

## ПОЛНАЯ ПЛАСТИЧНОСТЬ В ПРОЦЕССАХ ТЕЧЕНИЯ МЕЖДУ ЖЕСТКИМИ ПОВЕРХНОСТЯМИ, АНАЛОГИЯ С ПЕСЧАНОЙ НАСЫПЬЮ И НЕКОТОРЫЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

А. А. И л ь ю ш и н

(Москва)

**1. Полная пластичность и кинематическое условие.** В некоторых процессах обработки металлов давлением течение пластического вещества происходит в виде сравнительно тонкого слоя между двумя движущимися жесткими поверхностями рабочих органов машины, и получаемое изделие представляет собой лист или оболочку постоянной или переменной толщины с профилированными местными утолщениями или ребрами.

В работе [1] дана математическая постановка общей задачи течения пластического вещества по поверхностям и для указанных выше процессов, относящихся к первой основной задаче, получены упрощенные уравнения и ряд конкретных результатов. Основным результатом состоит в том, что в этих процессах внутренние касательные напряжения в слое оказываются малыми сравнительно с нормальными, причем два нормальных напряжения в поперечных сечениях слоя можно полагать в первом приближении равными между собой

$$\sigma_{12} \approx 0, \quad \sigma_1 \approx \sigma_2 \approx -q \quad (1.1)$$

а третье нормальное напряжение постоянно по толщине слоя, равно контактному удельному давлению слоя на инструмент и определяется из условия пластичности

$$-\sigma_3 = p \approx q + \sigma_s \quad (1.2)$$

Совокупность этих свойств можно назвать *условием полной пластичности*, которое до сих пор в виде гипотезы применялось лишь в осесимметричных задачах теории пластичности.

Другой общий результат работы [1] представляет собой *кинематическое условие*: поперечные скорости течения частиц, расположенных в элементарном нормальном столбике, высота которого равна толщине  $h$  слоя, мало отличаются между собой и могут считаться одинаковыми.

Из этих двух условий легко получить все необходимые уравнения для решения первой основной задачи, и потому при более популярном ее изложении условия полной пластичности и кинематическое можно считать естественными гипотезами.

**2. Поверхностное трение.** В работе [1] принят весьма общий закон контактного трения, но конкретные количественные результаты при решении первой основной задачи получены в случае закона Прандтля. Анализ закона трения с экспериментальной проверкой имеется в книге [2].

Будем теперь предполагать, что область течения слоя состоит из нескольких участков, причем на каждом участке касательное напряжение контактного трения можно представить в виде

$$T = k\tau(p), \quad T' = k'\tau'(p) \quad (2.1)$$

где  $T$  — напряжение трения на первой поверхности,  $\tau(p)$  — некоторая функция давления  $p$ ,  $k$  — функция координат,  $T'$ ,  $\tau'$ ,  $k'$  — аналогичные величины для второй поверхности, причем напряжение трения направлено против относительной скорости движения слоя по поверхности.

В области кулонова трения

$$k = 1, \quad \tau = \mu p, \quad p \leq \frac{\sigma_s}{2\mu} \quad (2.1_1)$$

в области прандтлева трения

$$k = 1, \quad \tau = \frac{1}{2}\sigma_s, \quad p \geq \frac{\sigma_s}{2\mu} \quad (2.1_2)$$

в области сцепления, например, обобщая гипотезу Унксова:

$$k = \frac{r}{h}, \quad \tau = \frac{1}{2}\sigma_s, \quad r \leq h \quad (2.1_3)$$

где  $r$  — кратчайшее расстояние от рассматриваемой точки до точки разветвления течения, и т. п.

**3. Основные уравнения течения слоя.** Примем одну из поверхностей за основную; обозначим через  $\alpha_1, \alpha_2$  криволинейные координаты по линиям главных кривизн поверхности, через  $ds_1, ds_2$  — дифференциалы длин дуг этих линий:

$$ds_1 = A_1 d\alpha_1, \quad ds_2 = A_2 d\alpha_2 \quad (3.1)$$

и  $R_1, R_2$  — главные радиусы кривизны основной поверхности,  $A_1, A_2, R_1, R_2$  — известные функции координат  $\alpha_1, \alpha_2$ .

Основную поверхность как геометрический образ будем считать неподвижной; физическая граница основного тела, ограниченная основной поверхностью, может двигаться относительно последней со скоростью  $\omega$  в точках  $\alpha_1, \alpha_2$ , причем проекции  $\omega$  по координатным линиям считаем известными функциями координат и времени:

$$\omega^2 = w_1^2 + w_2^2, \quad w_1 = w_1(\alpha_1, \alpha_2, t), \quad w_2 = w_2(\alpha_1, \alpha_2, t) \quad (3.2)$$

Такое движение тела относительно ограничивающей его поверхности называется внутренним движением. (Примером таких движений является вращение осесимметричного твердого тела относительно его оси).

Вторая поверхность, ограничивающая слой, вполне определяется, если в каждой точке  $(\alpha_1, \alpha_2)$  основной поверхности в момент времени  $t$  определить по нормали отрезок  $h(\alpha_1, \alpha_2, t)$ , равный расстоянию до второй поверхности; этот отрезок  $h$  называется толщиной пластического слоя в



т. е. толщина слоя изменяется плавно, то слагаемые, содержащие  $p-q$ , сравнительно с членами, содержащими  $T_1, T_2$ , будут весьма малы, что ясно из (1.2), (2.1) и (3.8). Области, где условие (3.8) не выполняется, мы будем рассматривать особо и относить к границам слоя.

Таким образом, учитывая (1.2), имеем следующие два уравнения движения элемента деформируемого слоя:

$$\frac{\partial p}{\partial s_1} = \frac{T_1}{h} - \rho g_1, \quad \frac{\partial p}{\partial s_2} = \frac{T_2}{h} - \rho g_2 \quad (3.9)$$

К ним необходимо добавить еще условие неизменяемости массы слоя. Пренебрегая, как обычно, изменением плотности вещества, имеем следующий баланс массы в рассматриваемом элементарном объеме.

За время  $dt$  высота его уменьшится на  $[-(\partial h / \partial t) dt]$  и потому масса увеличится на  $[-\rho(\partial h / \partial t) dt] ds_1 ds_2$ ; массы, вытекающие через грани, перпендикулярные к линии  $\alpha_1$  и к линии  $\alpha_2$ , будут соответственно равны

$$\frac{\partial}{\partial s_1} (\rho h ds_2 v_1 dt) ds_1, \quad \frac{\partial}{\partial s_2} (\rho h ds_1 v_2 dt) ds_2$$

Увеличение и расход массы должны быть равны; поэтому имеем

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{1}{A_2} \frac{\partial}{\partial s_1} (h A_2 v_1) + \frac{1}{A_1} \frac{\partial}{\partial s_2} (h A_1 v_2) = 0 \quad (3.10)$$

Три уравнения (3.9) и (3.10) представляют полную систему для решения задач и определяют три входящие в них функции: давление  $p$  и скорости  $v_1, v_2$ , если в условии пластичности (1.2)  $\sigma_s$  считается постоянной, т. е. не учитывается упрочнение металла и зависимость сопротивления от скорости деформации. В противном случае имеем еще для степени деформации (интенсивности деформации) выражение

$$\lambda = \ln \frac{h_0}{h} \quad (3.11)$$

где  $h_0$  — начальная толщина слоя того физического элемента, который в момент  $t$  имеет толщину  $h$ , и выражение для скорости деформации

$$\varepsilon_i = \frac{d\lambda}{dt} = \frac{\partial \lambda}{\partial t} + v_1 \frac{\partial \lambda}{\partial s_1} + v_2 \frac{\partial \lambda}{\partial s_2} \quad (3.12)$$

При этом  $\sigma_s$  считается известной функцией  $\lambda$  и  $\varepsilon_i$  из предварительных испытаний металла:

$$\sigma_s = \sigma_s(\lambda, \varepsilon_i) \quad (3.13)$$

**4. Случай, когда внутренние движения обоих жестких тел одинаковы; аналогия с песчаной насыпью.** Если движения физических поверхностей тел относительно основной поверхности одинаковы, т. е.

$$w_1' = w_1, \quad w_2' = w_2 \quad (4.1)$$

$$\Delta v' = \Delta v = \sqrt{(v_1 - w_1)^2 + (v_2 - w_2)^2}$$

и условия поверхностного трения в соответствующих точках на них также одинаковы ( $k' = k, \tau' = \tau$ ), основные уравнения упрощаются. Если пре-

небрежь еще инерционными силами, что возможно, поскольку обычно выполняется условие

$$v^2 \ll \frac{\sigma_s}{\rho} \quad (4.2)$$

уравнения (3.9) согласно (2.1) и (3.7) примут следующий вид:

$$\frac{\partial p}{\partial s_1} = -\frac{2k\tau(p)}{h} \cos \theta, \quad \frac{\partial p}{\partial s_2} = -\frac{2k\tau(p)}{h} \sin \theta \quad (4.3)$$

где  $\theta$  — угол между вектором относительной скорости движения вещества слоя по основной физической поверхности и координатной линией  $\alpha_1$ :

$$\cos \theta = \frac{v_1 - w_1}{\Delta v}, \quad \sin \theta = \frac{v_2 - w_2}{\Delta v} \quad (4.4)$$

Возводя в квадрат левые и правые части (4.3) и складывая полученные уравнения, найдем уравнение, определяющее контактное давление  $p$ :

$$\left(\frac{\partial p}{\partial s_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial p}{\partial s_2}\right)^2 = \frac{4k^2\tau^2(p)}{h^2} \quad (4.5)$$

Для определения скоростей течения  $v_1$ ,  $v_2$  из (4.3) и (4.4) имеем уравнение

$$(v_1 - w_1) \frac{\partial p}{\partial s_2} = (v_2 - w_2) \frac{\partial p}{\partial s_1} \quad (4.6)$$

и условие несжимаемости (3.10). Из (4.3) следует, что вектор относительной скорости течения  $\mathbf{v} - \mathbf{w}$  имеет направление, обратное вектору-градиенту давления  $p$ , т. е. направлен по линиям, ортогональным линиям уровня  $p = \text{const}$ .

Введем функцию давления  $P(p)$ , которую для краткости назовем обобщенным давлением:

$$P(p) = \int \frac{dp}{2\tau(p)} \quad (4.7)$$

и которая вполне определяется, коль скоро известен закон контактного трения. Например, в области кулонова трения (2.1<sub>1</sub>)

$$P = \frac{1}{2\mu} \ln \frac{p}{\sigma_s}, \quad \frac{\sigma_s}{2\mu} \geq p \geq \sigma_s \quad (4.7_1)$$

и в области прандтлевского трения (2.1<sub>2</sub>)

$$P = \frac{1}{2\mu} \left( \ln \frac{1}{2\mu} - 1 \right) + \frac{p}{\sigma_s}, \quad p \geq \frac{\sigma_s}{2\mu} \quad (4.7_2)$$

Функция  $P(p)$  непрерывна и имеет непрерывную производную по  $p$ , если  $\tau(p)$  непрерывна.

Из уравнений (4.3), принимающих теперь вид:

$$\frac{h}{k} \frac{\partial P}{\partial s_1} = -\cos [(\mathbf{v} - \mathbf{w}), \mathbf{s}_1^0], \quad \frac{h}{k} \frac{\partial P}{\partial s_2} = -\cos [(\mathbf{v} - \mathbf{w}), \mathbf{s}_2^0] \quad (4.8_1)$$

или в векторной форме

$$\frac{h}{k} \text{grad } P = -(\mathbf{v} - \mathbf{w})^0 \quad (4.8)$$

где  $\mathbf{s}_1^0$ ,  $\mathbf{s}_2^0$  — единичные векторы по координатным линиям  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$  и



$(\mathbf{v} - \mathbf{w})^\circ$  — единичный вектор относительной скорости скольжения слоя по поверхности, следует, что вектор относительной скорости  $\mathbf{v} - \mathbf{w}$  направлен по нормали к линиям уровня  $P = \text{const}$  на основной поверхности и потому линии тока ортогональны к линиям уровня траектории на поверхности.

Уравнение (4.5) преобразуется к виду

$$\left(\frac{\partial P}{\partial s_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial P}{\partial s_2}\right)^2 = \frac{k^2}{h^2} \quad (4.9)$$

Область течения на основной поверхности имеет определенную границу, к которой мы отнесли также места резкого изменения толщины слоя, пазы или резкие возвышения на рабочей поверхности. Обозначим эту границу буквой  $\Gamma$  и будем считать, что на ней заданы определенные условия. Приведем такие примеры граничных условий:

а) участок границы является непроницаемым, т. е. относительная скорость скольжения слоя направлена по касательной к границе; если  $\mathbf{v}$  — вектор нормали к  $\Gamma$ , лежащий в касательной плоскости к основной поверхности, то при этом  $(\mathbf{v} - \mathbf{w})\mathbf{v} = 0$  и потому из (4.8<sub>1</sub>) следует

$$\frac{\partial P}{\partial \mathbf{v}} = 0 \quad \text{на } \Gamma \quad (4.10_1)$$

б) граница является свободной от нагрузок, т. е. на  $\Gamma$  поперечное давление  $q = 0$ ; из (1.2) следует  $p = \sigma_s$  и из (4.7)<sub>1</sub>

$$P = 0 \quad \text{на } \Gamma \quad (4.10_2)$$

в) граница является пазом или отверстием в основной или второй рабочей поверхности, так что в него может свободно втекать металл слоя; если ширина паза или поперечный наименьший размер отверстия порядка или меньше толщины слоя  $h$ , то приближенным условием свободного втекания будет равенство пределу текучести поперечного давления ( $q = \sigma_s$ )<sup>1</sup>; из (1.2)  $p = 2\sigma_s$  и потому из (4.7)

$$P = \int_{\sigma_s}^{2\sigma_s} \frac{dp}{2\tau(p)} = \text{const} \quad \text{на } \Gamma \quad (4.10_3)$$

г) если в предыдущем случае втекание в паз или отверстие является затрудненным, давление  $q$  является известной функцией длины дуги  $s$  контура  $\Gamma$  и потому из (1.2) и (4.7) будем иметь

$$P = P(s) \quad \text{на } \Gamma \quad (4.10_4)$$

и т. п.

Уравнение (4.9) и условия типа (4.10) указывают на существование аналогии между эпурой обобщенного давления  $P$  в области течения и эпурой песчаной насыпи. Предположим, что сила «тяжести» (притяжения песчинок) действует по нормали к некоторой непроницаемой поверхности основания, совпадающей с нашей основной поверхностью; при-

<sup>1</sup> Из решения задачи Прандтля можно взять более точное значение  $p$ , что отмечалось в работе [1].

мером здесь может быть не только горизонтальная плоскость, но и вращающийся параболоид вращения, вращающийся цилиндр и некоторые другие. Границу песчаной насыпи будем считать совпадающей с границей течения и граничное условие — соответствующим; например, в случае (4.10<sub>2</sub>) это будет край поверхности, с которого песок свободно сыпается, и потому ордината насыпи равна нулю; в случае (4.10<sub>3</sub>) или (4.10<sub>4</sub>) это будет перегородка определенной высоты, в случае (4.10<sub>1</sub>) — перегородка достаточной высоты, не позволяющая песку пересыпаться через нее, и т. п.

Если теперь на поверхность, ограниченную контуром  $\Gamma$ , свободно насыпем песок, коэффициент трения которого будет  $f$ , то образуется насыпь определенной формы, определяемой ординатой (высотой)  $z$ , отсчитываемой в точке  $\alpha_1, \alpha_2$  по нормали к поверхности. Уравнение, определяющее  $z$ , будет

$$\left(\frac{\partial z}{\partial s_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial s_2}\right)^2 = f^2 \tag{4.11}$$

При надлежащем выборе размеров перегородок по краю  $\Gamma$  мы при определении  $z$  получаем задачу, с точностью до масштаба определяющую обобщенное давление  $P$  в области пластического течения.

Из сравнения (4.9) и (4.11) имеем

$$\frac{P}{z} = \frac{k/h}{f} \quad \text{или} \quad P = \frac{kz}{fh} \tag{4.12}$$

причем в случае слоя переменной толщины  $h$  или переменной  $k$ , вообще в случае, если  $k/h$  переменна в области течения, коэффициент трения песка  $f$  должен быть переменным, так что  $k/hf = \text{const}$ .

Высота граничных перегородок песчаной насыпи должна быть подобрана так, чтобы

$$z = f \frac{h}{k} P \quad \text{на } \Gamma \tag{4.13}$$

где  $P$  берется согласно (4.10).

Таким образом, формула (4.12) позволяет найти обобщенное давление  $P$  в задаче течения слоя на основании опыта с песчаной насыпью. После этого формула (4.7) позволяет найти истинное контактное давление слоя на рабочие органы машины.

Линии уровня  $P = \text{const}$ , определяемые из песчаной аналогии (они совпадают с  $z = \text{const}$ ), можно изобразить на модели основной рабочей поверхности, и тогда, проводя к ним ортогональные траектории, получим линии тока. После этого легко находится распределение скоростей течения в слое. Действительно, пусть уравнения (или графическое изображение) семейств линий уровня и линий тока известны (фиг. 2):

$$r = r(\alpha_1, \alpha_2) = \text{const}, \quad \psi = \psi(\alpha_1, \alpha_2) = \text{const} \tag{4.14}$$

так что дифференциалы дуг даны:

$$ds_r = B_1 dr, \quad ds_\psi = B_2 d\psi$$

Пусть внутренние движения поверхностей рабочих инструментов отсутствуют ( $w = 0$ ), так что по линиям тока направлен вектор скорости

слоя  $v$ . Переписывая условие несжимаемости (3.10) в координатах  $r, \psi$ , получим

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{1}{B_2 B_1} \frac{\partial}{\partial r} (B_2 h v) = 0$$

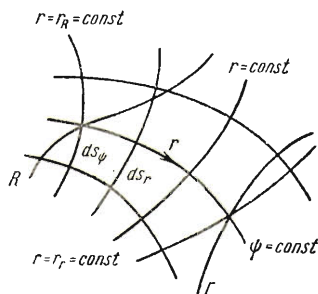
Отсюда

$$v = \frac{c}{B_2 h} - \frac{1}{B_2 h} \int B_2 B_1 \frac{\partial h}{\partial t} dr \quad (4.15_1)$$

Наибольшие давления в области течения будут возникать на линиях, соответствующих ребрам насыпи в песчаной аналогии, причем нормальная проекция ребра на основную поверхность нам известна (обозначим ее  $k$ ). В задаче течения это будет линия разветвления потока, т. е. линия нулевой скорости. Поэтому константа (для данной линии тока)  $c$  в (4.15<sub>1</sub>)

определяется из условия  $v = 0$  при  $r = r_k$ , где  $r_k$  — значение  $r$  в точке пересечения рассматриваемой линии тока с ребром  $k$ . Таким образом, скорость течения слоя  $v$  в каждой точке любой линии тока  $\psi = \text{const}$  вполне определена:

$$v = - \frac{1}{B_2 h} \int_{r_k}^r B_2 B_1 \frac{\partial h}{\partial t} dr \quad (4.15)$$



Фиг. 2

в том числе известна и скорость вытекания слоя через границу  $\Gamma$  (при  $r = r_1$ ). Тем самым задача течения слоя полностью решается на основании песчаной аналогии.

**5. Прессование пластин или слабо искривленных оболочек постоянной толщины с полигональными ребрами.** Если обе рабочие поверхности инструмента, действующие на слой, являются плоскостями или слабо искривленными поверхностями и расстояние между ними (толщина слоя  $h$ ) не зависит от координат, а только от времени, то в качестве координатных линий можно взять декартовы координаты  $x, y$ :

$$A_1 = A_2 = 1, \quad ds_1 = dx, \quad ds_2 = dy, \quad \alpha_1 = x, \quad \alpha_2 = y$$

Считая величину  $k$  в законе трения (2.1), а значит, и в уравнении (4.9) постоянной ( $k = 1$ ), получаем

$$\left(\frac{\partial P}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial P}{\partial y}\right)^2 = \frac{1}{h^2} = \text{const} \quad (5.1)$$

Введем вместо  $x, y$  криволинейные координаты  $r$  и  $\psi$ , определяемые следующими уравнениями:

$$x = \pm [r - \varphi(\psi)] \sqrt{1 - \varphi'^2(\psi)}, \quad y = \psi + [r - \varphi(\psi)] \varphi'(\psi) \quad (5.2)$$

Легко видеть, что  $r, \psi$  — ортогональные координаты:

$$dx^2 + dy^2 = dr^2 + [1 - \varphi'^2 + (r - \varphi) \varphi'']^2 \frac{d\psi^2}{1 - \varphi'^2}$$



так что

$$B_1 = \pm 1, \quad B_2 = \pm \frac{1 - \varphi'^2 + (r - \varphi) \varphi''}{\sqrt{1 - \varphi'^2}} \quad (5.3)$$

причем линии  $\psi = \text{const}$  будут прямыми. Уравнение (5.1) после преобразования к координатам  $r$  и  $\psi$  принимает вид:

$$\left(\frac{\partial P}{\partial r}\right)^2 + \frac{1 - \varphi'^2}{[1 - \varphi'^2 + (r - \varphi) \varphi'']^2} \left(\frac{\partial P}{\partial \psi}\right)^2 = \frac{1}{h^2} \quad (5.4)$$

Его общий интеграл, вследствие произвольности функции  $\varphi(\psi)$ , имеет вид:

$$\pm hP = r + C \quad (5.5)$$

т. е. линии  $r = \text{const}$  суть линии уровня, а, значит, линии  $\psi = \text{const}$  — линии тока. Поскольку линии тока прямолинейны и координата  $r$  — просто длина линии тока, отсчитываемая от какой-нибудь точки, из (5.5) следует, что эпюра обобщенного давления  $P$  есть линейчатая поверхность и эта поверхность может быть легко построена на основании граничных условий.

Скорость течения слоя на основании (4.15) и (5.3) выражается формулой

$$v = \mp \frac{1}{B_2 h} \frac{dh}{dt} \int_{r_k}^r B_2 dr \quad (5.6)$$

Будем теперь  $r$  отсчитывать от точки пересечения двух соседних линий тока, угол между которыми обозначим  $d\theta$ , так что

$$B_2 d\psi = r d\theta$$

Поскольку  $d\psi$ , как и  $d\theta$ , остаются постоянными при интегрировании (5.6), то в (5.6)  $B_2$  можно заменить на  $r$  и получится формула для скорости течения, выведенная ранее [1]:

$$v = \pm \frac{1}{2} \frac{d\lambda}{dt} \left( r - \frac{r_k^2}{r} \right) \quad (5.7)$$

Задача построения линий тока решается так. Пусть на участке  $\Gamma_1$  контура  $\Gamma$  (или на всем  $\Gamma$ ) давление  $P$  задано как функция дуги контура  $s$ :

$$P = P_\Gamma(s) \quad \text{на } \Gamma \quad (5.8)$$

причем, конечно,

$$\left(\frac{dP_\Gamma}{ds}\right)^2 \leq \frac{1}{h^2}$$

и потому можно считать известной функцией дуги  $s$  угол  $\omega(s)$ , определяемый по формуле

$$\cos \omega = h \frac{dP_\Gamma}{ds} \quad (5.9)$$

Косинус угла между линией тока  $r$  и касательной к контуру определяется равенством

$$\cos \vartheta = \cos(r, s) = \frac{dP_\Gamma / ds}{dP / dr}$$

т. е. согласно (5.5) и (5.9) равен  $\pm \cos \omega$ , и потому  $\omega$  есть угол наклона луча  $r$  к дуге  $s$ , если  $dP/dr > 0$ , или дополнительный к  $\pi$  угол, если  $dP/dr < 0$ ,

В частности, если  $P_r = \text{const}$  на  $\Gamma_1$ , то линии тока совпадают с системой радиусов кривизны линии контура. Секундный объемный расход массы через границу слоя, отнесенный к единице длины контура, будет на основании (5.7)

$$1 \cdot hv_r = \pm \frac{1}{2} \frac{dh}{dt} \frac{R^2 - r_k^2}{R} = \pm \frac{dh}{dt} F_{kr} \quad (5.10)$$

где  $R$  — радиус кривизны контура и  $F_{kr}$  — площадь, заключенная между двумя соседними линиями тока, опирающимися на концы отрезка дуги контура  $\Gamma$  длиной 1, ребром  $k$  и контуром  $\Gamma$ . Поскольку сетка линий тока уже построена, на основании (5.10) геометрически вполне ясно распределение по длине контура потока массы через единицу длины контура: расход пропорционален площади между соседними линиями тока, ребром  $k$  и контуром  $\Gamma$ .

Распределение обобщенного давления по площади  $F_{kr}$  согласно (5.5) и (5.8) будет

$$P = P_r \pm \frac{r_r - r}{h} \quad (5.11)$$

и в случае  $P_r = \text{const}$  на рассматриваемом участке  $\Gamma$

$$P = P_r \pm \frac{R - r}{h} \quad (5.11_1)$$

причем верхний знак относится к случаю возрастания давления внутрь области при выпуклом контуре, нижний — к убыванию. Истинное давление  $p$  находится из (4.7), и в случае, если есть только два участка — кулонова трения и прандтлева скольжения, — из (4.7<sub>1</sub>) и (4.7<sub>2</sub>).

Пусть при  $P_r = \text{const}$  на контуре  $\Gamma$  давление возрастает внутрь области. Обозначая

$$\xi = |R - r| \quad (5.12)$$

имеем

$$P = P_r + \xi/h \quad (5.13)$$

Область кулонова трения будет существовать и примыкать к контуру  $\Gamma$ , если на контуре истинное давление

$$p_r < p_s \equiv \frac{\sigma_s}{2\mu} \quad (5.14)$$

Согласно (4.7<sub>1</sub>) распределение давления в этой области и размер  $\xi_s$  этой области определяются формулами

$$P_r = \frac{1}{2\mu} \ln \frac{P_r}{\sigma_s}, \quad P_s = \frac{1}{2\mu} \ln \frac{1}{2\mu} \quad (5.15)$$

$$p = p_r e^{2\mu\xi/h} \leq p_s, \quad \xi \leq \xi_s = \frac{h}{2\mu} \ln \frac{\sigma_s}{2\mu P_r}$$

В области прандтлева трения согласно (4.7<sub>2</sub>), (5.13) и (5.15)

$$p = \sigma_s \left( \frac{\xi - \xi_s}{h} + \frac{1}{2\mu} \right) \geq p_s, \quad \xi \geq \xi_s \quad (5.16)$$

Подсчитаем результирующее давление, приходящееся на площадь  $F_{k\Gamma}$  полоски, заключенной между соседними линиями тока, опирающимися на концы отрезка дуги контура длиной  $1$  и на ребро  $k$ . Ширина такой полоски на расстоянии  $\xi$  от контура будет

$$\Delta\xi = \Delta_\Gamma \left( 1 - \frac{\xi}{R} \right), \quad \Delta_\Gamma = 1 \quad (5.17)$$

если участок контура  $\Gamma$  выпуклый. Результирующее давление  $Q_1$  равно

$$Q_1 = \int_{\xi_0}^{\xi_k} p \Delta_\xi d\xi = \int_0^{\xi_s} (p)_{\xi < \xi_s} \Delta_\xi d\xi + \int_{\xi_s}^{\xi_k} (p)_{\xi > \xi_s} \Delta_\xi ds$$

где  $\xi_k$  — расстояние от контура до ребра  $k$ :

$$\xi_k = R - r_k$$

На основании (5.15), (5.16) получаем

$$Q_1 = \sigma_s \frac{h}{4\mu^2} \left( 1 + \frac{h}{2\mu R} - \frac{\xi_s}{R} \right) - p_\Gamma \frac{h}{2\mu} \left( 1 + \frac{h}{2\mu R} \right) + \sigma_s (\xi_k - \xi_s) \left[ \frac{1}{2\mu} \left( 1 - \frac{\xi_s}{R} \right) + \left( 1 - \frac{h}{2\mu R} - \frac{\xi_s}{R} \right) \frac{\xi_k - \xi_s}{2h} - \frac{(\xi_k - \xi_s)^2}{3hR} \right] \quad (5.18)$$

Рассмотрим несколько примеров свободного прессования ребристых пластин (или слабо искривленных оболочек). Если ребра должны быть на одной стороне листа, то одна из рабочих поверхностей должна быть сплошной, другая должна иметь пазы ширины  $\delta$ , вырезанные по определенному контуру, соответствующему желаемому расположению ребер. При сжатии пластического слоя между такими плитами материал слоя будет затекать в пазы и будут образовываться ребра толщиной  $\delta$ . Под свободным прессованием в этом случае понимаем такое, когда глубина пазов достаточно велика и не препятствует свободному втеканию материала; высота ребер  $H$ , следовательно, вообще говоря, будет переменной.

Прирост высоты ребра согласно (5.10) определяется соотношением

$$\delta \frac{\partial H}{\partial t} = - \frac{dh}{dt} (F_{k\Gamma\lambda} + F_{k\Gamma n}) \quad (5.19)$$

Отсюда находим высоту ребра:

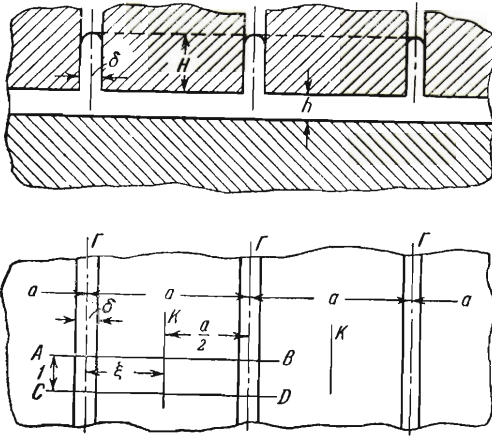
$$H = \frac{h_0 - h}{\delta} (F_{k\Gamma\lambda} + F_{k\Gamma n})$$

где  $F_{k\Gamma\lambda}$  — площадь единичной полоски слева от ребра пластины,  $F_{k\Gamma n}$  — то же справа от него.

В рассматриваемом случае свободного прессования на границе давление  $p_\Gamma = 2\sigma_s$  и граница области кулонова трения определяется координатой (5.15):

$$\xi_s = \frac{h}{2\mu} \ln \frac{1}{4\mu}$$

*Пример 1.* Прямоугольная плита с ребрами одного направления (фиг. 3). Ширину пазов, а значит, и толщину ребер пластины считаем постоянной, как и расстояния между ребрами  $a$ . Затекание металла в каждое ребро, число которых считаем большим, происходит по линиям тока ( $AB$ ,  $CD$ ) с двух сторон.



Фиг. 3

Поскольку ребра эшоры давления  $k$  расположены симметрично между ребрами пластины  $\Gamma$  и линии тока параллельны, имеем

$$F_{k\Gamma\lambda} = F_{k\Gamma n} = 1 \cdot \frac{a}{2}$$

и потому высота ребер пластины будет согласно (5.19)

$$H = \frac{(h_0 - h)a}{\delta} \quad (5.19_1)$$

что в данном случае очевидно. Давление на единичную полосу  $F_{k\Gamma n}$  согласно (5.18) при  $R = \infty$  будет

$$Q_1' = \frac{\sigma_s a^2}{8h} \left[ 1 + \frac{2\bar{h}}{\mu a} - 2 \frac{1-4\mu}{\mu^2} \frac{h^2}{a^2} - 4 \frac{\xi_s}{a} \left( 1 + \frac{h}{\mu a} \right) + 4 \frac{\xi_s^2}{a^2} \right] \quad (5.20)$$

Пусть размер пластины вдоль ее ребер будет  $b$ , поперек ребер  $l$  и число ребер  $N$  достаточно велико. Тогда  $a = l/N$ , усилие прессования, приходящееся на один прогон между ребрами, равно  $2Q_1'b$ , и общее усилие прессования ребристой пластины будет

$$Q = 2Q_1'bN = \frac{2Q_1'lb}{a}$$

Например, при  $\mu = 0,25$ ,  $\sigma_s = 5$  кг/мм<sup>2</sup>,  $l = b = 1000$  мм,  $a = 200$  мм,  $h = 10$  мм получим  $Q = 35000$  т/м<sup>2</sup>. Если необходимая высота ребер  $H = 50$  мм при толщине  $\delta = 10$  мм, то первоначальная толщина листа, из которого идет прессование, согласно (5.19) будет

$$h_0 = h + \frac{H\delta}{2F_{k\Gamma\lambda}} = 12,5 \text{ мм}$$

*Пример 2.* Прямоугольная плита с перпендикулярными ребрами двух направлений. Схема одной ячейки плиты дана на фиг. 4; ячейка предполагается квадратной со стороной  $a$ , углы между пазами штампов — прямыми без округлений. Как следует из аналогии с песчаной насыпью, эшора обобщенного давления  $P$  представляется в виде пирамиды с вершиной  $O$  и ребрами, в проекциях на штамп совпадающими с диагоналями квадрата. Линии тока от ребер эшоры идут параллельно ребрам пластины (они заштрихованы на фиг. 4). Поскольку в треугольнике  $AOB$  давление определяется формулами (5.15), (5.16) и оно постоянно на линии  $MN$  ( $\xi = \text{const}$ ), а длина этой линии

$$MN = a \left( 1 - \frac{2\xi}{a} \right)$$

т. е. получается из (5.17) формальной заменой  $\Delta_r \rightarrow a$ ,  $R \rightarrow 1/2a$ , то суммарное давление на площадь  $OAB$  получается из (5.18) умножением на  $a$  и заменой  $R \rightarrow 1/2a$ ,  $\xi_k \rightarrow 1/2a$  (при  $p_r = 2\tau_s$ ), т. е.

$$Q_{AOB} = \sigma_s \left[ \frac{1-4\mu}{4\mu^2} \left( 1 + \frac{h}{\mu a} \right) ah - \frac{h\xi_s}{2\mu^2} + \frac{(a-2\xi_s)^2}{8\mu} + \frac{(a-2\xi_s)^3}{24h} \right] \quad (5.21)$$

Полное усилие прессования, приходящееся на одну квадратную ячейку, будет  $4Q_{AOB}$ , а на плиту длиной  $b$  и шириной  $l$  будет  $Q = 4Q_{AOB}lb/a^2$ . Поскольку вследствие двустороннего затекания металла в пазы в данном случае

$$F_{кг\lambda} = F_{кг\mu} = 1 \cdot \xi_k$$

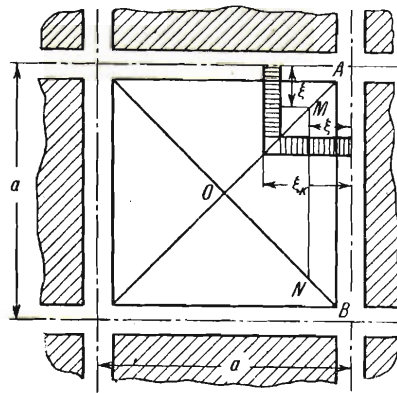
то высота ребер будет согласно (5.19)

$$H = 2 \frac{h_0 - h}{\delta} \xi_k$$

при  $\delta = \text{const}$  переменной и равной нулю в углах.

При числовых данных предыдущего примера общее усилие прессования будет 27 000 т/м<sup>2</sup>.

Если в рассматриваемом нами случае клетка ребер плиты является не квадратной, а прямоугольной, так что сторона  $a_1 > a$ , то из песчаной аналогии получаем следующий способ нахождения усилия прессования, приходящегося на одну ячейку.



Фиг. 4

Ребра эшоры давления представляют собой четыре биссектрисы углов прямоугольника на участках от углов до точек пересечения ближайших биссектрис и отрезок, соединяющий эти точки, параллельный стороне  $a_1$ . Поэтому эшора давлений состоит из эшоры квадрата со стороной  $a$ , разделенной призматической эшорой прямоугольника со сторонами  $a$  и  $b = a_1 - a$ . Значит искомое усилие прессования, приходящееся на одну прямоугольную ячейку, равно

$$4Q_{OAB} + (a_1 - a) Q_1'$$

где входящие усилия определяются формулами (5.20) и (5.21). Высоты ребер на средних участках длинных сторон  $(a_1 - a)$  будут постоянны.

**Пример 3.** Плита с ячейками ребер в виде правильных шестиугольников (соты). Картина распределения давления ясна из песчаной аналогии, поскольку песчаная насыпь будет представлять собой правильную пирамиду с



шестью ребрами, являющимися в проекции биссектрисами углов при вершинах. Линии тока будут перпендикулярами, опущенными с проекций ребер на стороны шестиугольника, и длины этих перпендикуляров будут пропорциональны потоку массы слоя в пазы. Усилие прессования, приходящееся на одну шестиугольную ячейку, будет равно  $6aQ_1$ , где  $a$  — сторона шестиугольника и  $Q_1$  определяется по формуле (5.18), причем нужно полагать  $\xi_k = R$  и под  $R$  понимать радиус вписанного круга ( $R = \frac{1}{2}a\sqrt{3}$ ).

*Пример. 4.* Плита с ячейками ребер в виде криволинейных прямоугольников; линии пазов показаны на фиг. 5 и представляют собой повторяющиеся овалы  $ABCDC'B'A$ , состоящие из прямых  $BC, B'C'$  и полуокружностей  $BAB', CDC'$ ; толщина ребер плиты (ширина пазов  $\delta$ ) на фиг. 5 не показана. Металл течет в пазы как из указанных овалов, так и из криволинейных четырехугольников типа  $ABEF$ . Прессование свободное, и из песчаной аналогии следует, что ребрами эпор давления будут отрезки  $OO'$  и диагонали  $AE, BF$ . Единичные полоски, по которым металл затекает в пазы, заштрихованы на фиг. 5, и их площади равны:

$$F_{k\gamma\lambda} = F_{k\gamma n} = a \text{ на } BC \text{ и } B'C'$$

$$F_{k\gamma\lambda} + F_{k\gamma n} = \begin{cases} \frac{a}{4 \cos^2 \varphi} \text{ на } BAB' \text{ при } 0 \leq \varphi \leq \frac{1}{4} \pi, \frac{3}{4} \pi \leq \varphi \leq \pi \\ \frac{a}{4 \sin^2 \varphi} \text{ на } BAB' \text{ при } \frac{1}{4} \pi \leq \varphi \leq \frac{3}{4} \pi \end{cases}$$

Если желаемая высота ребер рассматриваемой конфигурации должна быть постоянна и равна  $H$ , то из (5.19) находим следующее выражение для ширины пазов (толщины ребер):

$$\delta = \begin{cases} \frac{h_0 - h}{H} \frac{a}{4 \cos^2 \varphi}, & 0 \leq \varphi \leq \frac{1}{4} \pi, \frac{3}{4} \pi \leq \varphi \leq \pi \\ \frac{h_0 - h}{H} \frac{a}{4 \sin^2 \varphi}, & \frac{1}{4} \pi \leq \varphi \leq \frac{3}{4} \pi, \end{cases} \text{ на } BAB'$$

$$\delta = \frac{h_0 - h}{H} a \text{ на } BC \text{ и } B'C'$$

при этом в точках  $B, B', C, C'$  переходов от прямолинейных частей ребер к округленным ( $\varphi = 0, \pi$ ) толщина их уменьшается скачком в 4 раза. Учитывая, что продолжением одного прямолинейного ребра  $CB$  вверх в точке  $O''$  являются два разветвляющихся ребра  $BA$  и  $BE$ , видим, что их суммарная толщина уменьшается в точке  $B$  в 2 раза.

Плиту с непрерывным изменением толщины ребер по указанной схеме можно получить путем снятия избытка высоты ребер (облоя), если на участках  $BC$  и  $B'C'$  при прессовании получить высоту  $2H$ , а на  $BAB'$  — высоту  $H$ . В этом случае толщина ребер определяется формулами

$$\delta = \frac{h_0 - h}{2H} a \text{ на } BC \text{ и } B'C'$$

$$\delta = \begin{cases} \frac{h_0 - h}{H} \frac{a}{4 \cos^2 \varphi}, & 0 \leq \varphi \leq \frac{1}{4} \pi, \frac{3}{4} \pi \leq \varphi \leq \pi \\ \frac{h_0 - h}{H} \frac{a}{4 \sin^2 \varphi}, & \frac{1}{4} \pi \leq \varphi \leq \frac{3}{4} \pi \end{cases} \text{ на } BAB'$$

причем суммарная толщина разветвляющихся ребер изменяется непрерывно от величины  $[(h_0 - h)/2H]a$  в точках  $B, C, B', C'$  и точках  $A$  и  $D$ ; в точках  $\varphi = 1/4\pi, 3/4\pi$  участка  $ABB'$  толщина ребра такая же, как и ребер  $BC$  и  $B'C'$ .

Усилие прессования, приходящееся на площадь одного овала и примыкающих к нему четырех криволинейных треугольников типа  $BO''A$  (иначе, одного овала и одного криволинейного четырехугольника), состоит из усилия для прессования прямоугольника по схеме примера 1 ( $bQ_1'$ ), усилия  $Q_2$  прессования круглой ячейки диаметра  $A$ , которое из формулы (5.18) получается умножением на  $\pi a$  при  $R = \xi_k = 1/2a$ ,  $p_r = 2\tau_s$ , т. е. равно  $\pi Q_{OAB}$  (пример 2), и из усилия  $Q_3$  прессования криволинейной четырехугольной ячейки  $ABEF$ , которое нетрудно рассчитать, но можно и оценить по схеме примера 2, если заменить эту ячейку вписанным квадратом со стороной  $(\sqrt{2} - 1)a$  и описанным квадратом со стороной  $a/\sqrt{2}$ , так что

$$Q_3' = (4Q_{OAB})_{a \rightarrow (\sqrt{2}-1)a} < Q_3 < (4Q_{OAB})_{a \rightarrow a/\sqrt{2}} = Q_3''$$

Здесь указано, что в формуле (5.21) величину  $a$  следует заменить для нижней оценки  $Q_3$  на величину  $(\sqrt{2} - 1)a$ , а для верхней оценки — на  $a/\sqrt{2}$ ; из песчаной аналогии следует, что истинное значение  $Q_3$  будет весьма близко именно к нижней оценке  $Q_3'$ . Таким образом,

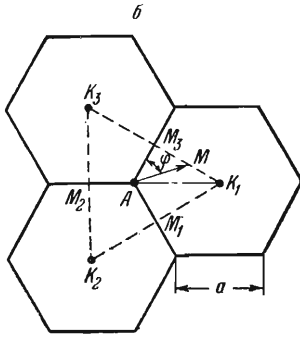
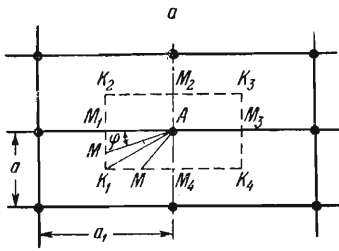
$$Q = bQ_1' + \pi Q_{OAB} + 4(Q_{OAB})_{a \rightarrow (\sqrt{2}-1)a}$$

Приведенные примеры показывают, что расчеты свободного прессования ребристых оболочек можно производить для достаточно сложных схем даже без использования аналогии с песчаной насыпью. Использование же аналогии позволяет произвести числовой расчет любой схемы.

**6. Дожатие.** Предположим теперь, что при прессовании ребристых оболочек применяются штампы с пазами заданной глубины  $H$  и необходимо, чтобы металл прессуемого слоя полностью их заполнил. Потребуем, чтобы наименьшее удельное давление металла ребра на дно паза было равно  $m\tau_s$  и соответствующее наименьшее давление у основания ребра было  $p_0$ . Если стенки паза параллельны и трением на них пренебречь, то  $p_0 = (2 + m)\tau_s$ ; в других случаях величину  $p_s$  также нетрудно оценить, если учесть, что течения металла в пазе представляет задачу течения между жесткими поверхностями.

До тех пор, пока в процессе течения наибольшая высота ребер остается меньше глубины паза, весь расчет производится по методу § 5. После этого начинается процесс, при котором последовательно заполняются пазы, причем области заполнения при постоянной ширине  $\delta$  и глубине  $H$  пазов распространяются к угловым точкам или областям с малыми радиусами кривизны. В результате последними заполняются именно эти области, и потому наибольшее усилие прессования получается в этом последнем процессе дожатия, когда области затрудненного втекания не только заполняются, но в них еще возникает давление  $m\tau_s$  на дно паза.

Если схема расположения ребер полигональная, например с квадратной, прямоугольной или шестиугольной ячейкой, то в конце процесса дожатия течение слоя будет происходить только в угловые точки ячеек (например  $A, B$  фиг. 4), и картина распределения обобщенного давления становится вполне ясной из аналогии с песчаной насыпью. Достаточно представить себе, что на горизонтальную пластину, по форме в плане подобную прессуемой плите и имеющую отверстия в точках, соответствующих угловым точкам ячеек плиты, насыпан слой песка и в результате его утечки через отверстия форма насыпи установилась. Вокруг каждого отверстия поверхность насыпи будет представлять собой по-



Фиг. 6

верхность круглого конуса, пересечения соседних поверхностей дадут ребра эпюры давления, ординаты  $z$  поверхности будут согласно (4.12) пропорциональны избыточному обобщенному давлению:

$$P - P_0 = \frac{kz}{fh} \quad (6.1)$$

причем если  $p_0 = (2 + m) \sigma_s \leq \sigma_s / 2\mu$ , то

$$P_0 = \frac{1}{2\mu} \ln \frac{P_0}{\sigma_s}, \quad \mu \leq \frac{1}{2(2+m)} \quad (6.2)$$

если же  $p_0 \geq \sigma_s / 2\mu$ , то

$$P - P_0 = \frac{P - P_0}{\sigma_s}, \quad \mu \geq \frac{1}{2(2+m)} \quad (6.3)$$

и область кулонова трения в слое будет отсутствовать.

Вдоль любого луча  $r$ , исходящего из угловой точки ячейки, обобщенное давление согласно (5.5) будет равно

$$P = P_0 + \frac{r}{h} \quad (6.4)$$

и истинное давление будет [подобно (5.15), а также (5.16)] при  $p_0 \leq \sigma_s / 2\mu$

$$p = p_0 \exp \frac{2\mu r}{h} \quad \text{при} \quad r \leq r_s = \frac{h}{2\mu} \ln \frac{1}{2\mu(2+m)}$$

$$p = \sigma_s \left( \frac{r - r_s}{h} + \frac{1}{2\mu} \right) \quad \text{при} \quad r \geq r_s \quad (6.5)$$

При условии (6.3) имеем

$$p = p_0 + \sigma_s \frac{r}{h}, \quad p_0 \geq \frac{\sigma_s}{2\mu} \quad (6.6)$$

Произведем расчет усилия прессования при дожатии в случае прямоугольной и шестиугольной ячеек ребер (фиг. 6), причем стороны прямоугольника  $a$  и  $a_1 > a$  и сторона шестиугольника  $a$ . Для простоты положим  $p_0 \geq \sigma_s / 2\mu$ .

Ребра эпюры давления, окружающей точку  $A$ , как явствует из песчаной аналогии, в случае прямоугольной ячейки суть стороны прямоугольника  $k_1 k_2 k_3 k_4$  ( $k_1 k_2 = a$ ,  $k_1 k_4 = a_1$ ) и в случае шестиугольной — сто-



роны треугольника  $k_1 k_2 k_3$  ( $k_1 k_2 = a\sqrt{3}$ ). На секториальную полосу луча  $AM$  с углом  $d\varphi$  действует давление

$$d\varphi \int_0^{AM} \left( p_0 + \sigma_s \frac{r}{h} \right) r dr = \left( p_0 \frac{r_M^2}{2} + \sigma_s \frac{r_M^3}{3h} \right) d\varphi$$

причем для прямоугольной ячейки

$$r_M = \frac{a_1}{2 \cos \varphi}, \quad \operatorname{tg} \varphi \leq \frac{a}{a_1} = \operatorname{tg} \varphi_0; \quad r_M = \frac{a}{2 \sin \varphi}, \quad \operatorname{tg} \varphi \geq \frac{a}{a_1} = \operatorname{tg} \varphi_0$$

и для шестиугольной ячейки

$$r_M = \frac{a}{2 \cos \varphi}, \quad \varphi \leq \frac{1}{3} \pi$$

Усилие прессования, приходящееся на прямоугольник  $AM_1 K_1 M_4 A$  (фиг. 6а), будет

$$Q_4' = \int_0^{1/3\pi} \left( p_0 \frac{r_M^2}{2} + \sigma_s \frac{r_M^3}{3h} \right) d\varphi = \frac{\sigma_s a^3}{96h} \left[ \ln \frac{\sqrt{a_1^2 + a^2} + a_1}{\sqrt{a_1^2 + a^2} - a_1} + \right. \\ \left. + \frac{a_1^3}{a^3} \ln \frac{\sqrt{a_1^2 + a^2} + a}{\sqrt{a_1^2 + a^2} - a} + 4 \frac{a_1}{a^2} \sqrt{a_1^2 + a^2} + 24(2+m) \frac{a_1 h}{a^2} \right]$$

и на треугольник  $AK_1 M_3 A$  (фиг. 6б) будет

$$Q_5' = \int_0^{1/3\pi} \left( p_0 \frac{r_M^2}{2} + \sigma_s \frac{r_M^3}{2h} \right) d\varphi = \\ = \frac{\sigma_s a^3}{96h} \left[ 4\sqrt{3} + \ln \frac{2 + \sqrt{3}}{2 - \sqrt{3}} + 12\sqrt{3}(2+m) \frac{h}{a} \right]$$

Следовательно, усилия прессования, приходящиеся на одну прямоугольную и одну шестиугольную ячейки, соответственно будут иметь выражения

$$Q_4 = 4Q_4' = \frac{\sigma_s a^3}{24h} \left[ \ln \frac{\sqrt{a_1^2 + a^2} + a_1}{\sqrt{a_1^2 + a^2} - a_1} + \frac{a_1^3}{a^3} \ln \frac{\sqrt{a_1^2 + a^2} + a}{\sqrt{a_1^2 + a^2} - a} + \right. \\ \left. + 4 \frac{a_1}{a^2} \sqrt{a_1^2 + a^2} + 24(2+m) \frac{a_1 h}{a^2} \right] \quad (6.7)$$

$$Q_5 = 12Q_5' = \frac{\sigma_s a^3}{8h} \left[ \ln \frac{2 + \sqrt{3}}{2 - \sqrt{3}} + 4\sqrt{3} + 12\sqrt{3}(2+m) \frac{h}{a} \right]$$

причем для квадратной клетки ( $a_1 = a$ )

$$Q_4 = \frac{\sigma_s a^3}{12h} \left[ \ln \frac{\sqrt{2} + 1}{\sqrt{2} - 1} + 2\sqrt{2} + 12(2+m) \frac{h}{a} \right] \quad (6.7.1)$$

В эти, как и во все другие подобные формулы п. 5, не входит ширина пазов  $\delta$ , что понятно, поскольку  $\delta$  мала сравнительно с  $a$ ; вместо  $\delta$  и  $H$  в них входит число  $m$ , характеризующее паз и степень плотности его заполнения.

При числовых данных примера 2 ( $a = a_1 = 200$  мм,  $h = 10$  мм,  $m = 0$ ,  $\sigma_s = 5$  кг мм<sup>-2</sup>) усилие для дожатия квадратной плиты  $b = l = 1000$  мм получается  $25Q_4 \approx 47000$  тм<sup>-2</sup>, т. е. в 1,74 раза больше, чем усилие при свободном прессовании.

Усилие дожатия  $1 \text{ м}^2$  ребристой плиты с заданной ячейкой можно уменьшить, если в центре ячейки в одной из штампующих плит сделать отверстие диаметром порядка  $\delta$  или  $h$  и глубиной  $H$ . Граничное условие на этом отверстии, как и в углах ячеек при дожатии, будет  $p = p_0 = \sigma_s (m + 2)$ , и потому течение около него будет таким же, как и около угловой точки.

Из песчаной аналогии следует, что максимальное удельное давление при этом значительно уменьшается.

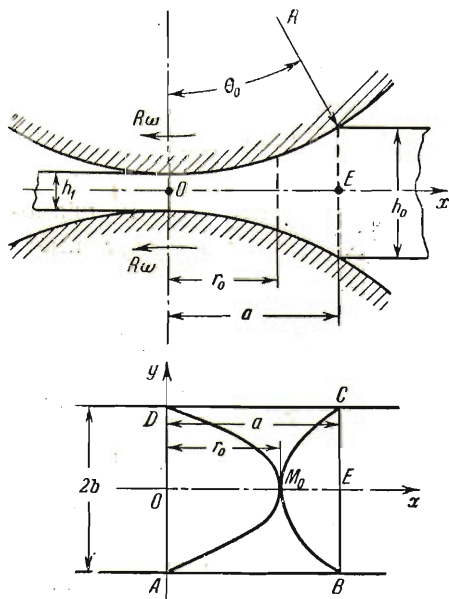
В случае квадратной клетки со стороной  $a$ , как видно из аналогии, усилие прессования уменьшится в отношении

$$2 \frac{(Q_4)_{a \rightarrow a / \sqrt{2}}}{(Q_4)_a} = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1 + 2.68\sqrt{2}(2+m)h/a}{1 + 2.68(2+m)h/a} \quad (6.9)$$

т. е. в рассматриваемом числовом примере усилие прессования будет составлять  $0,76 \times 47000 = 36000 \text{ т/м}^2$ .

Получающийся при этом прилив в виде стержня в центре ячейки является облоем.

**7. О прокатке листа.** Излагаемая теория течения между жесткими поверхностями может быть применена к прокатке, если длина области захвата  $a$  (фиг. 7) значительно больше начальной толщины слоя  $h_0$ .



Фиг. 7

Через  $b$  обозначим ширину области захвата, которую пока будем считать постоянной; это значит, что либо валки имеют длину  $b$ , причем ширина слоя больше, либо на расстоянии  $b$  в валках имеются канавки, в которые может втекать металл слоя, и, следовательно, после прокатки лист получается с ребрами; в последнем случае втекание слоя в пазы валков считаем свободным.

Поскольку в рассматриваемой теории течения при  $h \ll a$  растягивающие напряжения, порядок которых не больше  $\sigma_s$ , считаются равными нулю, граничные условия на прямоугольнике  $ABCD_{(\Gamma)}$  имеют вид:

$$\begin{aligned} x = 0, \quad y = -\frac{1}{2}b, \quad p = \sigma_s \\ x = a, \quad y = +\frac{1}{2}b, \quad P_{\Gamma} = 0 \end{aligned} \quad (7.1)$$

В данном случае внутренние движения физических поверхностей одинаковы и скорости

$$w_1' = w_1 = w_x = -R\omega, \quad w_2' = w_2 = w_y = 0 \quad (7.2)$$

где  $R$  — радиус валков,  $\omega$  — угловая скорость.

Уравнения (4.9), (4.6) и (3.10) при  $A_1 = A_2 = 1$ ,  $s_1 = x$ ,  $s_2 = y$ ,



$v_1 = v_x, v_2 = v_y$   $k = 1$ , учитывая стационарность процесса ( $\partial h / \partial t = 0$ ), имеют вид:

$$\left(\frac{\partial P}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial P}{\partial y}\right)^2 = \frac{1}{h^2} \quad (7.3)$$

$$v_y \frac{\partial P}{\partial x} = (v_x + R\omega) \frac{\partial P}{\partial y} \quad (7.4)$$

$$\frac{1}{h} \frac{\partial}{\partial x} (hv_x) + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0 \quad (7.5)$$

причем для текущей толщины слоя  $h$ , длины участка захвата и степени обжатия слоя

$$\varepsilon = \frac{h_0 - h_1}{h_0} \quad (7.6)$$

имеем выражения

$$h = h_1 + \frac{x^2}{R} \quad (7.7)$$

$$a = \sqrt{R(h_0 - h_1)} = x_0 \sqrt{\varepsilon} \quad (7.8)$$

$$x_0 = \sqrt{Rh_0}, \quad x_1 = \sqrt{Rh_1} = x_0 \sqrt{1 - \varepsilon} \quad (7.9)$$

Граничные условия (7.1) симметричны относительно оси  $y = 0$ , на которой  $v_y = 0$ ; в предположении, что на всей линии  $y = 0$  есть только одна точка  $M_0$ , в которой скорость  $v_x$  равняется  $R\omega$ , заключаем, что на ней согласно (7.4)  $\partial P / \partial y = 0$  и, следовательно,

$$\frac{\partial P_0}{\partial x} = \frac{1}{h} \quad (0 \leq x \leq r_0); \quad \frac{\partial P}{\partial x} = -\frac{1}{h} \quad (r_0 \leq x \leq a) \quad (7.10)$$

где  $r_0$  — расстояние по оси  $x$  от начала  $O$  до точки сцепления  $M_0$ . Интегрируя эти уравнения при условиях  $x = 0, x = a, P = 0$ , получаем следующие выражения обобщенного давления и величины

$$r_0 = a \frac{\sqrt{1 - \varepsilon} - 1 + \varepsilon}{\varepsilon} \quad (7.11)$$

$$P_0 = \frac{R}{x} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{x}{x} \quad (0 \leq x \leq r_0) \quad (7.12)$$

$$P_0 = \frac{R}{x} \left( \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{a}{x} - \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{x}{x} \right) \quad (r_0 \leq x \leq a)$$

причем  $P_0$  непрерывно в точке  $x = r_0$ . Поскольку эти выражения являются следствием только симметрии течения относительно оси  $y$ , они справедливы и при других условиях на боковых сторонах, например для прокатки листа со свободным уширением. Эпюра истинного давления  $p_0$  на линии  $y = 0$  может быть построена на основании (7.11), (7.12), (4.7<sub>1</sub>) и (4.7<sub>2</sub>):

$$p = \sigma_s e^{2\mu P}, \quad P \leq \frac{1}{2\mu} \ln \frac{1}{2\mu}$$

$$p = -\frac{\sigma_s}{2\mu} \left( \ln \frac{1}{2\mu} - 1 \right) + \sigma_s P, \quad P \geq \frac{1}{2\mu} \ln \frac{1}{2\mu} \quad (7.12_1)$$

Однако наряду с рассмотренным случаем, когда на линии  $y = 0$  существует только одна точка сцепления ( $x = r_0$ ), возможен другой, когда

$v_x = -R\omega$  на целом отрезке  $r_0' \leq x \leq r_0''$ , и тогда вместо (7.10) получим

$$\frac{\partial P_0}{\partial x} = \frac{1}{h} \quad (0 \leq x \leq r_0') \quad (7.13)$$

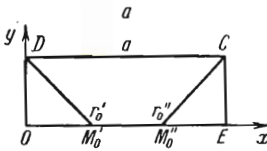
$$v_x = -R\omega \quad (r_0' \leq x \leq r_0'')$$

$$\frac{\partial P_0}{\partial x} = -\frac{1}{h} \quad (r_0'' \leq x \leq a)$$

и интеграл типа (7.12) будет существовать только вне участка  $(r_0', r_0'')$ .

Будет ли при прокатке на линии  $y=0$  существовать лишь точка сцепления  $r_0$  или участок сцепления  $(r_0', r_0'')$  зависит от ширины  $b$ , причем, очевидно, участок сцепления и условия (7.13) возможны в случае, если ширина  $b$  достаточно мала. Для доказательства рассмотрим полное решение задачи о прокатке в случае, если степень деформации  $\varepsilon$  весьма мала, так что толщину слоя  $h$  в уравнении (7.3) можно приближенно считать постоянной, например  $1/h \approx (h_0 + h_1)/2h_0h_1$ . При этом мы по-прежнему должны считать  $a \gg h$ , т. е.  $R \gg h/\varepsilon$ , и, значит, валки должны иметь достаточно большой диаметр. При этом условии уравнение (7.3) нами уже рассмотрено, и эпюра  $P$  совпадает с поверхностью песчаной насыпи на прямоугольнике  $(a, b)$  при условии  $P=0$  на границе.

Вследствие симметрии явления относительно оси  $x$  можно рассматривать лишь область  $0 \leq a \leq 1/2 b$ , и в зависимости от того, будет ли  $b \leq a$  или  $b \geq a$ , расположение ребер эпюры  $P$  будет в виде фиг. 8а или 8б.



В случае  $b \leq a$  имеем  $r_0' = b/2$ ,  $r_0'' = a - 1/2 b$ . В треугольнике  $OM_0'D$  имеем согласно (7.3), (7.4), (7.5)

$$P = \frac{x}{h}, \quad v_y = 0, \quad v_x = -R\omega \frac{h_0'}{h} \quad (7.14_1)$$

В треугольнике  $M_0''EC$  имеем

$$P = \frac{a-x}{h}, \quad v_y = 0, \quad v_x = -R\omega \frac{h_0''}{h} \quad (7.14_2)$$

В трапеции  $M_0'M_0''CD$

$$P = \frac{b-2y}{2h}, \quad v_x = -R\omega$$

$$v_y = R\omega \frac{y}{h} \frac{dh}{dx} = 2\omega \frac{xy}{h} \quad (7.14_3)$$

Если на линиях  $y = \pm 1/2 b$  в одном из валков имеются канавки шириной  $\delta$  и достаточной глубины, причем такие же канавки повторяются несколько раз с шагом  $b$  в обе стороны от оси  $x$  и прокатываемый лист имеет ширину, значительно превосходящую  $b$ , то после прокатки будет получаться ребристый лист с ребрами вдоль прокатки. Высота ребра  $H$  находится из очевидного условия

$$2 \int_0^a (v_y)_{y=1/2b} h dx = R\omega H \delta$$

и равна

$$H = \frac{bh_0}{\delta} \varepsilon \quad (7.15)$$

В случае  $b \geq a$  имеем  $r_0 = 1/2 a$ , в трапеции  $OM_0MD$  имеем значения (7.14<sub>1</sub>), в трапеции  $EM_0MC$  — значения (7.14<sub>2</sub>) и в треугольнике  $MCD$  — значения

$$P = \frac{b-2y}{2h}, \quad v_x = -R\omega, \quad v_y = \frac{R\omega}{h} \frac{dh}{dx} \left( y - \frac{b-a}{2} \right) \quad (7.14_4)$$

Отсюда высота ребра при прокатке листа в валках, один из которых имеет круговые канавки, будет

$$H = \frac{ah_0}{\delta} \varepsilon = \frac{h_0}{\delta} \sqrt{Rh_0} \varepsilon^{3/2} \quad (7.16)$$

Результаты (7.14) можно трактовать и иначе. Если прокатывается полоса шириной  $b$  в валках большей длины, так что возникает уширение, то, обозначая через  $\eta$  линейный прирост ширины  $b$  на расстоянии  $x$ , получаем уравнение сохранения массы

$$R\omega h\eta = 2 \int_x^a (v_y)_{y=1/2b} h dx$$

и потому для  $b \leq a$  имеем

$$\eta = \frac{b(a^2 - x^2)}{Rh_0} = \eta_0 \left( 1 - \frac{x^2}{a^2} \right), \quad \eta_0 = \frac{ba^2}{Rh_0} = b\varepsilon \quad (7.17)$$

где  $\eta_0$  — уширение на выходе из валков. Для  $b \geq a$  получаем согласно (7.14<sub>4</sub>)

$$\eta = \eta_0 \left( 1 - \frac{x^2}{a^2} \right), \quad \eta_0 = a\varepsilon = x_0\varepsilon^{3/2} \quad (7.18)$$

т. е. при ширине листа, превосходящей длину участка захвата, уширение не зависит от ширины листа, а только от толщины его, степени деформации и радиуса валков. Заметим еще, что, поскольку  $d\eta/dx$  имеет наибольшее значение при  $x = a$ , значит, наиболее интенсивное уширение происходит у входа листа в валки.

Формулы (7.14), (7.15), (7.16), (7.17), (7.18) выведены в предположении малости деформации  $\varepsilon$ . Решение уравнений (7.3), (7.4), (7.5) для произвольной  $\varepsilon$  требует несколько большей вычислительной работы, однако оно будет содержать все качественные особенности приведенного элементарного решения задачи о прокатке.

Поступила 5 IX 1955

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Ильюшин А. А. Вопросы теории течения пластического вещества по поверхностям, ПММ, т. XVIII, в. 3, 1954.
2. Унксов Е. П. Инженерные методы расчета усилий при обработке металла давлением, Машгиз, 1955.