1.18) и (1.19).

Присоединяя к указанным выше уравнениям, связывающим напряжения и деформации, недостающие уравнения (уравнения равновесия, тождества Сен-Венана, граничные условия и т. д.), получим замкнутую систему исходных уравнений, позволяющую исследовать напряженное и деформированное состояние при повторных нагружениях.

§ 2. Подобные деформации. В ряде случаев, например, вследствие геометрических гипотез, накладываемых на деформации, имеют место следующие соотношения¹:

$$e_{xx} = \alpha e_{xx}^*(x, y, z), \quad e_{xy} = \alpha e_{xy}^*(x, y, z) \quad (xy_2) \quad (2.1)$$

причем множители, отмеченные звездочкой, зависят только от координат, а величина α характеризуется внешними силами и параметрами, определяющими свойства материала. Деформации, описываемые формулами (2.1), будем называть подобными деформациями. В случаях подобных деформаций естественно ожидать, что при разгрузке и последующем нагружении выполняются аналогичные соотношения

$$\tilde{e}_{xx} = \beta e_{xx}^*(x, y, z), \quad \tilde{e}_{xy} = \beta e_{xy}^*(x, y, z) \quad (xy_2) \quad (2.2)$$

$$e_{xx}' = \gamma e_{xx}^*(x, y, z), \quad e_{xy}' = \gamma e_{xy}^*(x, y, z) \quad (xy_2) \quad (2.3)$$

Для подобных деформаций уравнения, связывающие напряжения и деформации при повторных нагружениях, значительно упрощаются.

Рассмотрим, например, уравнения (1.28). Интенсивность деформаций \bar{e}_i на основании (1.29) представляется в этом случае в следующем виде:

$$\bar{e}_i = e_i^* \left| \gamma - \omega \alpha \right| = \left| e_i' - \omega e_i \right| \quad (2.4)$$

¹ Сюда относятся, например, случаи деформации толстостенного цилиндра без осевого удлинения, кручение стержня кругового сечения, чистый изгиб и т. п.

Уравнения (1.28) принимают следующий вид:

$$X_x' - \sigma' = \frac{2}{3} \frac{\sigma_i'}{e_i^*} (e_{xx}^* - e^*) \operatorname{sign}(\gamma - \omega\alpha) \quad (xyz) \quad (2.5)$$

$$X_y' = \frac{\sigma_i'}{3e_i^*} e_{xy}^* \operatorname{sign}(\gamma - \omega\alpha)$$

где

$$\operatorname{sign}(\gamma - \omega\alpha) = \frac{\gamma - \omega\alpha}{|\gamma - \omega\alpha|}$$

Заметим, что, например,

$$\frac{e_{xx}^* - e^*}{e_i^*} \operatorname{sign}(\gamma - \omega\alpha) = \frac{e_{xx}' - e'}{e_i'} \left(1 - \frac{\omega\alpha}{\gamma}\right) \frac{|\gamma|}{|\gamma - \omega\alpha|}$$

Но в рассматриваемом случае деформации при повторном нагружении имеют обратный знак по сравнению с знаком соответствующих деформаций перед началом разгрузки. Поэтому $\alpha/\gamma < 0$ и, следовательно, $1 - \omega\alpha/\gamma > 0$ ($\omega > 0$). В соответствии с этим, например,

$$\frac{e_{xx}^* - e^*}{e_i^*} \operatorname{sign}(\gamma - \omega\alpha) = \frac{e_{xx}' - e'}{e_i'} \quad (2.6)$$

Поэтому

$$X_x' - \sigma' = \frac{2\sigma_i'}{3e_i'} (e_{xx}' - e'), \quad X_x' = \frac{\sigma_i'}{3e_i'} e_{xy}' \quad (xyz) \quad (2.7)$$

Таким образом, в случае подобных деформаций уравнения, связывающие напряжения и деформации при повторном нагружении, имеют тот же вид, что и для исходного материала.

Используя этот вывод, можно доказать следующую теорему: если $\sigma_i'(e_i') \equiv \sigma_i(e_i)$, то при повторном нагружении тела системой сил обратного знака по сравнению с силами, деформировавшими тело перед началом разгрузки, появившиеся напряжения и деформации совпадают по модулю с соответствующими напряжениями и деформациями, существовавшими в теле перед началом разгрузки, но имеют обратный знак. В самом деле, уравнения равновесия и граничные условия представляются в этом случае в следующем виде:

$$\begin{aligned} -\frac{\partial X_x'}{\partial x} - \frac{\partial X_y'}{\partial y} - \frac{\partial X_z'}{\partial z} + \rho X &= 0 & (xyz) \\ -X_x'l - X_y'm - X_z'n &= X_v & (xyz, lmn) \end{aligned} \quad (2.8)$$

Учитывая (2.7), условие $\sigma_i'(e_i') \equiv \sigma_i(e_i)$, уравнение $\sigma' = 3Ke'$ и сравнивая уравнения (2.8) с соответствующими уравнениями при первом нагружении, заключаем, что $X_x' = -X_x$, $X_y' = -X_y$, ..., $e_{xx}' = -e_{xx}$, ...

§ 3. Случай линейного упрочнения. Имеем

$$\sigma_i' = \lambda_0 \sigma_s + 3(1 - \lambda_0) Ge_i \quad (3.1)$$

При повторном нагружении свойство материала будем характеризовать двумя другими параметрами: t_1 и λ_1 (фиг. 3)

$$\sigma_1 = \lambda_1 t_1 \sigma_s \mp 3(1 - \lambda_1) Ge_i'$$

причем имеет место верхний знак, если в данной области тела величина e_i' уменьшается, и нижний знак, если e_i' возрастает. Очевидно, что

$$\sigma_s' = t_1 \lambda_1 \sigma_s - 3(1 - \lambda_1) Ge_s' \quad (e_i \geq e_{i0}), \quad \sigma_s' = t_1 \lambda_1 \sigma_s + 3(1 - \lambda_1) Ge_s' \quad (e_i < e_{i0}) \quad (3.2)$$

где в соответствии с формулой (1.22)

$$e_{i0} = \left(\frac{t_1}{\alpha_1} + 1\right) e_s \quad \left(\alpha_1 = \frac{\lambda_0}{\lambda_1}\right) \quad (3.3)$$

Учитывая (3.1), (3.2) и (1.21), получим

$$e_s' = \alpha_1 e_i - (t_1 + \alpha_1) e_s \quad (e_i \geq e_{i0}), \quad e_s' = -\alpha_1 e_i + (t_1 + \alpha_1) e_s \quad (e_i < e_{i0}) \quad (3.4)$$

$$\sigma_s' = (t_1 + \beta_1) \sigma_s - \beta_1 \sigma_i, \quad \beta_1 = \frac{\lambda_0}{\lambda_1} \frac{1 - \lambda_1}{1 - \lambda_0} \quad (3.5)$$

Аналогично можно показать, что при n -м цикле

$$e_s^{(n)} = \alpha_n e_i^{(n-1)} - (t_n + \alpha_n t_{n-1}) e_s \quad (e_i^{(n-1)} \geq e_{i0}^{(n-1)})$$

$$e_s^{(n)} = -\alpha_n e_i^{(n-1)} + (t_n + \alpha_n t_{n-1}) e_s \quad (e_i^{(n-1)} < e_{i0}^{(n-1)}) \quad (3.6)$$

$$\sigma_s^{(n)} = (t_n + \beta_n t_{n-1}) \sigma_s - \beta_n \sigma_i^{(n-1)} \quad (3.7)$$

где

$$e_{i0}^{(n-1)} = \left(\frac{t_n}{\alpha_n} + t_{(n-1)} \right) e_s, \quad \alpha_n = \frac{\lambda_{n-1}}{\lambda_n}, \quad \beta_n = \frac{\lambda_{n-1}}{\lambda_n} \frac{1 - \lambda_n}{1 - \lambda_{n-1}} \quad (3.8)$$

§ 4. Многократный упруго-пластический изгиб бруса. Рассмотрим вопрос о зависимостях изгибающих моментов M_n от соответствующих кривизн κ_n осевой линии бруса при его чистом упруго-пластическом изгибе. Для простоты будем предполагать, что сечение бруса прямоугольное и материал обладает линейным упрочнением. Будем также считать, что изгибающие моменты изменяются от некоторого положительного значения до нуля и затем принимают отрицательные значения.

Если ввести безразмерные параметры

$$K_n = \frac{M_n h}{2\sigma_s I}, \quad k_n = \frac{\kappa_n h}{2e_s} \quad \left(I = \frac{bh^3}{12} \right) \quad (4.1)$$

где h — высота сечения бруса, b — его ширина, то, как известно, при чистом упруго-пластическом изгибе бруса из его естественного состояния справедливо следующее соотношение:

$$K_0(k_0) = k_0 - \lambda_0 \left(k_0 - \frac{3}{2} + \frac{1}{2k_0^2} \right) \quad (k_0 \geq 1), \quad K_0(k_0) = k_1 \quad (k_0 < 1) \quad (4.2)$$

При этом предполагается, что деформация e волокна, отстоящего на расстоянии y от нейтрального слоя, равна $e = \kappa y$.

После полного удаления момента в брус сохраняется остаточная кривизна $\tilde{\kappa}_0$, причем

$$\tilde{\kappa}_0 = \frac{\tilde{\kappa}_0 h}{2e_s} = \lambda_0 \left(k_0 - \frac{3}{2} + \frac{1}{2k_0^2} \right) \quad (4.3)$$

Решение задачи об изгибе отрицательным моментом M_1 бруса, имеющего остаточную относительную кривизну (4.3), при $\lambda_1 = \lambda_0$ и $t_1 = 1$ приведено в нашей заметке [2].

Здесь будем считать, что в процессе нагружения согласно (3.4) материал переходит за предел упругости при

$$e_1 = e_{s1} = \alpha_1 e_0 - (t_1 + \alpha_1) e_s \quad (4.4)$$

При этом величина y_{s1} , определяющая границу области упругих и пластических деформаций, равна

$$y_{s1} = \frac{(t_1 + \alpha_1) h}{2(\alpha_1 k_0 - k_1)} \quad (4.5)$$

Заметим, что в формуле (4.5) k_1 изменяется от значения $\tilde{k}_0 > 0$ до нуля и затем принимает отрицательные значения. Пластические деформации на верхней и нижней гранях бруса появятся при $y_{s1} \leq 1/2 h$ или

$$k_1 \leq k_{s1} = \alpha_1 k_0 - (t_1 + \alpha_1)$$

При $k_1 \geq k_{s1}$ нагружение характеризуется, как это нетрудно видеть, линейным уравнением

$$K_1 = k_1 - \lambda_0 \left(k_0 - \frac{3}{2} + \frac{1}{2k_0^2} \right) \tag{4.6}$$

Для получения зависимости $K_1(k_1)$ при $k_1 \leq k_{s1}$ следует воспользоваться условием равновесия

$$M_1 = 2b \int_0^{1/2 h} \sigma_1 y dy$$

имея в виду, что

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= E e_1, & y &\leq y_s \\ \sigma_1 &= E [e_1 - \lambda_0 (e_0 - e_s)], & y &\leq y_{s1} \\ \sigma_1 &= E [(1 - \lambda_1) e_1 - \lambda_1 t_1 e_s], & y &> y_{s1} \end{aligned} \tag{4.7}$$

Учтя обозначения (4.1), получим, что при $k_1 < k_{s1}$

$$K_1 = \frac{\lambda_1}{2} \frac{(t_1 + \alpha_1)^3}{(\alpha_1 k_0 - k_1)^2} - \frac{\lambda_0}{2k_0^2} + (1 - \lambda_1) k_1 - \frac{3}{2} \lambda_1 t_1 \tag{4.8}$$

После удаления момента K_1 брус сохранит относительную кривизну, величина которой может быть легко подсчитана:

$$\tilde{k}_1 = \lambda_1 \left[k_1 - \frac{t_1^2}{2k_1^2} + \frac{3}{2} t_1 \right] \tag{4.9}$$

При последующем нагружении бруса моментом $K_2 > 0$ в пределах $\tilde{k}_1 \leq k_2 \leq k_{s2}$ имеет место следующее соотношение:

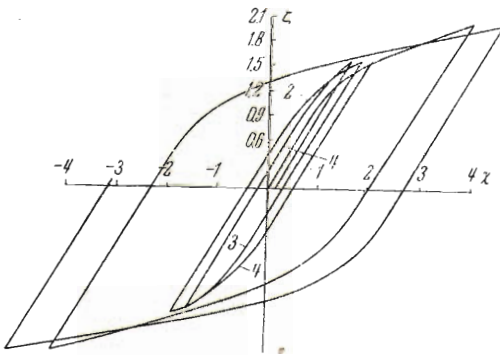
$$K_2 = k_2 - \lambda_1 \left(k_1 - \frac{t_1^2}{2k_1^2} + \frac{3}{2} t_1 \right) \tag{4.10}$$

Заметим, что значение \tilde{k}_1 может быть получено из уравнения (4.10) как величина, равная k_2 при $K_2 = 0$.

Уравнение, связывающее K_2 и k_2 при $k_2 > k_{s2}$, где

$$k_{s2} = \alpha_2 k_1 + t_2 + \alpha_2 t_1,$$

может быть получено по аналогии с уравнением (4.8):



Фиг. 4

$$K_2 = -\frac{\lambda_2}{2} \frac{(t_2 + \alpha_2 t_1)^3}{(\alpha_2 k_1 - k_2)^2} + \frac{t_1^3}{2} \frac{\lambda_1}{k_1^2} + (1 - \lambda_2) k_2 + \frac{3}{2} \lambda_2 t_2 \tag{4.11}$$

Аналогично при нагружении бруса после n -й разгрузки относительным моментом K_n упругие деформации появятся при $k_n \cong k_{sn}$, причем

$$k_{sn} = \alpha_n k_{n-1} + (-1)^n (t_n + \alpha_n t_{n-1})$$

При этом

$$\begin{aligned} K_n &= k_n - \lambda_{n-1} \left[k_{n-1} + (-1)^{n-1} \frac{1}{2} \frac{t_{n-1}^3}{k_{n-1}^2} + (-1)^n \frac{3}{2} t_{n-1} \right] & (k_n \cong k_{sn}) \\ K_n &= \frac{(-1)^{n-1} \lambda_n (t_n + \alpha_n t_{n-1})^3}{2 (\alpha_n k_{n-1} - k_n)^2} + (-1)^n \frac{t_{n-1}^3}{2} \frac{\lambda_{n-1}}{k_{n-1}^2} + (1 - \lambda_n) k_n + (-1)^n \frac{3}{2} \lambda_n t_n & (k_n \cong k_{sn}) \end{aligned} \tag{4.12}$$

В указанных выше формулах имеет место верхний знак при n нечетном и нижний знак при n четном.

Остаточная кривизна, сохранившаяся в бруске после $(n + 1)$ -й разгрузки, равна

$$\tilde{K}_n = \lambda_n \left[k_n + (-1)^n \frac{1}{2} \frac{t_n^3}{k_n^2} + (-1)^{n+1} \frac{3}{2} t_n \right] \quad (4.13)$$

Заметим, что формулы (4.12) можно было бы получать, если учесть, что

$$M_n = 2b \int_0^{1/2 h} y \sigma_n dy$$

причем

$$\sigma_n = E e_n \quad (y \leq \bar{y}_{s(n-1)}), \quad \sigma_n = E [e_n - \lambda_{n-1} (e_{n-1} + (-1)^n t_{n-1} e_s)] \quad (y \leq y_{sn})$$

$$\sigma_n = E [(-1)^n e_s t_n \lambda_n + (1 - \lambda_n) e_n] \quad (y > y_{sn})$$

где

$$\bar{y}_{s(n-1)} = \frac{(-1)^{n-1} t_{n-1} e_s}{\lambda_{n-1}} \quad (\bar{y}_{s0} = y_s), \quad y_{sn} = \frac{(-1)^{n-1} e_s (t_n + \alpha_n t_{n-1})}{\alpha_n x_{n-1} - x_n}$$

На фиг. 4 представлена графическая зависимость $K_n = \zeta$ от $k_n = \chi$ при следующих характеристиках материала:

$$\lambda_0 = 0.8, \lambda_1 = 0.84, \lambda_2 = 0.88, \lambda_3 = 0.92, \lambda_4 = 0.96, \lambda_5 = 1, t_n = t^n, t = 1.05$$

Из этих графиков следует, что если стержень изгибать последовательно моментами $M_n = \pm 1/4 \sigma_s b h^2 (k_2 = 2)$, то с увеличением числа циклов величина остаточных деформаций уменьшается и стремится к определенному пределу. При дальнейших нагружениях будет повторяться предельное состояние. Если же $M_n = \pm 0.413 \sigma_s b h^2 (k_0 = 4)$, то с увеличением числа циклов величина осевой деформации и остаточной осевой деформации растет. Аналогичные выводы имеют место и в случае упруго-пластического кручения стержня кругового сечения^[3].

§ 5. Повторное нагружение полого шара внутренним давлением. Будем считать материал шара несжимаемым и обладающим линейным упрочнением.

Пусть a и b соответственно внутренний и внешний радиусы шара, r_s — радиус сферы, отделяющий область вторичных пластических деформаций. В этом случае напряжения, деформации и соответствующие остаточные величины (при $\mu_1 = 1 - \lambda_0$, $t_1 = \lambda_0$) известны^[4]. В общем случае (фиг. 5)

$$\bar{e}_s = \frac{\lambda_0}{1 - \mu_1} e_i - \frac{\lambda_0 + t_1}{1 - \mu_1} e_s \quad (5.1)$$

$$\bar{\sigma}_s = \frac{\sigma_s}{1 - \mu_1} \left(t_1 + \frac{\mu_1 \lambda_0}{1 - \lambda_0} \right) - \frac{\mu_1 \lambda_0 \sigma_i}{(1 - \lambda_0)(1 - \mu_1)}$$

$$\bar{\sigma}_i = \bar{\sigma}_s + (\bar{e}_s - \bar{e}_i) (1 - \lambda_1) E \quad (5.2)$$

Используя уравнение равновесия, уравнения, связывающие напряжения и деформации и учитывая, что $e_i = 2C/r^3$ получим для остаточных напряжений:

1) при $r_s \leq r \leq b$

$$\bar{\sigma}_1 - \bar{\sigma}_3 = \lambda_0 \sigma_s + \frac{2\gamma}{r^3}, \quad \bar{\sigma}_3 = 2\lambda_0 \sigma_s \ln \frac{r}{b} - \frac{4}{3} \gamma \frac{b^3 - r^3}{b^3 r^3} \quad (5.3)$$

причем постоянная γ определяется из условий на сфере $r = r_s$

$$\gamma = E \left[\frac{\lambda_0 \mu_1}{1 - \mu_1} C - \frac{t_1 + \lambda_0 r_s^3}{1 - \mu_1} \frac{1}{2} e_s \right] \quad (5.4)$$

$$\frac{4}{3} (1 - \lambda_0) \frac{EC}{a^3} = \left(P - 2\lambda_0 \sigma_s \ln \frac{b}{a} \right) \frac{b^3}{b^3 - a^3} \quad (5.5)$$

2) при $a \leq r \leq r_s$

$$\bar{\sigma}_1 - \bar{\sigma}_3 = -n_1 \sigma_s + m_1 \frac{2E}{r^3}, \quad \bar{\sigma}_3 = -2n_1 \sigma_s \ln \frac{r}{a} + \frac{4}{3} m_1 E \frac{r^3 - a^3}{a^3 r^3} \quad (5.6)$$

где

$$n_1 = \frac{\lambda_0}{1 - \mu_1} (\mu_1 + \lambda_1 - 1) + \frac{\lambda_0 t_1 (1 - \lambda_1)}{(1 - \lambda_0)(1 - \mu_1)}$$

$$m_1 = \frac{\lambda_0 C (\mu_1 + \lambda_1 - 1)}{1 - \mu_1} + \tilde{C} (1 - \lambda_1)$$

При повторном нагружении давлением p' в соответствии с (4.11) при $r_s' \leq r \leq b$

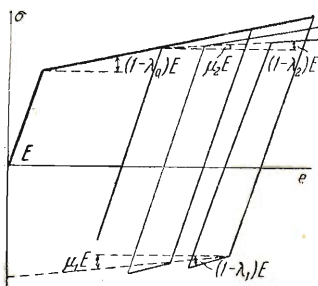
$$\sigma_1' - \sigma_3' = \lambda_0 \sigma_s + \frac{2\gamma}{r^3} + (C' - \tilde{C}) \frac{6G}{r^3} \quad \left(\tilde{C} = \frac{\gamma}{3G} + \lambda_0 C \right) \quad (5.7)$$

$$\sigma_3' = 2\lambda_0 \sigma_s \ln \frac{r}{b} - \frac{4}{3} \gamma \frac{b^3 - r^3}{b^3 r^3} - 4G (C' - \tilde{C}) \frac{b^3 - r^3}{b^3 r^3} \quad (5.8)$$

В области $r_s \leq r \leq r_s'$

$$\sigma_i' = \lambda_0 \sigma_s + 2(1 - \lambda_0) \frac{C'E}{r^3}$$

Поэтому (деформации шара в рассматриваемом случае принадлежат к типу подобных деформаций)



Фиг. 5

$$\sigma_3' = C_2 + 2\lambda_0 \sigma_s \ln r - (1 - \lambda_0) \frac{4}{3} \frac{C'}{r^3} E$$

Наконец в области $a \leq r \leq r_s$

$$\sigma_i' = \sigma_s' + (1 - \lambda_2) E (e_i' - e_s')$$

где в соответствии с фиг. 5

$$e_s' = \frac{\lambda_0}{1 - \mu_2} e_i + \varphi' e_s - \frac{\lambda_1 (t_1 + \lambda_0) e_s r_s^3}{(1 - \mu_1)(1 - \mu_2) r^3}$$

$$\sigma_s' = \frac{\mu_2 \lambda_0 E}{1 - \mu_2} e_i + \psi' \sigma_s - \frac{\lambda_1 (t_1 + \lambda_0) \mu_2 \sigma_s}{(1 - \mu_1)(1 - \mu_2)} \frac{r_s^3}{r^3}$$

Поэтому с учетом граничных условий

$$\sigma_3' = -p' + 2\sigma_s [\psi' - (1 - \lambda_2) \varphi'] \ln \frac{r}{a} + \frac{4}{3} \beta E \frac{r^3 - a^3}{r^3 a^3}$$

В вышеписанных формулах

$$\varphi' = \frac{1}{1 - \mu_2} (1 - \lambda_0 - \mu_2) \frac{b^3}{r_s^3} + \frac{\lambda_1 (\lambda_0 + t_1)}{(1 - \mu_1)(1 - \mu_2)}$$

$$\psi' = \frac{1}{1 - \mu_2} (1 - \lambda_0 - \mu_2) \frac{b^3}{r_s^3} + \frac{(\lambda_0 + t_1) \mu_2 \lambda_1}{(1 - \mu_1)(1 - \mu_2)} + \lambda_0$$

$$\beta = \frac{\lambda_0 C}{1 - \mu_2} (\mu_0 + \lambda_0 - 1) + (1 - \lambda_2) C' - \frac{\lambda_1 (t_1 + \lambda_0) r_s^3 e_s}{2(1 - \mu_1)(1 - \mu_2)}$$

Постоянную C' определим из условия $e_i' = e_s'$ при $r = r_s'$, а постоянную C_2 из условия сопряжения радиальных напряжений при $r = r_s$.

Поступила 12 VIII 1954

ЛИТЕРАТУРА

1. Ильюшин А. А. Пластичность, ч. 1. Гостехиздат, 1948.
2. Москвитин В. В. К вопросу об упруго-пластическом изгибе бруса. Вестник Московского университета, № 5, 1954.
3. Москвитин В. В. Упруго-пластическое кручение стержня с начальными напряжениями. Вестник Московского университета, № 6, 1954.
4. Москвитин В. В. О вторичных пластических деформациях. ПММ, т. XVI, в. 3, 1952.