Прикладная математика и механика. Том XIX, 1955
Институт механики Академии наук Союза ССР

О ПРИЗНАКАХ УСТОЙЧИВОЙ ОГРАНИЧЕННОСТИ РЕШЕНИЙ ПЕРИОДИЧЕСКИХ КАНОНИЧЕСКИХ СИСТЕМ

М. Г. Крейн

(Одесса)

Здесь будут приведены дальнейшие выводы из основных результатов работы [1a], посвященной исследованию линейной канонической дифференциальной системы $2m$-го порядка вида

$$\frac{dx}{dt} = JH(t)\,x, \qquad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{2m} \end{pmatrix} \tag{0.1}$$

где

$$H(t) = H(t+T) = \| h_{jk}(t) \|_1^{2m}$$

вещественная симметрическая периодическая и суммируемая в периодо-интервале $(0, T)$ матрица-функция

$$J = \begin{pmatrix} 0 & I_m \\ -I_m & 0 \end{pmatrix}, \qquad I_m = \| \delta_{jk} \|_1^m \qquad \left(\delta_{jk} = \begin{cases} 1 & \text{при } j = k \\ 0 & \text{при } j \neq k \end{cases} \right)$$

Уравнение (0.1) было названо уравнением положительного типа, если для любого $2m$-мерного вектора[1] $\xi \neq 0$

$$(H(t)\,\xi, \xi) \geqslant 0, \qquad \int_0^T (H(t)\,\xi, \xi)\,dt > 0 \tag{0.2}$$

Условимся также говорить, что периодический гамильтониан $H(t) = H(t+T)$ положительного типа, если выполняются условия (0.2).

Если гамильтониан $H(t)$ положительного типа, то соответствующая краевая задача

$$\frac{dx}{dt} = \lambda\, JH(t)\,x, \qquad x(0) + x(T) = 0 \tag{0.3}$$

имеет по крайней мере одно положительное и одно отрицательное характеристическое число.

Этот факт был доказан [1a] исключительно сложно. В § 2 он будет получен как следствие двух следующих соотношений:

$$\lim_{r\to\infty} \sum_{|\lambda_j| < r} \frac{1}{\lambda_j} = 0, \qquad \sum \frac{1}{\lambda_j^2} = \operatorname{sp}(A_{11}A_{22} - A_{12}^2) \tag{0.4}$$

где

$$\ldots \leqslant \lambda_{-2} \leqslant \lambda_{-1} \;(< 0 <)\; \lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \ldots \tag{0.5}$$

есть последовательность всех характеристических чисел краевой задачи (0.3) (каждое

---

[1] Через (ξ, η) обозначается скалярное произведение векторов, а через $|\xi|$ длина вектора:

$$(\xi, \eta) = \sum_1^{2m} \xi_j \eta_j, \qquad |\xi| = \sqrt{(\xi, \xi)}.$$

фигурирует столько раз, какова его кратность), а матрицы m-го порядка A_{jk} ($j, k=1, 2$) суть составляющие элементы матрицы

$$H_{\text{ср}} = \frac{1}{T}\int_0^T H(t)\,dt = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \tag{0.6}$$

Было показано (см. [1a], теорема 6.1), что при $\lambda_{-1} < \lambda < \lambda_1$ все решения уравнения $dx/dt - \lambda JH(t)x$ ограничены и даже, более того, устойчиво ограничены (т. е. остаются ограниченными при достаточно малых возмущениях гамильтониана $H(t)$; точное определение понятия см. в § 2, п. 1).

Таким образом, для устойчивой ограниченности всех решения уравнения (0.1) *достаточно*, чтобы $\lambda_1 = \lambda_1(H) > 1$. Всякий признак устойчивой ограниченности решений уравнения (0.1), получающийся как один из признаков того, что $\lambda_1(H) > 1$, будем называть *Z-признаком* [1].

Как будет выяснено в § 3 из Z-признаков можно получать другого типа признаки, используя различные преобразования уравнения (0.1), сохраняющие его канонический вид. Нас в первую очередь будут интересовать признаки устойчивой ограниченности решений уравнения, использующие в качестве основных данных матричные коэффициенты Фурье гамильтониана $H(t)$.

Такие признаки являются наиболее простыми с вычислительной стороны, и они оказываются единственными практически пригодными признаками в тех случаях, когда гамильтониан H содержит параметры.

Простейшим таким Z-признаком для уравнения (0.1), использующим лишь первый коэффициент Фурье $H_{\text{ср}}$ гамильтониана $H(t)$ является неравенство

$$T^2\,\mathrm{sp}\,(A_{11}A_{22} - A_{12}^2) < 2 \tag{0.7}$$

которым согласно (0.4) гарантируется, что $\lambda_1 > 1$. Если $H(t)$ функция четная: $H(t) = H(-t)$, то $\lambda_k = -\lambda_{-k}$ ($k = 1, 2, \ldots$) и для этого случая неравенство (0.7) останется Z-признаком, если в правой части цифру 2 заменить на цифру 4.

Однако при $m > 1$ эти признаки дают сравнительно грубый результат. В § 2 будет показано, как их можно значительно усилить при некоторых дополнительных данных относительно $H(t)$.

Особое внимание будет уделено встречающемуся во многих приложениях векторному дифференциальному уравнению

$$\frac{d^2y}{dt^2} + P(t)\,y = 0, \qquad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} \tag{0.8}$$

где $P(t) = P(t+T) = \|p_{jk}(t)\|_1^m$ — вещественная симметрическая, суммируемая в $(0, T)$ матрица-функция с *неотрицательной в среднем* формой

$$\int_0^T (P(t)\eta, \eta)\,dt \geq 0, \qquad \eta = \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \vdots \\ \eta_m \end{pmatrix} \tag{0.9}$$

и которая удовлетворяет тому естественному условию, что для любого постоянного m-мерного вектора $\eta \neq 0$ не почти всюду $P(t)\eta = 0$. Последнее условие будем записывать так:

$$P(t)\,\eta \not\equiv 0 \qquad \text{при } \eta \neq 0 \tag{0.10}$$

---

[1] И. М. Гельфанд и В. Б. Лидский [2] ввели важное понятие областей устойчивости, на которые разбивается совокупность всех гамильтонианов $H(t)$ данного порядка $2m$ и данного периода T, которым отвечает уравнение (0.1) с устойчиво ограниченными решениями. Пользуясь этим понятием, можно сказать, что Z-признак — это признак принадлежности гамильтониана $H(t)$ положительного типа к простейшей «первой» области устойчивости.

В § 6 будет доказана теорема II, в силу которой можно утверждать, что все решения уравнения (0.8) устойчиво ограничены, коль скоро $\lambda_1 > 1$, где λ_1 — первое положительное характеристическое число краевой задачи:

$$y'' + \lambda P(t)\, y = 0, \qquad y(0) + y(T) = y'(0) + y'(T) = 0 \tag{0.11}$$

При более жестких ограничениях относительно $P(t)$ этот результат был найден еще в [1a], § 9, п. 5. Хотя здесь он устанавливается при предельно широких предположениях, доказательство, предложенное для этого, оказалось значительно изящней прежнего. Оно использует *особое* преобразование краевой задачи (0.11) в задачу (0.3).

Это же преобразование позволило из Z-признаков для уравнения (0.1) получить Z-признаки нового типа для уравнения (0.8) (т. е. признаки того, что у краевой задачи (0.11) первое положительное характеристическое число $\lambda_1 > 1$).

Так, например, в § 5 выясняется, что если $P(t)$ — нечетная функция и $P(t)\,\eta \not\equiv 0$ при $\eta \neq 0$, то все решения уравнения (0.8) будут устойчиво ограниченными, коль скоро

$$T \int_0^T \operatorname{sp} Q^2\, dt < 4 \tag{0.12}$$

где $Q(t)$ — первообразная матрица-функция для $P(t)$:

$$Q(t) = \int P(t)\, dt \tag{0.13}$$

выделяемая условием $Q_{\text{ср}} = 0$.

В скалярном случае ($m = 1$) имеем $\operatorname{sp} Q^2 = Q^2$ и Z-признак (0.12) переходит в признак, полученный Ляпуновым [3a] еще в 1896 г.

Оказывается (см. § 5, п. 1), признак Ляпунова, а с ним и более общий признак (0.12) являются «точными» признаками, т. е. число 4 в правой части (0.12) не может быть заменено никаким бо́льшим.

Если отбросить условие нечетности $P(t)$ и заменить его более широким условием

$$\int_0^T P(t)\, dt = 0 \tag{0.14}$$

то Z-признаком будет неравенство

$$T \int_0^T q_{\text{м}}^2(t)\, dt < \frac{\pi^2}{4} \tag{0.15}$$

где $q_{\text{м}}^2(t)$ — наибольшее собственное число матрицы $Q^2(t)$.

В скалярном случае $q_{\text{м}}^2(t) = Q^2(t)$ и, повидимому, даже в этом случае это обобщение признака Ляпунова не было известно.

Мы предполагаем, что в Z-признаке (0.15) число $^1/_4\,\pi^2$ можно заменить на 3, которое уже будет «точным» (бо́льшим, как это доказывается в § 5, п. 3, его заменить нельзя).

Заметим, что большинство устанавливаемых здесь признаков являются новыми даже для скалярного случая $m = 1$.

В дальнейшем, не всегда оговаривая это, мы всюду предполагаем, что матрицы-функции, обозначенные через $H(t)$ и $P(t)$, вещественны, симметричны и локально интегрируемы (т. е. что их элементы суммируемы в любом конечном интервале).

Следует, однако, отметить, что все излагаемые здесь результаты, подобно тому как это было сделано в [1a], можно обобщить на тот случай, когда в уравнениях (0.1) и (0.8) матрицы-функции $H(t)$ и $P(t)$ являются *эрмитовыми*, а не вещественными симметричными.

§ 1. Формула следов. Обозначим через $U(t;\lambda)=\|u_{jk}(t;\lambda)\|_1^{2m}$ матрицант уравнения $dx/dt=\lambda JH(t)x$, так что

$$\frac{dU}{dt}=\lambda JH(t)U, \qquad U(0;\lambda)=I_{2m} \tag{1.1}$$

Любое решение $x(t;\lambda)$ уравнения $dx/dt=\lambda JH(t)x$ будет выражаться через свое начальное значение $x(0)$ по формуле

$$x(t;\lambda)=U(t;\lambda)x(0) \tag{1.2}$$

Следовательно, характеристические числа краевой задачи (0.3) суть нули целой функции:

$$D(\lambda)=\det(U(T;\lambda)+I_n) \qquad (n=2m) \tag{1.3}$$

В § 3 [1a] было доказано, что кратность всякого нуля λ_0 детерминанта $D(\lambda)$ совпадает с кратностью его как характеристического числа краевой задачи (0.3), т. е. с числом линейно независимых решений системы (0.3) при $\lambda=\lambda_0$.

Более того, было установлено (см. § 6 [1a]), что если (0.5) есть полная последовательность характеристических чисел краевой задачи (0.3), то

$$D(\lambda)=2^n\lim_{r\to\infty}\prod_{|\lambda_j|<r}\left(1-\frac{\lambda}{\lambda_j}\right) \tag{1.4}$$

При установлении этих результатов предполагалось, что $H(t)$ удовлетворяет условиям (0.2). Однако анализ использованных при этом рассуждений обнаруживает, что сформулированные утверждения справедливы при единственном предположении, что $H(t)$ удовлетворяет только первому условию (0.2). Из (1.4) следует, что

$$D(\lambda)=2^n(1+a_1\lambda+a_2\lambda^2+\cdots) \tag{1.5}$$

где

$$a_1=-\lim_{r\to\infty}\sum_{|\lambda_j|<r}\frac{1}{\lambda_j}, \qquad a_2=\sum_{(j,\,k)}\frac{1}{\lambda_j\lambda_k} \tag{1.6}$$

причем во второй сумме суммация распространяется на всевозможные сочетания по два (j,k) индексов $\pm1, \pm2, \pm3, \ldots$ Отсюда

$$\sum\frac{1}{\lambda_j^2}=a_1^2-2a_2 \tag{1.7}$$

Вычислим величины a_1 и a_2. Для этого заметим, что матрицант $U(t;\lambda)$ допускает разложение:

$$U(t;\lambda)=I_{2m}+C_1(t)\lambda+C_2(t)\lambda^2+\cdots \tag{1.8}$$

где

$$C_1(t)=\int_0^t JH(s)\,ds, \qquad C_n(t)=\int_0^t JH(s)C_{n-1}(s)\,ds \qquad (n=2,3,\ldots) \tag{1.9}$$

Используем также то, что согласно формуле Остроградского

$$\det U(t;\lambda)=\exp\left(\int_0^t \operatorname{sp}(JH(s))\,ds\right)=1 \tag{1.10}$$

и, стало быть,

$$\det(I_n+C_1(T)\lambda+C_2(T)\lambda^2+\cdots)=1 \tag{1.11}$$

Легко проверить, что если a — число, а $C_1, C_2, \ldots$ — матрицы порядка n, то

$$\det(aI_n + C_1\lambda + C_2\lambda^2 + \cdots) =$$
$$= a^n + a^{n-1}S_1(C_1)\lambda + a^{n-2}[aS_1(C_2) + S_2(C_1)]\lambda^2 + \cdots \qquad (1.12)$$

где точками обозначены члены, содержащие λ в степенях, высших, чем вторая, а $S_k(C)$ $(k = 1, 2, \ldots)$ означает сумму всех главных миноров порядка k матрицы C (в частности, $S_1(C) = \operatorname{sp} C$).

Таким образом, из (1.11) следует, что

$$S_1(C_1)\lambda + [S_1(C_2) + S_2(C_1)]\lambda^2 + \cdots = 0$$

Отсюда

$$S_1(C_1) = 0, \qquad S_2(C_1) + S_1(C_2) = 0 \qquad (1.13)$$

Здесь сокращения ради через C_1 и C_2 обозначены матрицы $C_1(T)$ и $C_2(T)$. Первое соотношение (1.13) следует также непосредственно из того, что $S_1(JH) = 0$. На основании формулы (1.13) и соотношений (1.3), (1.8) можно далее утверждать, что

$$D(\lambda) = \det(2I_n + C_1\lambda + C_2\lambda^2 + \cdots) =$$
$$= 2^n\left[1 + \tfrac{1}{2}S_1(C_1)\lambda + \tfrac{1}{4}(2S_1(C_2) + S_2(C_1))\lambda^2 + \cdots\right]$$

Отсюда

$$a_1 = 0, \qquad a_2 = \tfrac{1}{4}[2S_1(C_2) + S_2(C_1)] = -\tfrac{1}{4}S_2(C_1) \qquad (1.14)$$

и, стало быть, в силу (1.6)

$$\lim_{r\to\infty}\sum_{|\lambda_j|<r}\frac{1}{\lambda_j} = 0 \qquad (1.15)$$

Записывая $H(t)$ в виде

$$H(t) = \begin{pmatrix} H_{11}(t) & H_{12}(t) \\ H_{21}(t) & H_{22}(t)\end{pmatrix} \qquad (1.16)$$

где $H_{jk}(t)$ $(j, k = 1, 2)$ — матрицы порядка m, будем иметь согласно (1.9)

$$C_1 = T\begin{pmatrix} A_{21} & A_{22} \\ -A_{11} & -A_{12}\end{pmatrix}, \qquad A_{jk} = \frac{1}{T}\int_0^T H_{jk}(t)\,dt \quad (j, k = 1, 2) \qquad (1.17)$$

Для любой матрицы C справедливо соотношение

$$S_1(C^2) = S_1^2(C) - 2S_2(C)$$

ибо $S_1(C)$ — сумма собственных чисел C, а $S_2(C)$ — сумма попарных произведений этих чисел. В силу этого соотношения

$$a_2 = -\tfrac{1}{4}S_2(C_1) = \tfrac{1}{8}[S_1(C_1^2) - S_1^2(C_1)] = \tfrac{1}{8}S_1(C_1^2) \qquad (1.18)$$

а так как согласно (1.17)

$$C_1^2 = T^2\begin{pmatrix} A_{21}^2 - A_{22}A_{11} & * \\ * & A_{12}^2 - A_{11}A_{22}\end{pmatrix} \qquad (1.19)$$

где звездочками обозначены не интересующие нас матрицы, то, пользуясь (1.7) и (1.18), окончательно получаем *формулу следов:*

$$\sum\frac{1}{\lambda_j^2} = \tfrac{1}{2}T^2\operatorname{sp}(A_{11}A_{22} - A_{12}^2) \qquad (1.20)$$

Из соотношений (1.15) и (1.20) вытекает: *если при выполнении первого условия* (0.2) *краевая задача (0.3) имеет хотя бы одно положительное* (*отрицательное*) *характеристическое число, то она имеет также по крайней мере одно отрицательное* (*положительное*) *характеристическое число. Этот случай имеет место тогда и только тогда, когда*

$$\mathrm{sp}\,(A_{11}A_{22} - A_{12}^2) > 0 \tag{1.21}$$

Согласно (1.18) и (1.7) левая часть в (1.21) есть

$$-\frac{1}{2T^2}\,\mathrm{sp}\,(C_1{}^2) = -\frac{1}{2}\,\mathrm{sp}\,(JH_{\text{ср}})^2 \tag{1.22}$$

Так как J — кососимметрическая матрица, а $H_{\text{ср}}$ — симметрическая с неотрицательной формой, то все собственные числа матрицы $JH_{\text{ср}}$ являются чисто мнимыми или нулями. Поэтому условие (1.21) эквивалентно тому, что матрица $JH_{\text{ср}}$ *не является нильпотентной*, т. е. имеет по крайней мере одно собственное число, отличное от нуля. Это наверняка будет иметь место, если, кроме первого условия (0.2), будет выполняться и второе условие (0.2), в силу которого $\det H_{\text{ср}} > 0$ и все собственные числа матрицы $JH_{\text{ср}}$ является чисто мнимыми числами, отличными от нуля.

Таким образом, мы получили простое доказательство теоремы о существовании чисел $\lambda_{\pm 1}$ при выполнении условий (0.2) — теоремы, доказанной в [1a] весьма сложно.

Заметим, что формулу (1.20) можно было бы вывести еще иным путем, заменив систему (0.3) эквивалентным интегральным нагруженным уравнением

$$x(t) = \lambda \int_0^T g(t-s)\,JH(s)\,x(s)\,ds \qquad \left(g(t) = \frac{1}{2}\,\mathrm{sign}\,t\right)$$

и затем воспользовавшись для $k=2$ общим правилом вычисления k-го следа

$$\sum_j \frac{1}{\lambda_j^k}$$

через след k-го итерированного ядра уравнения. Этим методом мы позже воспользуемся в применении к несколько иной краевой задаче (§ 6, п. 2).

Чтобы отчетливо себе представить простоту формулы (1.20), заметим, что если $A = \|a_{jk}\|_1^m$, $B = \|b_{jk}\|_1^m$, $C = \|c_{jk}\|_1^m$ — три какие-либо матрицы порядка m, то

$$\mathrm{sp}\,(AC - B^2) = \sum_{j,\,k=1}^{m} (a_{jk}c_{kj} - b_{jk}b_{kj})$$

Сделаем еще следующее замечание. Пусть $L = \|l_{jk}\|_1^m$ — некоторая постоянная симплектическая матрица, т. е. $L^\tau JL = J$, где символом τ обозначается переход к транспонированной матрице.

Подстановка $x = Lx'$ преобразует уравнение (0.1) в уравнение

$$\frac{dx'}{dt} = JH'(t)\,x' \qquad (JH'(t) = L^{-1}JH(t)\,L,\ H'(t) = L^\tau H(t)\,L) \tag{1.23}$$

В самом деле, вместе с L и транспонированная матрица является симплектической, так что $LJL^{\tau}=J,\ L^{-1}J=JL^{\tau}$. Для уравнения (1.23)

$$\begin{pmatrix} A'_{11} & A'_{12} \\ A'_{21} & A'_{22} \end{pmatrix} = \frac{1}{T}\int_0^T H'(t)\,dt = L^{\tau}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{12} & A_{22} \end{pmatrix} L$$

$$\operatorname{sp}(A'_{11}A'_{22}-A'^{2}_{12}) = -\frac{1}{2}\operatorname{sp}(JH'_{\text{ср}})^2 = -\frac{1}{2}\operatorname{sp}[L^{-1}(JH_{\text{ср}})^2 L] =$$

$$= -\frac{1}{2}\operatorname{sp}(JH_{\text{ср}})^2 = \operatorname{sp}(A_{11}A_{22}-A_{12}^2)$$

Таким образом, величина (1.22) инвариантна при симплектических преобразованиях канонического уравнения (0.1), что, конечно, можно также заключить из самой формулы следов (1.20).

§ 2. Z-признаки устойчивой ограниченности решений уравнения (0.1).

1. Если $U(t)=U(t;1)$ — матрицант канонического уравнения (0.1)

$$\frac{dx}{dt}=JH(t)\,x \tag{0.1}$$

то $U(T)$ [T — период гамильтониана $H(t)$] называется *матрицей монодромии* уравнения.

Как известно, все решения уравнения (0.1) ограничены в том и только в том случае, когда все собственные числа матрицы $U(T)$ по модулю равны единице и им отвечают простые элементарные делители.

Нас, однако, будут интересовать не признаки ограниченности решений уравнения (0.1), а признаки *устойчивой ограниченности* этих решений — единственно важные в приложениях. При этом мы уславливаемся говорить, что все решения уравнения (0.1) *устойчиво ограничены*, если они остаются ограниченными при любых достаточно малых возмущениях гамильтониана $H(t)$. Точнее, это означает существование такого $\varepsilon>0$, что каков бы ни был возмущенный гамильтониан такого же периода

$$H^{\circ}(t)=H^{\circ}(t+T)=\|\overset{\circ}{h}_{jk}(t)\|_1^{2m}$$

удовлетворяющий условиям малости возмущения

$$\int_0^T |h_{jk}(t)-\overset{\circ}{h}_{jk}(t)|\,dt<\varepsilon \qquad (j,\ k=1,\ 2,\ \ldots,\ 2m)$$

все решения возмущенного уравнения $dx/dt=JH^{\circ}(t)\,x$ будут также ограничены.

Как известно, матрицант и, стало быть, матрица монодромии канонического уравнения (0.1) суть симплектические матрицы $U^{\tau}JU=J$.

При решении вопроса об устойчивой ограниченности решений уравнения (0.1) играет существенную роль понятие симплектической матрицы устойчивого типа. О вещественной симплектической матрице L говорят, что она *устойчивого типа*, если среди ее собственных векторов нет ниль-векторов ($2m$-мерный вектор $u\,(\neq 0)$ называется ниль-вектором, если $(Ju,\ u)=0$). У симплектической матрицы устойчивого типа (см. § 1[1а]) всегда все собственные числа по модулю равны единице и им отвечают простые элементарные делители. Оказывается [1а, 2], что для матрицы такого типа всегда можно указать некоторую ее окрестность, не содержащую иных вещественных симплектических матриц, кроме как устойчивого типа, что и объясняет выбор термина.

Отсюда уже очень просто следует (см. § 5 [1a]), что все решения уравнения (0.1) устойчиво ограничены, если его матрица монодромии $U(T)$ устойчивого типа. Более того, справедливо также и обратное предложение [2].

В основе всего последующего будет лежать предложение: *для гамильтониана $H(t)$ положительного типа матрицант $U(T;\lambda)$ уравнения*

$$\frac{dx}{dt} = \lambda J H(t)\, x \tag{2.1}$$

будет устойчивого типа, пока $\lambda_{-1} < \lambda < \lambda_1$ $(\lambda \neq 0)$.

А отсюда в силу сказанного выше: *все решения уравнения* (2.1) *устойчиво ограничены, пока* $\lambda_{-1} < \lambda < \lambda_1$.

Здесь числа $\lambda_{\pm 1}$ имеют смысл, указанный во введении и в § 1.

2. Последнее предложение в сочетании с формулой следов (1.20) приводит к следующему Z-признаку (определение понятия «Z-признак» см. во введении).

Все решения уравнения (0.1) положительного типа устойчиво ограничены, коль скоро

$$T^2\, \mathrm{sp}\,(A_{11}A_{22} - A_{12}^2) < 2 \tag{2.2}$$

а если $H(t)$ — четная матрица-функция, то, более того, коль скоро

$$T^2\, \mathrm{sp}\,(A_{11}A_{22} - A_{12}^2) < 4 \tag{2.3}$$

Первое утверждение непосредственно следует из того, что неравенство (2.2) согласно формуле следов (1.20) имеет своим следствием неравенство $\lambda_1 > 1$. Для доказательства второго утверждения заметим, что если в системе (0.3) сделать замену $\lambda = -\mu$, $t = -r + T$ и затем снова букву μ заменить на λ, а r на t, то система (0.3) примет вид:

$$\frac{dx}{dt} = \lambda J H(-t)\, x, \qquad x(0) + x(T) = 0 \tag{2.4}$$

Отсюда спектр системы (2.4) получается из спектра системы (0.3) путем изменения знаков всех чисел спектра на противоположные.

С другой стороны, при выполнении условия четности: $H(t) = H(-t)$ система (2.4) ничем не отличается от системы (0.3) и, стало быть, в этом случае $\lambda_{-k} = -\lambda_k$ $(k = 1, 2, \ldots)$ и формула следов (1.20) принимает вид:

$$\frac{1}{4} T^2\, \mathrm{sp}\,(A_{11}A_{22} - A_{12}^2) = \sum_{k>0} \frac{1}{\lambda_k^2} \tag{2.5}$$

Таким образом, в этом случае при выполнении неравенства (2.3) будем иметь $\lambda_1 > 1$. Заметим, что и в общем случае, когда условие четности $H(t) = H(-t)$ не выполняется, из неравенства (2.3) можно сделать некоторый вывод, а именно, что по крайней мере у одного из двух уравнений — уравнения (0.1) или уравнения $dx/dt = JH(-t)\,x$ — все решения устойчиво ограничены.

Как будет следовать из § 5, п. 2, в случае $H(t) = H(-t)$ признак (2.3) является «точным», т. е. константа 4 не может быть заменена большей.

3. Остановимся подробней на скалярном случае $m = 1$, когда система (0.1) принимает вид:

$$\begin{aligned} dx_1 / dt &= h_{21}x_1 + h_{22}x_2 \\ dx_2 / dt &= -h_{11}x_1 - h_{12}x_2 \end{aligned} \qquad (h_{12} = h_{21}) \tag{2.6}$$

и матрицы TA_{11}, TA_{22}, TA_{12} превращаются в скаляры:

$$A = \int_0^T h_{11}dt, \qquad B = \int_0^T h_{12}dt, \qquad C = \int_0^T h_{22}dt \tag{2.7}$$

Теперь признаки (2.2) и (2.3) будут записываться в виде:

$$\text{а)} \quad AC - B^2 < 2, \qquad \text{б)} \quad AC - B^2 < 4 \tag{2.8}$$

Ранее мы указали другой общий признак (см. § 7 [1a]):

$$\sqrt{AC} + B_* < 2 \qquad \left(B_* = \int_0^T |h_{12}|\, dt \geqslant |B|\right) \tag{2.9}$$

Так как из (2.9) всегда следует, что

$$\sqrt{AC} \pm B < 2, \qquad AC - B^2 = (\sqrt{AC} + B)(\sqrt{AC} - B) < 4 \tag{2.10}$$

то для четной матрицы-функции $H(t)$ Z-признак (2.8 б) всегда «сильней» Z-признака (2.9).

Если же $H(t)$ не является четной функцией, то признак (2.8 б) отпадает, и вместо него будем иметь признак (2.8 а), относительно которого уже нельзя будет утверждать, что он сильней признака (2.9) (как и наоборот), но его большее удобство в вычислительном отношении очевидно. Если $\sqrt{AC} - |B| < 1$, то $AC - B^2 < \sqrt{AC} + B_*$, и в этом случае Z-признак (2.8) всегда «лучше» Z-признака (2.9).

Укажем еще на следующее отличие в признаках (2.8) и (2.9).

Если в системе (2.7) проделать преобразование:

$$x_1^* = \alpha x_1 + \beta x_2, \qquad x_2^* = \gamma x_1 + \delta x_2$$

где α, β, γ, δ — вещественные числа, удовлетворяющие условию $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$, то канонический вид системы (2.6) сохранится, при этом выражение $AC - B^2$ останется неизменным, в то время как левая часть (2.9) изменится. Определить значения α, β, γ, δ, при которых левая часть (2.9) будет иметь возможно меньшие значения, повидимому, нелегко.

4. Признак (2.9) является частным случаем общего признака, установленного (см. § 7 [1a]) при любом m. Последний может быть сформулирован следующим образом.

Решения уравнения (0.1) *устойчиво ограничены, коль скоро наибольшее собственное число матрицы*

$$\left\| \int_0^T |h_{j,\, k+m}(t)|\, dt \right\|_1^{2m}$$

меньше двух.

Здесь положено $h_{j,\,2m+p}(t) = h_{j,\,p}(t)$ $(p = 1, \ldots, m;\ j = 1, \ldots, 2m)$. С увеличением m плотность расположения характеристических чисел краевой задачи (0.3) возрастает и признак (2.2) [равно как и (2.3) для четного $H(t)$] становится более грубым и теряет преимущества перед только что сформулированным признаком.

Ниже мы покажем, что на основании формулы (1.20) могут быть получены более сильные признаки, нежели (2.2) и (2.3), эффективность которых с возрастанием m может даже повышаться.

Пусть некоторый «вспомогательный» гамильтониан $H^\circ(t) = H^\circ(t + T)$ положительного типа является «минорантой» для основного $H(t)$, т. е.

$$(H(t)\xi,\ \xi) \geqslant (H^\circ(t)\xi,\ \xi)$$

Тогда (см. [1a], теор. 3.3) будут выполняться неравенства

$|\lambda_j| \leqslant |\lambda_j^\circ|$ $\quad (j = \pm 1,\ \pm 2, \ldots)$, где $\ldots \leqslant \lambda_{-2}^\circ \leqslant \lambda_{-1}^\circ (<0<) \lambda_1^\circ \leqslant \lambda_2^\circ \leqslant \ldots$ — характеристические числа краевой задачи

$$\frac{dx}{dt} = \lambda J H^\circ(t) x, \qquad x(0) + x(T) = 0$$

Следовательно, согласно (1.20)

$$\frac{1}{\lambda_1^2} = \frac{T^2}{2}\,\mathrm{sp}\,(A_{11}A_{22} - A_{12}^2) - \sum_{j \neq 1} \frac{1}{\lambda_j^2} \leqslant \frac{T^2}{2}\,\mathrm{sp}\,(A_{11}A_{22} - A_{12}^2) - \sum_{j \neq 1} \frac{1}{\lambda_j^{\circ 2}}$$

С другой стороны, если обозначать, через A_{jk}° $(j,\ k = 1,\ 2)$ матрицы, в которые переходят матрицы A_{jk} $(j,\ k = 1,\ 2)$ при замене H на H°, то

$$\sum_{j \neq 1} \frac{1}{\lambda_j^{\circ 2}} = \frac{T^2}{2}\,\mathrm{sp}\,(\overset{\circ}{A}_{11}\overset{\circ}{A}_{22} - \overset{\circ}{A}{}_{12}^{2}) - \frac{1}{\lambda_1^{\circ 2}}$$

и, стало быть,

$$\frac{1}{\lambda_j^{\circ 2}} \leqslant \frac{1}{\lambda_1^2} \leqslant \frac{T^2}{2}\,\mathrm{sp}\,(A_{11}A_{22} - A_{12}^2 - \overset{\circ}{A}_{11}\overset{\circ}{A}_{22} + \overset{\circ}{A}{}_{12}^{2}) + \frac{1}{\lambda_1^{\circ 2}} \tag{2.10}$$

Для случая четных $H(t)$ и $H^\circ(t)$, когда $\lambda_1 = -\lambda_{-1}$ и $\lambda_1^\circ = -\lambda_{-1}^\circ$, оценка (2.10) усиливается:

$$\frac{1}{\lambda_1^{\circ 2}} \leqslant \frac{1}{\lambda_1^2} \leqslant \frac{T^2}{4}\,\mathrm{sp}\,(A_{11}A_{22} - A_{12}^2 - \overset{\circ}{A}_{22}\overset{\circ}{A}_{11} + \overset{\circ}{A}{}_{12}^{2}) + \frac{1}{\lambda_1^{\circ 2}} \tag{2.11}$$

Оценками (2.10) и (2.11) можно пользоваться, когда есть возможность построить миноратный гамильтониан $H^\circ(t)$ положительного типа, для которого число λ_1° сравнительно просто вычисляется.

Если матрица-функция $H^\circ(t)$ вырождается в постоянную матрицу

$$H^\circ(t) = K = \begin{pmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{pmatrix} \tag{2.12}$$

то тогда будем иметь

$$A_{jk} = K_{jk} \quad (j,\ k = 1,\ 2), \qquad \lambda_1^\circ = \frac{\pi}{T\varkappa_{\text{м}}} \tag{2.13}$$

где $\varkappa_{\text{м}}$ — наибольшее из положительных собственных чисел векового уравнения $\det(K - i\varkappa J) = 0$, содержащего между прочим в развернутом виде только четные степени $\varkappa$. Отсюда получаем следующее предложение.

При выполнении условия

$$(H(t)\xi,\ \xi) \geqslant (K\xi,\ \xi) > 0 \qquad \text{при} \quad (\xi,\ \xi) > 0 \tag{2.14}$$

где K — *вещественная симметрическая матрица порядка* $2m$, *все решения уравнения* (0.1) *устойчиво ограничены, коль скоро*

$$\operatorname{sp}(A_{11}A_{22} - A_{12}^2) < \frac{2}{T^2} + \operatorname{sp}(K_{11}K_{22} - K_{11}^2) - \frac{2\varkappa_{\text{м}}^2}{\pi^2} \tag{2.15}$$

Если же, кроме того, $H(t)$ — *четная матрица-функция, то этот* Z-*признак допускает усиление, а именно, заменяется следующим*

$$\operatorname{sp}(A_{11}A_{22} - A_{12}^2) < \frac{4}{T^2} + \operatorname{sp}(K_{11}K_{12} - K_{12}^2) - \frac{4\varkappa_{\text{м}}^2}{\pi^2} \tag{2.16}$$

Пусть, например, выполняется условие

$$(H(t)\xi,\ \xi) \geqslant a(\xi,\ \xi) \tag{2.17}$$

где $a>0$. В этом случае можно положить $K=aI_{2m}$ и $\operatorname{sp}(K_{11}K_{22}-K_{12}^2)=ma^2$. Нетрудно также видеть, что теперь $\varkappa_{\text{м}} = a$ и, следовательно, $\lambda_1^\circ = \pi / aT$.

Таким образом, имеет место предложение: *при выполнении условия* (2.17) *все решения уравнения* (0.1) *устойчиво ограничены, коль скоро*

$$\operatorname{sp}(A_{11}A_{22} - A_{12}^2) < \frac{2}{T^2} + \left(m - \frac{2}{\pi^2}\right)a^2 \tag{2.18}$$

а если $H(t)$ — *четная матрица-функция, то, более того, коль скоро*

$$\operatorname{sp}(A_{11}A_{22} - A_{12}^2) < \frac{4}{T^2} + \left(m - \frac{4}{\pi^2}\right)a^2 \tag{2.19}$$

Подчеркнем, что неравенства (2.18) и (2.19) выражают то обстоятельство, что $\lambda_1 > 1$. При выполнении условия (2.17) $\lambda_1 < \lambda_1^\circ = \pi / aT$.

Таким образом, неравенства (2.18) и (2.19) заведомо не будут выполняться при $a > \pi / T$. Если же $aT < \pi$, то для четных $H(t)$ признак (2.19), очевидно, сильней признака (2.3). Заметим еще, что Z-признаками (2.16) и (2.19) можно пользоваться не только тогда, когда $H(t)$ — четная матрица-функция, а также в случаях, когда известно, что спектр краевой задачи (0.3) располагается симметрично относительно начала координат. Пример такого случая представится нам в § 7.

§ 3. Другие признаки устойчивой ограниченности решений канонического уравнения. 1. Как будет показано ниже, существует бесконечное множество преобразований канонического уравнения, сохраняющих его канонический вид и периодический характер. Записывая тот или иной Z-признак для преобразованного уравнения, мы тем самым получаем некоторый признак устойчивой ограниченности решений первоначального канонического уравнения, который уже, вообще говоря, не будет Z-признаком. Поясним это сперва на простом примере остроумного преобразования, предложенного В. А. Якубовичем[1]. Пусть попрежнему гамильтониан $H(t)$ удовлетворяет условию (2.17), где

$$\frac{k\pi}{T} \leqslant a < \frac{(k+1)\pi}{T} \tag{3.1}$$

[1] Это преобразование приведено в обзорной статье В. М. Старжинского [1].

причем, допуская теперь и случаи, когда форма $(H(t)\xi, \xi)$ может иметь любой знак или быть неопределенной, будем предполагать, что k есть целое число $\gtreqless 0$. Положим

$$Q_k(t) = \exp\left(\frac{k\pi}{T} tJ\right) = \cos\frac{k\pi t}{T} I_{2m} + \sin\frac{k\pi t}{T} J \tag{3.2}$$

Тогда будем иметь

$$Q_k(t+T) = (-1)^k Q_k(t), \qquad Q_k^{-1}(t) = Q_k(-t) = Q_k^{\tau}(t) \tag{3.3}$$

где символ τ попрежнему обозначает переход к транспонированной матрице. Таким образом, Q_k — ортогональная матрица; кроме того, Q_k — симплектическая матрица, так как $Q_k^{\tau} J Q_k = Q_k^{\tau} Q_k J = J$.

Преобразование В. А. Якубовича заключается в подстановке $x = Q_k(t)y$. Так как

$$\frac{dx}{dt} = Q_k(t)\frac{dy}{dt} + \frac{k\pi}{T} JQ(t)y \tag{3.4}$$

то в новых переменных уравнение (0.1) примет вид:

$$\frac{dy}{dt} = JG(t)y, \quad G(t) = Q_k^{\tau}(t)H(t)Q_k(t) - \frac{k\pi}{T} I_{2m} \tag{3.5}$$

Здесь $G(t)$ — снова некоторая периодическая матрица-функция. Так как $\eta = Q_k(t)\xi$ — ортогональное преобразование, т. е. $(\eta, \eta) = (\xi, \xi)$, то

$$(G(t)\xi, \xi) = (H(t)\eta, \eta) - \frac{k\pi}{T}(\xi, \xi) \geqslant a(\eta, \eta) - \frac{k\pi}{T}(\xi, \xi) = \left(a - \frac{k\pi}{T}\right)(\xi, \xi) \geqslant 0$$

Полагая

$$G(t) = \begin{pmatrix} G_{11}(t) & G_{12}(t) \\ G_{21}(t) & G_{22}(t) \end{pmatrix}$$

где $G_{jk}(t)$ $(j, k = 1, 2)$ — матрицы-функции m-го порядка, и, пользуясь тем, что

$$Q_k(t) = \begin{pmatrix} \cos\frac{k\pi t}{T} I_m & \sin\frac{k\pi t}{T} I_m \\ -\sin\frac{k\pi t}{T} I_m & \cos\frac{k\pi t}{T} I_m \end{pmatrix} \tag{3.6}$$

легко найдем, что

$$\begin{aligned} G_{11}(t) = \cos^2\frac{k\pi t}{T} H_{11}(t) - \sin\frac{k\pi t}{T}\cos\frac{k\pi t}{T}(H_{12}(t) + H_{21}(t)) + \\ + \sin^2\frac{k\pi t}{T} H_{22}(t) - \frac{k\pi}{T} I_m \end{aligned} \tag{3.7}$$

$$\begin{aligned} G_{22}(t) = \sin^2\frac{k\pi t}{T} H_{11}(t) - \sin\frac{k\pi t}{T}\cos\frac{k\pi t}{T}(H_{12}(t) + H_{21}(t)) + \\ + \cos^2\frac{k\pi t}{T} H_{22}(t) - \frac{k\pi}{T} I^m \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} G_{12}(t) = G_{21}^{\tau} = \sin\frac{k\pi t}{T}\cos\frac{k\pi t}{T}(H_{11}(t) - H_{22}(t)) + \\ + \cos^2\frac{k\pi t}{T} H_{12}(t) - \sin^2\frac{k\pi t}{T} H_{21}(t) \end{aligned}$$

Полагая далее

$$A_{ij}^{(k)} = \frac{1}{T}\int_0^T G_{ij}(t)\,dt \quad (i, j = 1, 2) \tag{3.8}$$

и применяя к уравнению (3.5) признак (2.18), придем к заключению: *если* $H(t)$ *удовлетворяет условию* (2.17), *а целое число* k *определено из условия* (3.1), *то все решения уравнения* (0.1) *устойчиво ограничены, коль скоро*

$$\operatorname{sp}(A_{11}^{(k)}A_{22}^{(k)}-(A_{12}^{(k)})^2)<\frac{2}{T^2}+\left(m-\frac{2}{\pi^2}\right)\left(a-\frac{k\pi}{T}\right)^2 \tag{3.9}$$

2. Этот признак допускает обобщение на общий случай, когда, вместо условия (2.17), выполняется при некоторой постоянной матрице K условие

$$(H(t)\xi,\xi)\geqslant(K\xi,\xi)>0 \quad \text{при } (\xi,\ \xi)>0 \tag{3.10}$$

Заметим сперва, что преобразование В. А. Якубовича является частным случаем преобразования

$$x=Q(t)y,\qquad Q(t)=\exp(J\Gamma t) \tag{3.11}$$

причем Γ — некоторая вещественная симметрическая матрица. При этом условии

$$Q^{\tau}(t)=\exp(-\Gamma Jt)=-J\exp(-J\Gamma t)J \tag{3.12}$$

и, следовательно,

$$Q^{\tau}(t)JQ(t)=J\exp(-J\Gamma t)\exp(J\Gamma t)=J$$

т. е. матрица $Q(t)$ является симплектической.

Так как

$$\frac{dQ}{dt}=J\Gamma Q(t),\qquad Q^{-1}(t)=-JQ^{\tau}(t)J \tag{3.13}$$

то подстановка (3.11) преобразует уравнение (0.1) в уравнение

$$\frac{dy}{dt}=JH^{(\Gamma)}(t)y,\quad H^{(\Gamma)}(t)=Q^{\tau}(t)(H(t)-\Gamma)Q(t) \tag{3.14}$$

Матрица-функция $H^{(\Gamma)}(t)$ будет периодической, если

$$Q(t+T)=\pm Q(t) \tag{3.15}$$

а это условие будет выполнено, если у матрицы $iJ\Gamma$ имеется полная система линейно независимых собственных векторов v_j $(j=\pm1,\ldots,\pm m)$

$$iJ\Gamma v_j=\gamma_j v_j \qquad (\gamma_{-j}=-\gamma_j;\ j=1,\ldots,m)$$

с собственными числами, которые либо все являются четными кратностями π/T, либо все нечетными кратностями π/T.

После этих предварительных общих замечаний вернемся к рассмотрению условия (3.10).

Так как матрица iJ эрмитова, а K — симметрическая матрица с положительной формой $(K\xi,\xi)$, то найдется система линейно независимых комплексных векторов v_j $(j=\pm 1,\ldots,\pm m)$ такая, что

$$Kv_j = i\varkappa_j J v_j, \quad i(Jv_j, v_k) = \delta_{jk}\operatorname{sign}\varkappa_j \quad (j, k = \pm 1, \ldots, \pm m) \tag{3.16}$$

где $\varkappa_j$ — корни векового уравнения $\det(K - i\varkappa J) = 0$, причем

$$\varkappa_{-j} = -\varkappa_j, \quad v_{-j} = \overline{v}_j \quad (j = 1, \ldots, m)$$

Здесь черта обозначает переход к комплексно-сопряженному вектору.

Выберем целые числа $k_j \geqslant 0$ $(j = 1, \ldots, m)$ одной и той же кратности так, чтобы

$$\frac{\pi}{T} k_j \leqslant \varkappa_j \quad (j = 1, \ldots, m) \tag{3.17}$$

и затем определим вещественную матрицу Γ равенствами

$$\Gamma v_j = i\frac{\pi}{T} k_j J v_j \quad (j = \pm 1, \ldots, \pm m, \ k_{-j} = -k_j) \tag{3.18}$$

Тогда для любого вектора $\xi = \Sigma c_j v_j$ $(c_{-j} = \overline{c}_j)$ в силу соотношений

$$(\Gamma v_j, v_k) = \frac{\pi}{T} |k_j| \delta_{jk} \quad (j, k = \pm 1, \ldots, \pm m)$$

будем иметь

$$(\Gamma\xi, \xi) = \frac{2\pi}{T}\sum_{j=1}^{m} |k_j|\,|c_j|^2 \leqslant 2\sum_{j=1}^{m} \varkappa_j |c_j|^2 = (K\xi, \xi)$$

При таком выборе матрицы Γ матрица-функция $Q(t)$ будет обладать всеми требуемыми свойствами. Кроме того, будем иметь согласно (3.14)

$$(H^{(\Gamma)}(t)\xi, \xi) = (H(t)\eta, \eta) - (\Gamma\eta, \eta) \geqslant ((K - \Gamma)\eta, \eta)$$

где $\eta = Q(t)\xi$. Таким образом,

$$(H^{(\Gamma)}(t)\xi, \xi) \geqslant (H^\circ(t)\xi, \xi), \quad H^\circ(t) = Q^\tau(t)(K - \Gamma)Q(t) \tag{3.19}$$

Стало быть, если положить

$$\frac{1}{T}\int_0^T H^{(\Gamma)}(t)\,dt = \begin{pmatrix} A_{11}^{(\Gamma)} & A_{12}^{(\Gamma)} \\ A_{21}^{(\Gamma)} & A_{22}^{(\Gamma)} \end{pmatrix}, \qquad \frac{1}{T}\int_0^T H^\circ(t)\,dt = \begin{pmatrix} A_{11}^\circ & A_{12}^\circ \\ A_{21}^\circ & A_{22}^\circ \end{pmatrix}$$

то для первых положительных характеристических чисел $\lambda_1^{(\Gamma)}$ и λ_1° краевых задач

$$\frac{dy}{dt} = \lambda J H^{(\Gamma)}(t) y, \quad y(0) + y(T) = 0 \tag{3.20}$$

$$\frac{dy}{dt} = \lambda J H^\circ(t) y, \quad y(0) + y(T) = 0 \tag{3.21}$$

получим согласно (2.10) соотношение

$$\frac{1}{(\lambda_1^{(\Gamma)})^2} \leqslant \frac{T^2}{2}\operatorname{sp}\left(A_{11}^{(\Gamma)}A_{22}^{(\Gamma)} - (A_{12}^{(\Gamma)})^2 - A_{11}^\circ A_{22}^\circ + (A_{12}^\circ)^2\right) - \frac{1}{\lambda_1^{\circ 2}} \tag{3.22}$$

где

$$\lambda_1^{(\Gamma)} = \lambda_1(H^{(\Gamma)}), \quad \lambda_1^\circ = \lambda_1(H^\circ)$$

Нетрудно теперь вычислить λ_1°. Для этого проделаем в (3.19) обратное преобразование:

$$y = Q^{-1}(t)x = \exp(-J\Gamma t)x$$

Легко понять, что оно преобразует систему (3.20) в систему

$$\frac{dx}{dt} = J(\Gamma + \lambda(K - \Gamma))x, \quad x(0) + (-1)^{\varepsilon} x(T) = 0 \tag{3.23}$$

где ε равно 0 или 1 в зависимости от того, будут ли все k_j четными или нечетными.

В силу (3.16) и (3.18) дифференциальное уравнение (3.23) будет иметь независимые решения

$$x_j = \exp\left\{i\left[\frac{\pi k_j}{T} + \lambda\left(\varkappa_j - \frac{\pi k_j}{T}\right)\right]t\right\} v_j \quad (j = \pm 1, \ldots, \pm m)$$

Отсюда все характеристические числа краевой задачи (3.23) найдутся из уравнений

$$\pi k_j + \lambda(T\varkappa_j - \pi k_j) = \pi + N\pi$$

где N — любое целое число той же четности, что и все числа k_j. Стало быть, характеристические числа краевой задачи (3.23) распадаются на серии:

$$\lambda_j^{(p)} = \frac{(2p+1)\pi}{T\varkappa_j - \pi k_j} \quad (j = \pm 1, \ldots, \pm m: \ p = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

Для наименьшего положительного числа λ_1° получаем значение:

$$\lambda_1^{\circ} = \pi / \max(T\varkappa_j - \pi k_j) \quad (1 \leqslant j \leqslant m) \tag{3.24}$$

Так как $\sum_{p=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(2p+1)^2} = \frac{\pi^2}{4}$, то одновременно находим

$$\frac{T^2}{2} \operatorname{sp}(A_{11}^{\circ} A_{22}^{\circ} - A_{12}^{\circ}) = 2 \sum_{j=1}^{m} \sum_{p=-\infty}^{\infty} \frac{1}{[\lambda_j^{(p)}]^2} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{m} [T\varkappa_j - \pi k_j]^2 \tag{3.25}$$

Таким образом, на основании (3.22), (3.24) и (3.25) заключаем: *если* $H(t)$ *удовлетворяет условию* (3.10), *то все решения уравнения* (0.1) *устойчиво ограничены, коль скоро*

$$T^2 \operatorname{sp}(A_{11}^{(\Gamma)} A_{22}^{(\Gamma)} - (A_{12}^{(\Gamma)})^2) < 2 + \sum_{j=1}^{m} (T\varkappa_j - \pi k_j)^2 - \frac{2}{\pi^2} \max_j (T\varkappa_j - \pi k_j)^2 \tag{3.26}$$

Неравенство (3.26) выражает то обстоятельство, что $\lambda_1(H^{(\Gamma)}) > 1$. Однако для уравнения (0.1) ононе является Z-признаком, так как $\lambda_1(H^{(\Gamma)})$ вовсе не совпадает с $\lambda_1(H)$.

В самом деле, если проделать в системе (3.20) обратное преобразование: $y = Q^{-1}(t)x$, то обнаружится, что $\lambda_1^{(\Gamma)} = \lambda_1(H^{(\Gamma)})$ является первым положительным характеристическим числом краевой задачи

$$\frac{dx}{dt} = J[\Gamma + \lambda(H(t) - \Gamma)]x = 0, \quad x(0) + (-1)^{\varepsilon} x(T) = 0$$

Пользуясь понятием *области устойчивости*, введенным И. М. Гельфандом и В. Б. Лидским[2], можно утверждать, что неравенство (3.26) выражает тот факт, что $H(t)$ и Γ принадлежат одной и той же области устойчивости. Заметим, что коль скоро числа γ_j и векторы v_j вычислены, вычисление левой части (3.24) не представляет особых затруднений.

Замечание. Если числа k_j ($j = 1, \ldots, m$) выбрать, исходя из условий

$$\frac{k_j \pi}{T} \leqslant \varkappa_j \leqslant \frac{(k_j + 1)\,\pi}{T}$$

то они могут оказаться не одной четности и равенство (3.15) не будет иметь места. Однако при таком выборе всегда $Q(t)$ будет иметь период $2T$, и этот же период, следовательно, будет иметь матрица-функция $H^{(\Gamma)}(t)$.

Стало быть, и при таком выборе функций $Q(t)$ можно будет получить признак типа (3.26), рассматривая уже $H^{(\Gamma)}(t)$ как функцию периода $2T$. Это замечание немедленно обобщается. Пусть k_j ($j = 1, 2, \ldots$) — любые рациональные числа, удовлетворяющие неравенствам (3.17). Тогда соответствующая функция $Q(t)$ будет иметь период $2NT$, где N — наименьшее кратное знаменателей чисел k_j; поэтому и при таком выборе чисел k_j; можно получить признак типа (3.26).

§ 4. Признак устойчивой ограниченности решений уравнения (0.8) положительного типа. 1. Перейдем теперь к изучению дифференциального уравнения

$$\frac{d^2y}{dt^2} + P(t)\,y = 0, \qquad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} \tag{0.8}$$

в котором $y(t)$ есть m-мерная вектор-функция, а $P(t) = P(t+T) = \| p_{jk}(t) \|_1^m$ — симметричная матрица-функция периода T.

Аналогично тому, как это было условлено для канонического уравнения (0.1), будет говорить, что все решения уравнения (0.8) *устойчиво ограничены*, если вместе с ними остаются ограниченными также все решения любого возмущенного уравнения $d^2y / dt^2 + P^\circ(t)\,y = 0$ с симметрической матрицей-функцией

$$P^\circ(t) = P^\circ(t+T) = \| \overset{\circ}{p}_{jk}(t) \|_1^m$$

удовлетворяющей условию малости возмущения

$$\int_0^T | \overset{\circ}{p}_{jk}(t) - p_{jk}(t) |\, dt < \varepsilon$$

где $\varepsilon > 0$ — число, определяемое по $P(t)$.

Уравнение (0.8), очевидно, эквивалентно канонической системе:

$$\frac{dy}{dt} = lz, \qquad \frac{dz}{dt} = -\frac{1}{l}\,P(t)\,y \tag{4.1}$$

где l — какое-либо число, отличное от нуля.

Если ввести прямую сумму $x = y \dotplus z$ векторов y и z, то систему (4.1) можно будет записать в виде канонического уравнения (0.1) с

$$H(t) = \begin{pmatrix} l^{-1} P(t) & 0 \\ 0 & l I_m \end{pmatrix} \tag{4.2}$$

Уравнение (0.8) называется уравнением положительного типа, если соответствующая каноническая система (4.1) при $l > 0$ положительного типа.

Очевидно, уравнение (0.8) будет уравнением положительного типа в том и только в том случае, если матрица-функция $P(t)$ будет положительного типа, т. е. будет удовлетворять условиям (0.2).

Для матрицы $H(t)$ вида (4.2), очевидно,

$$\operatorname{sp}(A_{11}A_{22} - A_{12}^2) = \frac{1}{T}\int_0^T \operatorname{sp} P(t)\,dt$$

Так как устойчивая ограниченность решений системы (4.1), очевидно, влечет устойчивую ограниченность решений уравнения (0.7), то из Z-признака (2.15) легко получается Z-признак для уравнения (0.8), гласящий следующее.

Если выполняется условие

$$(P(t)\eta, \eta) \geqslant (P^{(1)}\eta, \eta) > 0 \quad \text{при } \eta \neq 0 \tag{4.3}$$

где $P^{(1)}$ — некоторая постоянная вещественная симметрическая матрица m-го порядка, то все решения уравнения (0.8) *устойчиво ограничены, коль скоро*

$$T\int_0^T \operatorname{sp} P(t)\,dt < 4 + T^2 \operatorname{sp} P^{(1)} - \frac{4\omega_{\text{м}}{}^2 T^2}{\pi^2} \tag{4.4}$$

где $\omega_{\text{м}}{}^2$ — наибольшее собственное число матрицы $P^{(1)}$. В частности, если

$$(P(t)\eta, \eta) \geqslant a^2(\eta, \eta) \tag{4.5}$$

где $0 < a < \pi / T$, то все решения уравнения (0.8) *устойчиво ограничены, коль скоро*

$$T\int_0^T \operatorname{sp} P(t)\,dt < 4 + \left(m - \frac{4}{\pi^2}\right)a^2 \tag{4.6}$$

В самом деле, краевая задача (0.3) для функции $H(t)$ вида (4.2), очевидно, эквивалентна краевой задаче

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \lambda^2 P(t) = 0, \qquad y(0) + y(T) = y'(0) + y'(T) = 0$$

А так как здесь λ вошло в квадрате, то у краевой задачи (0.3) с функцией $H(t)$ вида (4.2) спектр будет располагаться симметрично относительно нуля (как если бы $H(t)$ была четной функцией).

Поэтому, вместо признака (2.15) мы вправе воспользоваться признаком (2.16). В рассматриваемом случае

$$K = \begin{pmatrix} l^{-1}P^{(1)} & 0 \\ 0 & lI_m \end{pmatrix}, \qquad \operatorname{sp}(K_{11}K_{22} - K_{12}^2) = \operatorname{sp} P^{(1)}$$

$$\det(K - \varkappa J) = \det\begin{pmatrix} l^{-1}P^{(1)} & \varkappa I_m \\ -\varkappa I_m & lI_m \end{pmatrix} = \det(P^{(1)} - \varkappa^2 I_m)$$

так что $\varkappa_{\text{м}}{}^2 = \omega_{\text{м}}{}^2$. Таким образом, Z-признак (2.16) принимает теперь вид неравенства (4.4).

Если $P^{(1)} = a^2 I_m$, то $\omega_{\text{м}}{}^2 = a^2$ и $\operatorname{sp} P^{(1)} = ma^2$, откуда получается Z-признак (4.6).

2. Z-признаком (4.6) можно пользоваться и при $a=0$, если только выполняется условие положительности в среднем

$$\int_0^T (P(t)\eta,\ \eta)\,dt > 0 \quad \text{при } \eta \neq 0. \tag{4.7}$$

Однако в этом случае Z-признак принимает вид:

$$T\int_0^T \operatorname{sp} P(t)\,dt < 4 \tag{4.8}$$

и он оказывается слабей Z-признака, установленного еще в нашем первом сообщении [1б] по этим вопросам:

$$T\int_0^T p_{\text{м}}(t)\,dt < 4 \tag{4.9}$$

где $p_{\text{м}}(t)$ — наибольшее собственное число матрицы $P(t)$. Это следует из того, что $p_{\text{м}}(t) \leqslant \operatorname{sp} P(t)$. Однако в вычислительном отношении признак (4.9) весьма сложен. В связи с этим укажем, что в § 7 [1а] нами было установлено предложение.

Все решения уравнения (0.8) *устойчиво ограничены, коль скоро квадратичная форма*

$$\sum_{j,\,k=1}^{n}\left(\frac{4}{T}\,\delta_{jk} - \int_0^T |\,p_{jk}(t)\,|\,dt\right)\eta_j\eta_k \tag{4.10}$$

положительна.

Как известно, проверка положительности формы (4.10) выполняется при помощи простых рациональных операций. Однако здесь могут возникнуть трудности при вычислении интегралов от абсолютных величин функций $p_{jk}(t)$ и в особенности в тех случаях, когда в выражения для этих функций входят некоторые параметры.

Заметим, что сформулированное предложение было установлено в § 7 [1а] в единственном предположении (4.7). В силу теоремы II, которая будет доказана в § 6, ограничение (4.7) можно ослабить, заменив его условием (0.9) неотрицательности в среднем формы $(P(t)\eta, \eta)$ и условием (0.10).

Z-признак, заключающийся в положительности формы (4.10), во многих случаях (см. [1а], § 9, п. 2) сильней признака (4.9) и, значит, и подавно признака (4.8).

3. Рассмотрим теперь тот случай, когда

$$(P(t)\eta, \eta) \geqslant a^2(\eta, \eta) \qquad \left(\frac{k\pi}{T} \leqslant a < \frac{(k+1)\pi}{T}\right) \tag{4.11}$$

где $k>0$ — целое число. Беря в (4.1) $l=a$, имеем

$$H_{11}(t) = a^{-1}P(t), \qquad H_{12} \equiv H_{21} \equiv 0, \qquad H_{22}(t) \equiv aI_m$$

а следовательно, согласно (3.7) и (3.8),

$$G_{11}(t) = a^{-1}\cos^2\frac{k\pi t}{T}\,P(t) + a\sin^2\frac{k\pi t}{T}\,I_m - \frac{k\pi}{T}\,I_m$$

$$G_{22}(t) = a^{-1}\sin^2\frac{k\pi t}{T}\,P(t) + a\cos^2\frac{k\pi t}{T}\,I_m - \frac{k\pi}{T}\,I_m$$

$$G_{12}(t) = G_{21}^{\tau}(t) = \sin\frac{k\pi t}{T}\cos\frac{k\pi t}{T}\,(a^{-1}P(t) - aI_m)$$

$$A_{11}^{(k)} = \frac{1}{T}\int_0^T G_{11}(t)\,dt = \frac{1}{aT}\int_0^T \cos^2\frac{k\pi t}{T}P(t)\,dt + \left(\frac{a}{2} - \frac{k\pi}{T}\right)I_m$$

$$A_{22}^{(k)} = \frac{1}{T}\int_0^T G_{22}(t)\,dt = \frac{1}{2aT}\int_0^T \sin^2\frac{k\pi t}{T}P(t)\,dt + \left(\frac{a}{2} - \frac{k\pi}{T}\right)I_m$$

$$A_{12}^{(k)} = \frac{1}{T}\int_0^T G_{12}(t)\,dt = \frac{1}{2aT}\int_0^T \sin\frac{2k\pi t}{2}P(t)\,dt$$

Вводя матричные коэффициенты Фурье

$$A_0 = \frac{1}{T}\int_0^T P(t)\,dt,\quad A_k = \frac{2}{T}\int_0^T \cos\frac{2k\pi t}{T}P(t)\,dt,\quad B_k = \frac{2}{T}\int_0^T \sin\frac{2k\pi t}{T}P(t)\,dt$$

можем написать

$$A_{11}^{(k)} = \frac{1}{2a}\left(A_0 + \frac{1}{2}A_k\right) + \left(\frac{a}{2} - \frac{k\pi}{T}\right)I_m,\quad A_{12}^{(k)} = \frac{1}{4a}B_k$$

$$A_{22}^{(k)} = \frac{1}{2a}\left(A_0 - \frac{1}{2}A_k\right) + \left(\frac{a}{2} - \frac{k\pi}{T}\right)I_m$$

поэтому

$$\operatorname{sp}(A_{11}^{(k)}A_{22}^{(k)} - (A_{12}^{(k)})^2) = \frac{1}{4a^2}\operatorname{sp}\left(A_0^2 - \frac{1}{4}A_k^2 - \frac{1}{4}B_k^2\right) + \\ + \frac{1}{a}\left(\frac{a}{2} - \frac{k\pi}{T}\right)\operatorname{sp}A_0 + m\left(\frac{a}{2} - \frac{k\pi}{T}\right)^2$$

Внося это выражение в (3.9), получим неравенство

$$\operatorname{sp}(A_0 - a^2 I_m)^2 < \frac{8a^2}{T^2} + \frac{1}{4}\operatorname{sp}(A_k^2 + B_k^2) - 4a\left(a - \frac{k\pi}{T}\right)\operatorname{sp}A_0 + \\ + 4a^2\left[\frac{mk\pi}{T}\left(a - \frac{k\pi}{T}\right) + \left(m - \frac{2}{\pi^2}\right)\left(a - \frac{k\pi}{T}\right)^2\right] \tag{4.12}$$

Таким образом, *при выполнении условий* (4.11) *все решения уравнения* (0.8) *будут устойчиво ограничены, коль скоро выполняется неравенство* (4.12).

Оно принимает особенно простой вид при $a = k\pi / T$, а именно

$$\operatorname{sp}\left(A_0 - \frac{k^2\pi^2}{T^2}I_m\right)^2 < \frac{8k^2\pi^2}{T^4} + \frac{1}{4}\operatorname{sp}(A_k^2 + B_k^2) \tag{4.13}$$

Признаки (4.12) и (4.13) являются, повидимому, новыми и для скалярного случая $m = 1$.

Сформулируем, например, подробней, что будет означать признак (4.13) для обычного скалярного уравнения

$$y'' + p(t)\,y = 0,\qquad p(t) \sim a_0 + \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\cos\frac{2k\pi t}{T} + b_k\sin\frac{2k\pi t}{T}\right) \tag{4.14}$$

Согласно этому признаку все решения уравнения (4.14) будут устойчиво ограничены, коль скоро при некотором целом $k \geqslant 1$

$$p(t) \geqslant \frac{k^2\pi^2}{T^2},\qquad \left(a_0 - \frac{k^2\pi^2}{T^2}\right)^2 < \frac{8k^2\pi^2}{T^4} + \frac{a_k^2 + b_k^2}{4}$$

4. Естественно, что и признак (3.26) устойчивой ограниченности решений канонического уравнения (0.1) может быть переформулирован в некоторый признак устойчивой ограниченности решений уравнений (0.8).

В этом пункте мы укажем лишь на то, что методы, развитые в [1a, 2], позволяют решить следующий вопрос.

Пусть $P^{(1)}$ и $P^{(2)}$ — две постоянные симметричные матрицы такие, что $(P^{(2)}\eta, \eta) > (P^{(1)}\eta, \eta) > 0$ при $\eta \neq 0$.

Каким дополнительным условиям должны удовлетворять матрицы $P^{(1)}$ и $P^{(2)}$, чтобы все решения уравнения (0.8) *были устойчиво ограничены, коль скоро* $(P^{(1)}\eta, \eta) \leqslant (P(t)\eta, \eta) \leqslant (P^{(2)}\eta, \eta)$. При этом период T матрицы-функции $P(t)$ считается раз навсегда заданным.

Опуская вывод, приведем решение вопроса. Обозначим через

$$\omega_1^{(1)} \leqslant \omega_2^{(1)} \leqslant \ldots \leqslant \omega_m^{(1)}, \quad \omega_1^{(2)} \leqslant \omega_2^{(2)} \leqslant \ldots \leqslant \omega_m^{(2)}$$

соответственно арифметические квадратные корни из последовательных собственных чисел матриц $P^{(1)}$ и $P^{(2)}$. Тогда искомые необходимые и достаточные условия заключаются в том, что

$$\left[\frac{T\omega_j^{(1)}}{\pi}\right] = \left[\frac{T\omega_j^{(2)}}{\pi}\right] \qquad (j = 1, \ldots, m)$$

и чтобы ни один из интервалов

$$\left(\left\{\frac{T\omega_j^{(1)}}{\pi}\right\}, \quad \left\{\frac{T\omega_j^{(2)}}{\pi}\right\}\right) \qquad (j = 1, \ldots, m)$$

не имел общих точек ни с одним из интервалов

$$\left(1 - \left\{\frac{T\omega_j^{(2)}}{2\pi}\right\}, \quad 1 - \left\{\frac{T\omega_j^{(1)}}{2\pi}\right\}\right) \ (j = 1, \ldots, m)$$

Здесь $[t]$ означает целую часть числа $t\ (>0)$, а $\{t\}$ его дробную часть, так что $\{t\} = t - [t]$. В частности, если $P^{(1)} = a^2 I_m$, $P^{(2)} = b^2 I_m$ $(a < b)$, указанные условия сведутся к единственному условию

$$\left[\frac{Ta}{\pi}\right] = \left[\frac{Tb}{\pi}\right]$$

Это условие для скалярного случая $m = 1$ указал еще Н. Е. Жуковский [5]. Нетрудно также дать решение более общего вопроса, формулируемого уже для канонического уравнения (0.1).

Каким условиям должны удовлетворять две постоянные симметричные матрицы $H^{(1)}$ и $H^{(2)}$ порядка $2m$ и такие, что $(H^{(1)}\xi, \xi) < (H^{(2)}\xi, \xi)$, чтобы все решения уравнения (0.1) были устойчиво ограничены, коль скоро $(H^{(1)}\xi, \xi) \leqslant (H(t)\xi, \xi) \leqslant (H^{(2)}\xi, \xi)$. Здесь решение этого вопроса опускается.

§ 5. Уравнение (0.8) с $P_{\text{ср}} = 0$. 1. Если в уравнении

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \lambda P(t) y = 0 \qquad (P(t+T) = P(t) = P^{\tau}(t)) \tag{5.1}$$

заменить λ на λ^2, то это уравнение подстановками $\lambda z = dy/dt$, $x = y + z$ преобразуется в каноническое уравнение

$$\frac{dx}{dt} = \lambda J H(t) x \tag{5.2}$$

с гамильтонианом $H(t)$ вида (4.2) (с $l = 1$), который будет положительного типа в том и только в том случае, когда матрица-функция $P(t)$ будет положительного типа, т. е. будет удовлетворять условиям типа (0.2). Однако и в виде (5.1), и даже когда не выполняется ни одно из условий (0.2), возможны случаи преобразования уравнения (5.1) *особым способом* в некоторую каноническую систему (5.2) с гамильтонианом $H(t)$ положительного типа. Это обстоятельство позволяет сделать ряд новых важных выводов и, в частности, следующий.

Теорема 1. Пусть

$$\int_0^T P(t)\,dt = 0 \tag{5.3}$$

и для любого постоянного m-мерного вектора $\eta \neq 0$

$$P(t)\,\eta \not\equiv 0 \tag{5.4}$$

Тогда дифференциальная система

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \lambda P(t)\,y = 0, \quad y(0) + y(T) = y'(0) + y'(T) = 0 \tag{5.5}$$

имеет по крайней мере одно положительное и одно отрицательное характеристическое число.

Обозначим через λ_1 наименьшее из положительных, а через λ_{-1} наибольшее из отрицательных характеристических чисел системы (5.5). Тогда при $\lambda \neq 0$, $\lambda_{-1} < \lambda < \lambda_1$ все решения уравнения (5.1) *устойчиво ограничены.*

Для скалярного случая $m = 1$ эта теорема доказана Ляпуновым [3в].

Доказательство. Положим

$$Q(t) = \int_0^t P(s)\,ds + C \tag{5.6}$$

где C — произвольная постоянная матрица m-го порядка, и затем

$$z = \frac{1}{\lambda}\frac{dy}{dt} + Q(t) \qquad (\lambda \neq 0) \tag{5.7}$$

В предположении, что y есть какое-либо решение уравнения (5.1), продифференцируем почленно (5.7). Это даст

$$\frac{dz}{dt} = Q(t)\,\frac{dy}{dt} \tag{5.8}$$

Таким образом,

$$\frac{dy}{dt} = \lambda(-Qy + z), \qquad \frac{dz}{dt} = \lambda(-Q^2y + Qz) \tag{5.9}$$

где первое уравнение в (5.9) означает то же, что и (5.7), а второе получается как следствие (5.7) и (5.8).

Вводя в рассмотрение вектор $x = y \dotplus z$ (прямую сумму векторов y и z), систему (5.9) можно будет записать в виде канонического уравнения (5.2), где уже

$$H(t) = \begin{pmatrix} Q^2(t) & -Q(t) \\ -Q(t) & I_m \end{pmatrix} \tag{5.10}$$

Так как в силу (5.3) $Q(t + T) = Q(t)$, то $H(t)$ — непрерывная симметрическая периодическая матрица-функция.

Для любого 2 m-мерного вектора $\xi = \eta + \zeta$ будем иметь

$$(H(t)\xi, \xi) = (Q^2(t)\eta, \eta) - 2(Q(t)\eta, \zeta) + (\zeta, \zeta) = |Q(t)\eta - \zeta|^2 \quad (5.11)$$

Таким образом первое из условий (0.2) для $H(t)$, определенного (5.10), выполняется. Покажем, что и второе условие (0.2) выполняется.

В самом деле, если при некотором $\xi = \eta + \zeta$ для рассматриваемого $H(t)$ имеет место равенство

$$\int_0^T (H(t)\xi, \xi)\,dt = 0 \quad (5.12)$$

то в силу (5.11) это будет иметь своим следствием равенство $\zeta = Q(t)\eta$.

Дифференцирование последнего равенства по t дает $P(t)\eta = 0$ [почти всюду в $(0, T)$]. В силу условия (5.4) это возможно лишь при $\eta = 0$. Таким образом, равенство (5.12) влечет равенство нулю вектора $\xi = \eta + \zeta$, что требовалось доказать. Итак, подстановка (5.7) при выполнении условий (5.3) и (5.4) преобразует уравнение (6.1) к канонической системе (5.2) с периодическим гамильтонианом положительного типа. Для этой системы граничное условие $x(0) + x(T) = 0$ означает, что

$$y(0) + y(T) = 0, \quad z(0) + z(T) = 0 \quad (5.13)$$

Замечая теперь, что в силу (5.6) при $\lambda \neq 0$

$$z\Big|_{t=0,T} = \frac{1}{\lambda}\frac{dy}{dt}\Big|_{t=0,T} + Cy\Big|_{t=0,T} \quad (5.14)$$

мы убеждаемся в том, что присоединение к (5.2) граничного условия $x(0) + x(T) = 0$ дает краевую задачу, эквивалентную краевой задаче (5.5).

Отсюда числа λ_{-1} и λ_1, о которых идет речь в предложении 1, существуют и совпадают с соответствующими числами λ_{-1} и λ_1 дифференциальной системы (0.3) с гамильтонианом $H(t)$ вида (5.10).

Так как при $\lambda_{-1} < \lambda < \lambda_1$ все решения уравнения (5.2) ограничены (и даже устойчиво ограничены), то и все решения уравнения (5.1) при $\lambda_{-1} < \lambda < \lambda_1$ $(\lambda \neq 0)$ ограничены. Однако их устойчивую ограниченность еще нельзя утверждать, так как среди матриц-функций $P^\circ(t)$, сколь угодно близких матрице-функции $P^\circ(t)$, всегда найдутся такие, которые уже не удовлетворяют условию (5.3), и при замене $P(t)$ на одну из таких матриц-функций мы получим уравнение, для которого преобразование (5.7) потеряет силу, как содержащее непериодическую функцию $Q(t)$. Поэтому потребуются дополнительные рассуждения [1]. Пусть $\lambda_0 \neq 0$ — — произвольное число из интервала $\lambda_{1-} < \lambda < \lambda_1$. Тогда матрица монодромии $U(T; \lambda_0)$ системы (5.9) будет симплектической матрицей устойчивого типа.

Для любого решения $x = y + z$ системы (5.9) при $\lambda = \lambda_0$ будем иметь

$$\begin{pmatrix} y(T) \\ z(T) \end{pmatrix} = U(T; \lambda_0) \begin{pmatrix} y(0) \\ z(0) \end{pmatrix} \quad (5.15)$$

[1] Впрочем, необходимость в этих дополнительных рассуждениях отпадет, если преобразование (5.7) обобщить, как это показывается в § 6.

Заметим теперь, что уравнение

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \lambda_0 P(t)\,y = 0 \tag{5.16}$$

эквивалентно также следующей системе:

$$\frac{dy}{dt} = \lambda_0 z_0, \qquad \frac{dz_0}{dt} = -P(t)\,y \tag{5.17}$$

причем эквивалентность (5.16) и (5.17) имеет место при любой матрице-функции $P(t)$ независимо от того, удовлетворяет ли она условиям (5.3) и (5.4) или нет. Система (5.17) может быть записана в виде

$$\frac{dx}{dt} = JH_0(t)\,x, \qquad H_0(t) = \begin{pmatrix} P(t) & 0 \\ 0 & \lambda_0 I_m \end{pmatrix} \qquad (x = y \dotplus z_0) \tag{5.18}$$

В преобразовании (5.7) мы можем свободно распоряжаться матрицей C. Нам удобно будет теперь положить $C = 0$. Тогда согласно (5.17) и (5.14) для любого решения уравнения (5.1) будем иметь $z_0(0) = z(0)$, $z_0(T) = z(T)$ и, следовательно, соотношение (5.15) будет означать, что матрица $U(T;\lambda_0)$ является также матрицей монодромии канонического уравнения (5.18). Поскольку она устойчивого типа, то все решения уравнения (5.18) устойчиво ограничены. С другой стороны, устойчивая ограниченность решений уравнения (5.18) всегда влечет устойчивую ограниченность решений уравнения (5.16). Теорема доказана.

Замечание 1. Условие (5.4) существенно, ибо если для некоторого постоянного вектора $\eta \neq 0$ почти всюду $P(t)\eta = 0$, то линейная вектор-функция $y = t\eta$ будет неограниченным решением уравнения (5.1).

Замечание 2. Подстановка (5.7), преобразующая уравнение (5.1) к системе (5.9) положительного типа, представляет интерес и в том случае, когда условие (5.3) не выполняется, так как позволяет свести изучение краевых задач для уравнения (5.1) с «индефинитным» весом $P(t)$ к изучению краевых задач для систем положительного типа. Это замечание сохраняет силу и для скалярного случая $m = 1$, и для случаев, когда матрица-функция не обязательно периодична и рассматривается сингулярная краевая задача, порождаемая уравнением (5.1) в интервале $(0, \infty)$ или в интервале $(-\infty, \infty)$.

2. Выберем в выражении (5.6) для $Q(t)$ матрицу C так, чтобы

$$Q_{\text{ср}} = \frac{1}{T}\int_0^T Q\,dt = 0 \tag{5.19}$$

При таком выборе C для $H(t)$, определяемого согласно (5.10), имеем

$$\int_0^T H(t)\,dt = \begin{pmatrix} R & 0 \\ 0 & TI_m \end{pmatrix} \qquad \left(R = \int_0^T Q^2 dt\right)$$

и, следовательно,

$$T^2 \operatorname{sp}(A_{11}A_{22} - A_{12}{}^2) = T\int_0^T \operatorname{sp} Q^2\,dt$$

Отсюда заключаем, что

$$T\int_0^T \operatorname{sp} Q^2\,dt = 2\sum \frac{1}{\lambda_j^2} \tag{5.20}$$

где

$$\ldots \lambda_{-2} \leqslant \lambda_{-1} (< 0 <) \lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \ldots$$

суть все характеристические числа краевой задачи (5.5) и сумма в правой части (5.20) распространяется на них. Если $P(t)$ нечетная функция:

$$P(t) \sim \sum B_k \sin \frac{2k\pi t}{T} \tag{5.21}$$

то условие (5.19) будет выполнено и функция $Q(t)$, удовлетворяющая условию (5.19), найдется по формуле

$$Q(t) = -\frac{T}{2\pi} \sum \frac{1}{k} B_k \cos \frac{2k\pi t}{T}$$

Отсюда

$$\int_0^T Q^2(t)\, dt = \frac{T^3}{8\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} B_k{}^2$$

Так как в этом случае функция $H(t)$ согласно (5.10) получается четной, то применим Z-признак (2.3), что дает следующий результат

Если $P(t)$ имеет вид (5.21), то все решения уравнения

$$\frac{d^2y}{dt^2} + P(t)\, y = 0 \tag{0.8}$$

устойчиво ограничены, коль скоро

$$\sum \frac{1}{k^2} \operatorname{sp} B_k{}^2 < \frac{16\pi^2}{T^4} \tag{5.22}$$

Для скалярного случая ($m = 1$) это предложение совершенно иным путем было получено Ляпуновым [3a]. В этом случае оно означает, что все решения скалярного уравнения

$$y'' + p(t)\, y = 0 \tag{5.23}$$

устойчиво ограничены, коль скоро $p(t) \equiv p(t + T) \equiv -p(-t)$ и

$$T \int_0^T q^2\, dt < 4 \tag{5.24}$$

при этом

$$q(t) = \int_0^t p(s)\, ds, \qquad q_{\text{ср}} = 0 \tag{5.25}$$

Возможно, что еще никем не отмечалось, что этот Z-признак является «точным» в том смысле, что число 4 в правой части (5.24) не может быть заменено никаким большим.

Чтобы доказать «точность» признака, обозначим через $\gamma\ (\geqslant 4)$ наибольшую («точную») константу, обладающую тем свойством, что коль скоро некоторая нечетная функция $p(t) = p(t + T)$ удовлетворяет условию

$$T \int_0^T q^2\, dt < \gamma \tag{5.26}$$

то все решения уравнения (5.23) устойчиво ограничены.

Тогда можно будет утверждать, что все решения уравнения

$$y'' + \lambda p(t)\, y = 0 \tag{5.27}$$

с нечетным периодическим коэффициентом $p(t)=p(t+T)$ устойчиво ограничены, коль скоро

$$T|\lambda| \int_0^T q^2\,dt < \gamma$$

Последнее равносильно утверждению, что характеристическое число λ_1 краевой задачи

$$y'' + \lambda p(t)\,y = 0, \quad y(0)+y(T)=y'(0)+y'(T)=0$$

удовлетворяет неравенству

$$\lambda_1 T \int_0^T q^2\,dt \geqslant \gamma \tag{5.28}$$

какова бы ни была периодическая нечетная функция $p(t)=p(t+T)$.

Рассмотрим тогда периодическую функцию $p_\xi(t)=p_\xi(t+T)$, имеющую в интервале $(-{}^1/_2T,\ {}^1/_2T)$ вид:

$$p_\xi(t)=\delta(t+\xi)-\delta(t-\xi) \qquad \left(-\tfrac{1}{2}\,T \leqslant t \leqslant \tfrac{1}{2}\,T\right) \tag{5.29}$$

где $0<\xi<\frac{1}{2}T$, а $\delta(t)$ — функция Дирака.

В этом случае для $q=q_\xi(t)$ будем иметь

$$q_\xi(t)=\begin{cases}1-2\xi/T & \text{при } |t|<\xi\\ -2\xi/T & \text{при } |t|>\xi\end{cases} \qquad \left(-\tfrac{1}{2}\,T<t<\tfrac{1}{2}T\right)$$

так что

$$T\int_0^T q_\xi^2(t)\,dt = T\int_{-{}^1/_2T}^{{}^1/_2T} q_\xi^2(t)\,dt = 2\xi(T-2\xi) \tag{5.30}$$

Уравнение (5.27) для $p=p_\xi$ в интервале $\left(-\frac{1}{2}T,\frac{1}{2}T\right)$ имеет вид:

$$y'' + \lambda\,[\delta(t+\xi)-\delta(t-\xi)]\,y = 0$$

и будет означать, что y должно быть линейной функцией в интервалах $(-{}^1/_2T,\ -\xi)$, $(-\xi,\ \xi)$ и $(\xi,\ {}^1/_2\,T)$, причем

$$y'(-\xi+0)-y'(-\xi-0)+\lambda y(-\xi)=0,$$
$$y'(\xi+0)-y'(\xi-0)-\lambda y(\xi)=0 \tag{5.31}$$

Полагая $y_0=y\left(-\frac{1}{2}\,T\right),\ y_2=y(-\xi),\ y_1=y(\xi),\ y_3=y\left(\frac{1}{2}T\right)$, мы сможем соотношения (5.31) записать в виде линейных уравнений

$$\frac{y_2-y_1}{2\xi}-\frac{y_1-y_0}{{}^1/_2T-\xi}+\lambda y_1=0, \qquad \frac{y_3-y_2}{{}^1/_2T-\xi}-\frac{y_2-y_1}{2\xi}-\lambda y_2=0 \tag{5.32}$$

Граничные условия $y\left(-\frac{1}{2}T\right)+y\left(\frac{1}{2}T\right)=y'\left(-\frac{1}{2}T\right)+y'\left(\frac{1}{2}T\right)=0$ будут означать, что

$$y_0+y_3=0,\ \ y_1-y_0+y_3-y_2=0 \tag{5.33}$$

Складывая и вычитая почленно уравнения (5.32), получим в силу граничных условий (5.33) два уравнения:

$$y_1+y_2-\lambda\left(\tfrac{1}{2}\,T-\xi\right)(y_1-y_2)=0, \qquad y_1-y_2-\lambda\xi(y_1+y_2)=0$$

Отсюда далее получаем характеристическое уравнение для λ:

$$-2+\lambda^2\xi(T-2\xi)=0, \qquad \text{или} \qquad \lambda_{\pm 1}(\xi)=\pm\sqrt{\frac{2}{\xi(T-2\xi)}}$$

Следовательно, согласно (5.30)

$$\lambda_1^2(\xi)\,T\int_0^T q_\xi^2\,dt=4$$

Сопоставление с (5.28) дает $\gamma\leqslant 4$, а так как γ заведомо $\geqslant 4$, то $\gamma=4$, что и требовалось доказать. Одновременно мы видим, что равенство в (5.28) достигается для любой функции $p=p_\xi$.

Использование в приведенных выше рассуждениях обобщенных функций $p_\xi(t)$ совершенно законно, так как обобщенную нечетную периодическую функцию $p_\xi(t)$ можно всегда «аппроксимировать» обычной (даже непрерывной) нечетной периодической функцией $p(t)$ так, чтобы разность $|q_\xi(t)-q(t)|$ была равномерно сколь угодной малой, и тогда разность $|\lambda_1(p_\xi)-\lambda_1(p)|$ будет сколь угодно малой.

Теперь не трудно убедиться, что и в общем случае любого m Z-признак (5.22) является «точным». Для этого достаточно рассмотреть уравнение (5.21) с коэффициентом $P(t)$, имеющим вид диагональной матрицы:

$$P(t)=\left\|\begin{matrix} p(t) & 0 & \cdots 0 \\ 0 & \varepsilon p_2(t) & \cdots 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots \varepsilon p_m(t)\end{matrix}\right\|$$

где $p_\xi(t)$ — функция, определяемая выше, а $p_j(t)=p_j(t+T)$ $(j=2,3,\ldots,m)$ — какие-либо нечетные периодические функции и ε — малый параметр.

3. Как было показано ранее [18] (и как снова будет показано в § 8), если периодическая функция $p(t)=p(t+T)$ удовлетворяет условию

$$p_{\text{ср}}=\frac{1}{T}\int_0^T p(t)\,dt=0$$

то все решения уравнения (5.27) устойчиво ограничены, коль скоро

$$T\int_0^T |p(t)|\,dt<8 \tag{5.34}$$

Вопреки своей внешней простоте этот Z-признак в вычислительном отношении сложнее Z-признака Ляпунова (5.24), а главное то, что в применении к случаю нечетной периодической функции $p(t)$ (для которого только и верен признак Ляпунова) он всегда слабее последнего.

Для доказательства этого покажем, что из неравенства (5.34) всегда следует неравенство (5.24), если

$$p(t)\sim\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\cos\frac{2k\pi t}{T}+b_k\sin\frac{2k\pi t}{T}\right),\quad q(t)=\frac{T}{2\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\left(a_k\sin\frac{2k\pi t}{T}-b_k\cos\frac{2k\pi t}{T}\right)$$

Положим

$$g(t)=\frac{T}{2\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}\cos\frac{2k\pi t}{T}$$

$$r(t)=\int_0^T g(t-s)\,p(s)\,ds=\frac{T^2}{4\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}\left(a_k\cos\frac{2k\pi t}{T}+b_k\sin\frac{2k\pi t}{T}\right)$$

Из второго выражения для $r(t)$ явствует, что $r'=-q$. Отсюда, интегрируя по частям, получаем

$$\int_0^T q^2dt=\int_0^T rp\,dt=\int_0^T\int_0^T g(t-s)\,p(t)\,p(s)\,dt\,ds$$

Пользуясь теперь тем, что $p=p_+-p_-$, где

$$p_+(t)=\tfrac{1}{2}(p(t)+|p(t)|)\geqslant 0,\quad p_-(t)=-\tfrac{1}{2}(p(t)-|p(t)|)\geqslant 0$$

находим далее

$$\int_0^T q^2dt=\int_0^T\int_0^T g(t-s)\,p_+(t)\,p_-(s)\,ds\,dt-2\int_0^T\int_0^T g(t-s)\,p_+(t)\,p_-(s)\,ds\,dt+$$

$$+\int_0^T\int_0^T g(t-s)\,p_-(t)\,p_-(s)\,ds\,dt \tag{5.35}$$

Принимая теперь во внимание, что

$$g(t)=\frac{t^2}{2T}-\frac{1}{2}t+\frac{1}{12}T\quad\text{при }0\leqslant t\leqslant T$$

обнаруживаем, что периодическая функция $g(t)$ заключается в пределах

$$g\left(\tfrac{1}{2}T\right)=-\tfrac{1}{24}T\leqslant g(t)\leqslant\tfrac{1}{12}T=g(0)\qquad(-\infty<t<\infty)$$

Поэтому, в силу неотрицательности $p_+(t)$ и $p_-(t)$ из (5.35) имеем

$$\int_0^T q^2\,dt<\tfrac{1}{12}T\left[\left(\int_0^T p_+(t)\,dt\right)^2+\left(\int_0^T p_-(t)\,dt\right)^2+\left(\int_0^T p_+\,dt\right)\left(\int_0^T p_-\,dt\right)\right]$$

А так как $\int_0^T p_+\,dt=\int_0^T p_-\,dt=\frac{1}{2}\int_0^T|p|\,dt$, то

$$\int_0^T q^2\,dt\leqslant\tfrac{1}{16}T\left(\int_0^T|p|\,dt\right)^2 \tag{5.36}$$

Отсюда уже непосредственно следует, что неравенство (5.34) влечет за собой неравенство (5.24). Отметим, что оценка (5.36) является «точной» (число 16 не может быть заменено никаким большим), так как в ней достигается знак равенства, если периодическую функцию $p(t)$ в интервале $(0,T)$ определить равенством

$$p(t)=\delta(t-a)-\delta\left(t-a-\tfrac{1}{2}T\right)\qquad\left(0<a<\tfrac{1}{2}T\right)$$

где попрежнему $\delta(t)$ — функция Дирака.

4. Несколько дальше будет установлено предложение из которого, в частности, будет следовать: *если функция $p(t)=p(t+T)$ удовлетворяет*

условию $p_{ср} = 0$, *а* $q(t)$ *(неопределенный интеграл от* $p(t)$ *с* $q_{ср} = 0$*) удовлетворяет неравенству*

$$T \int_0^T q^2\,dt < \frac{1}{4}\pi^2 \tag{5.37}$$

то все решения уравнения (5.23) устойчиво ограничены.

Z-признак (5.37), повидимому, не является «точным» и константу $^1/_4\,\pi^2$ можно заменить некоторой большей «точной» константой γ; однако последняя не превосходит числа 3, так что

$$\frac{1}{4}\pi^2 = 2.46\ldots < \gamma \leqslant 3 \tag{5.38}$$

Чтобы этом убедиться, рассмотрим краевую задачу

$$\begin{gathered} y'' + \lambda\,[-\delta(t+\xi) + 2\delta(t) - \delta(t-\xi)]\,y = 0 \\ y(0) + y(T) = y'(0) + y'(T) = 0 \end{gathered} \tag{5.39}$$

где $0 < \xi < \frac{1}{2}T$. Эта краевая задача имеет три характеристических числа: $\lambda_1 > 0$, λ_{-1}, $\lambda_{-2} < 0$, и так как

$$\frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_{-1}} + \frac{1}{\lambda_{-2}} = 0$$

то из них λ_1 имеет наименьшую абсолютную величину. Проделав соответ ствующие вычисления, найдем

$$\lambda_1 = \frac{2}{\xi + \sqrt{2T\xi - 3\xi^2}}$$

Для функции $p = p^{(\xi)}(t)$, фигурирующей в уравнении (5.39), соответствующая функция $q = q^{(\xi)}(t)$ имеет вид:

$$q^{(\xi)}(t) = \begin{cases} \operatorname{sign}\, t & \text{при } |t| < \xi \\ 0 & \text{при } |t| > \xi \end{cases} \quad \left(-\frac{1}{2}T \leqslant t \leqslant \frac{1}{2}T\right)$$

так что

$$\lambda_1^2(\xi)\,T \int_0^T [q^{(\xi)}(t)]^2\,dt = \frac{8T\xi}{(\xi + \sqrt{2T\xi - 3\xi^2})^2} = \frac{8T}{(\sqrt{\xi} + \sqrt{2T - 3\xi})^3}$$

Согласно рассуждениям, приводившимся при доказательстве «точности» признака Ляпунова (5.24), константа γ не может превосходить минимума правой части для ξ, меняющегося в пределах от 0 до $^1/_2T$. Легкий подсчет показывает, что этот минимум достигается при $\xi = {^1/_6}T$ и равен 3, что и дает (5.38).

Сравним теперь Z-признаки (5.34) и (5.37). Даже если бы мы могли заменить в признаке (5.37) константу $^1/_4\,\pi^2$ на 3, нельзя было бы утверждать, что этот признак сильней признака (5.34). Однако, и с константой $^1/_4\,\pi^2$ признак (5.37) не только удобней признака (5.34), но, вообще говоря, дает лучший результат.

Дело в том, что даже при сколь угодно большом значении интеграла $|p|_{ср}$ признак (5.37) может показывать ограниченность решений уравнения (5.23). Поясним преимущества признака (5.37) перед (5.34) на примере. Пусть

$$p(t) = \varepsilon \sin t + a \cos nt + b \sin nt \quad (T = 2\pi)$$

Z-признак (5.37) дает следующее достаточное условие ограниченности решений уравнения (5.23):

$$a^2 + b^2 \leqslant n^2\left(\frac{8}{\pi^2} - \varepsilon^2\right) \tag{5.40}$$

в то время как Z-признак (5.34) дает

$$\int\limits_0^{2\pi} |\varepsilon \sin t + a \cos nt + b \cos nt|\, dt = 4(\sqrt{a^2 + b^2} + \delta(\varepsilon, a, b, n)) < \frac{4}{\pi} \tag{5.41}$$

где, очевидно,

$$|\delta| < \frac{1}{4}\varepsilon \int\limits_0^{2\pi} |\sin t|\, dt = \varepsilon$$

При $\varepsilon^2 < 8/\pi^2$ область (5.40) представляет собой круг, радиус которого с увеличением n растет пропорционально n, в то время как область (5.41) при любом n имеет границу, лежащую между окружностями $a^2 + b^2 = (1/\pi \pm \varepsilon)^2$, не зависящими от n.

5. Чтобы получить Z-признак (5.37) и его обобщение на случай векторных уравнений, положим, несколько обобщая подстановку (5.7):

$$lz = Q(t)\, y + \frac{1}{\lambda}\frac{dy}{dt} \tag{5.42}$$

где Q имеет прежнее значение, а l — пока неопределенная константа, большая 0. При этой подстановке уравнение (5.1) преобразуется в каноническую систему положительного типа

$$\frac{dy}{dt} = \lambda(-Qy + lz), \qquad \frac{dz}{dt} = \lambda(-l^{-1}Q^2 y + Qz)$$

с гамильтонианом

$$H(t) = \begin{pmatrix} l^{-1}Q^2(t) & -Q(t) \\ -Q(t) & lI_m \end{pmatrix} \tag{5.43}$$

Воспользуемся теперь следующим предложением. Решения уравнения (0.1) положительного типа устойчиво ограничены, коль скоро

$$\int\limits_0^T h_{\text{м}}(t)\, dt < \pi \tag{5.44}$$

где $h_{\text{м}}(t)$ — наибольшее собственное число матрицы $H(t)$.

Для скалярного случая $m = 1$ это предложение было указано В. А. Якубовичем [6]. В. Б. Лидский и М. Г. Нейгауз [7] заметили, что на основании результатов автора оно может быть получено для случая любого m. В самом деле, Z-признак (5.44) непосредственно следует хотя бы из того, что число λ_1 может только увеличиться при замене $H(t)$ на $h_{\text{м}}(t)\, I_{2m}$ (см. [1a], теор. 5.3), а при такой замене число λ_1 становится равным отношению правой части (5.44) к левой. Ввиду того что теперь $H(t)$ имеет вид (5.43), то для любого вектора $\xi = \eta + \zeta$

$$(H(t)\xi, \xi) = |l^{-1/2}Q(t)\eta + l^{1/2}\zeta|^2 \leqslant (l^{-1/2}q_{\text{м}}(t)|\eta| + l^{1/2}|\zeta|)^2 \leqslant (l^{-1}q_{\text{м}}^2(t) + l)$$

$$(|\xi|^2 = |\eta|^2 + |\zeta|^2)$$

где $q_{\text{м}}^2(t)$ — наибольшее собственное число матрицы $Q^2(t)$.

Отсюда для наибольшего собственного числа $h_м(t)$ матрицы $H(t)$ вида (5.43) получаем [1]

$$h_м(t) \leqslant l^{-2} q_м{}^2(t) + l^2 \tag{5.45}$$

и, следовательно,

$$\int_0^T h_м(t)\,dt \leqslant l^{-1} \int_0^T q_м{}^2(t)\,dt + lT = 2\left[T \int_0^T q_м{}^2(t)\,dt\right]^{1/2}$$

если выбрать l равным

$$T^{-1/2}\left(\int_0^T q_м{}^2(t)\,dt\right)^{1/2}$$

Таким образом, получен требуемый признак: *если матрица-функция $P(t)$ удовлетворяет условиям* (5.3) *и* (5.4), *то все решения уравнения* (0.8) *устойчиво ограничены, коль скоро*

$$T \int_0^T q_м{}^2(t)\,dt < \frac{1}{4}\pi^2 \tag{5.46}$$

Здесь $q_м{}^2(t)$ — наибольшее собственное число квадрата матрицы Q, определяемой по формуле (5.6). Нам неизвестно, как следует выбрать постоянную матрицу C, чтобы левая часть в (5.46) имела возможно меньшее значение. В скалярном случае ($m = 1$), когда вместо $P(t)$ мы пишем $p(t)$, квадрат $q^{м2}(t)$ совпадает с $q^2(t)$, где $q(t)$ — первообразная функция для $p(t)$, и левая часть в (5.46) будет иметь возможно меньшее значение если постоянную интегрирования выбрать так, что $q_{ср} = 0$. В этом случае Z-признак (5.46) принимает форму (5.37).

При $m > 2$ признак (5.46) в вычислительном отношении становится неудобным. В этом случае проще применять к системе (5.9) признак, сформулированный в конце стр. 649, который, кроме того, часто дает лучшие результаты, нежели признак (5.44).

Предоставляем читателю продумать также, какие Z-признаки можно получить для уравнения (0.8), если к системе (5.9) применить другие общие Z-признаки для канонической системы, указанные в § 7.

§ 6. Уравнение (0.8) с $P_{ср} \geqslant 0$. 1. Преобразование (5.7) допускает обобщение на общий случай, когда матрица

$$P_{ср} = \frac{1}{T} \int_0^T P(t)\,dt$$

не обязательно равна нулю. В этом более общем случае матрицу-функцию $Q(t)$ определим равенствами

$$Q(t) = \int^t (P(s) - P_{ср})\,ds, \quad Q_{ср} = 0 \tag{6.1}$$

и затем положим

$$z = Q(t)\,y + \frac{1}{\lambda}\frac{dy}{dt} \qquad (\lambda \neq 0) \tag{6.2}$$

[1] Более того, можно утверждать, что в (5.45) имеет место знак равенства, но для последующего это несущественно

Тогда для любого решения y уравнения

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \lambda P(t)\, y = 0 \tag{6.3}$$

будем иметь

$$\frac{dz}{dt} = Q(t)\frac{dy}{dt} - P_{\text{ср}} y$$

В силу этого уравнение (6.3) будет эквивалентно системе:

$$\frac{dy}{dt} = \lambda(-Qy + z), \qquad \frac{dz}{dt} = \lambda(-Q^2 y + Qz) - P_{\text{ср}} y \tag{6.4}$$

Вводя в рассмотрение прямую сумму векторов $x = y \dotplus z$, систему (6.4) можно будет записать в виде

$$\frac{dx}{dt} = J(H_0 + \lambda H_1(t))\, x \tag{6.5}$$

где

$$H_0 = \begin{pmatrix} P_{\text{ср}} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad H_1(t) = \begin{pmatrix} Q^2(t) & -Q(t) \\ -Q(t) & I_m \end{pmatrix}$$

Покажем, что если форма $(P(t)\eta, \eta)$ неотрицательна в среднем, т. е.

$$(P_{\text{ср}}\eta, \eta) \geqslant 0 \tag{6.6}$$

и, кроме того,

$$P(t)\,\eta \not\equiv 0 \quad \text{при} \quad \eta \neq 0, \tag{6.7}$$

то гамильтониан $H_\lambda(t) = H_0 + \lambda H_1(t)$ при $\lambda > 0$ положительного типа, т. е. для него выполняются условия (0.2).

В самом деле, для любого вектора $\xi = \eta \dotplus \zeta$

$$(H_\lambda(t)\,\xi, \xi) = (P_{\text{ср}}\eta, \eta) + \lambda\,|\,Q(t)\,\eta - \zeta\,|^2 \geqslant 0$$

Равенство

$$\int_0^T (H_\lambda(t)\,\xi, \xi)\, dt = 0$$

возможно лишь при условии, что

$$(P_{\text{ср}}\eta, \eta) = 0, \qquad Q(t)\,\eta - \zeta \equiv 0$$

Из первого соотношения следует $P_{\text{ср}}\eta = 0$, а из второго путем дифференцирования по t получаем $(P(t) - P_{\text{ср}})\,\eta \equiv 0$, откуда $P(t)\,\eta \equiv 0$, $\eta = 0$, а стало быть, и $\zeta = 0$. Очевидно,

$$\int_0^T H_\lambda(t)\, d\lambda = T\begin{pmatrix} A_{11}(\lambda) & A_{12}(\lambda) \\ A_{21}(\lambda) & A_{22}(\lambda) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R & 0 \\ 0 & \lambda T I_m \end{pmatrix} \qquad \left(R = \lambda\int_0^T Q^2 dt + TP_{\text{ср}}\right)$$

и, стало быть, при $\lambda > 0$ достаточно малом будем иметь

$$T^2 \operatorname{sp}(A_{11}(\lambda)\, A_{22}(\lambda) - A_{12}{}^2(\lambda)) = \lambda T\left(T \operatorname{sp} P_{\text{ср}} + \lambda\int_0^T \operatorname{sp} Q^2 dt\right) < 2 \tag{6.8}$$

Так как «малому» возмущению уравнения (0.8) отвечает и «малое» возмущение уравнения (6.4), то из устойчивой ограниченности решений уравнения (6.6) следует устойчивая ограниченность решений уравнения (6.4). В частности, можно утверждать, что при $\lambda > 0$, удовлетворяющем условию (6.8), вместе с решениями уравнения (6.6) и все решения уравнения (6.4) устойчиво ограничены.

Однако нашей ближайшей задачей является доказательство того, что это же имеет место для всех $\lambda > 0$ и $< \lambda_1$, где λ_1 — первое положительное характеристическое число краевой задачи

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \lambda P(t) y = 0, \ y(0) + y(T) = y'(0) + y'(T) = 0 \tag{6.9}$$

Легко видеть, что в силу периодичности функции $Q(t)$ подстановка (6.2) позволяет утверждать эквивалентность краевой задачи (6.9) задаче

$$\frac{dx}{dt} = H_\lambda(t) x, \qquad x(0) + x(T) = 0 \tag{6.10}$$

и, таким образом, λ_1 одновременно является характеристическим числом системы (6.10).

Дальнейшие наши рассуждения потребуют использования ряда понятий и результатов работы [1а]. Прежде всего заметим, что так как условие (6.8) является Z-признаком, то при его выполнении можно утверждать, что матрица монодромии $U(T; \lambda)$ уравнения (6.5) устойчивого типа и все ее мультипликаторы (собственные числа) первого рода лежат на открытой верхней полуокружности: $\zeta = \exp(i\varphi)$, $0 < \varphi < \pi$, а второго рода — на открытой нижней: $\zeta = \exp(i\varphi)\,(-\pi < \varphi < 0)$ (см. § 6 [1а]).

Так как при любом t форма $(H_\lambda(t)\xi, \xi) \geqslant 0$, то при возрастании λ все мультипликаторы первого рода будут вращаться по часовой стрелке, а их зеркальные изображения — мультипликаторы второго рода — против часовой стрелки (см. § 5[1а]). Если при этом мы и выйдем за пределы интервала для λ, даваемого неравенством (6.8), то все же матрица монодромии будет оставаться матрицей устойчивого типа, пока не произойдет встреча мультипликаторов разного рода.

Такая встреча в первый раз может произойти лишь в точке $\rho = -1$. При этом значении λ система (6.10) будет иметь нетривиальное решение $x \neq 0$ (см. соответствующее рассуждение в § 6 [1а]), и, следовательно, это значение будет совпадать с первым положительным характеристическим числом λ_1 системы (6.10), а значит, и системы (6.9). Мы пришли к следующему предложению.

Теорема II. Если выполняются условия (6.6) и (6.7), то все решения уравнения (6.3) устойчиво ограничены при $0 < \lambda < \lambda_1$, *где* λ_1 — *первое положительное характеристическое число краевой задачи (6.8).*

Заметим, что при более жестком требовании строгой положительности формы $(P_{\text{ср}}\eta, \eta)$ эта теорема более сложным путем получена в § 8, п. 5 [1а].

Для скалярного случая ($m = 1$) теорема II впервые была установлена Ляпуновым [3в].

2. Существование числа λ_1 для случая, когда $P(t) \not\equiv 0$, $P_{\text{ср}} = 0$, было доказано в § 5. Прямое доказательство его существования при более общем условии (6.1) можно получить, рассматривая вариационную задачу, о которой будет итти речь в § 7.

Другой путь заключается в переходе от рассмотрения системы (6.9) к рассмотрению эквивалентного нагруженного интегрального уравнения

$$y(t) = \lambda \int_0^T g(t-s)\, P(s)\, y(s)\, ds \tag{6.11}$$

где

$$g(t) = \frac{T}{4} - \frac{|t|}{2} = \frac{2T}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} \cos \frac{(2k+1)\pi t}{T} \qquad (-T < t < T)$$

В силу положительной определенности ядра $G(t-s) = g(t-s) I_m$ все характеристические числа этого уравнения вещественны. Так как $G = {}^1/_4 T I_m$ при $t = s$, то формула следов дает

$$T \int_0^T \operatorname{sp} P(t)\, dt = 4 \sum \frac{1}{\lambda_j} \tag{6.12}$$

где абсолютно сходящаяся сумма распространяется на все характеристические числа уравнения (6.11) или, что одно и то же, краевой задачи (6.9). Так как левая часть в (6.12) равна $T^2 \operatorname{sp} P_{\text{ср}} \geqslant 0$, то среди характеристических чисел всегда будет по крайней мере одно положительное[1]. Уравнение (6.11) позволит получить также формулу для суммы величин λ_j^{-2}. Для этого образуем второе итерированное матричное ядро

$$G_2(t, s) = \int_0^T g(t-r)\, P(r)\, g(r-s)\, dr$$

Тогда

$$\sum \frac{1}{\lambda_j^2} = \operatorname{sp} \int_0^T G_2(s, s)\, P(s)\, ds = \int_0^T \int_0^T g^2(s-r) \operatorname{sp} (P(s)\, P(r))\, dr\, ds \tag{6.13}$$

Представляя $P(s)$ в виде $P(s) = P_1(s) + P_{\text{ср}}$, находим далее

$$\sum \frac{1}{\lambda_j^2} = \int_0^T \int_0^T g^2(s-r) \operatorname{sp} (P_1(s)\, P_1(r))\, ds\, dr + 2 \int_0^T \int_0^T g^2(s-r) \operatorname{sp} (P_1(s)\, P_{\text{ср}})\, ds\, dr +$$

$$+ \int_0^T \int_0^T g^2(s-r)\, ds\, dr \operatorname{sp} (P_{\text{ср}}^2) \tag{6.14}$$

Так как

$$\int_0^T g^2(s-r)\, dr = \int_0^T g^2(r)\, dr = \frac{1}{48} T^3$$

и $P_{1\text{ср}} = 0$, то второй интеграл в (6.14) равен нулю; третий же интеграл равен

$$\frac{1}{48} T^4 \operatorname{sp} (P_{\text{ср}}^2) = \frac{1}{48} T^2 \operatorname{sp} \left(\int_0^T P(t)\, dt \right)^2$$

---

[1] Можно доказать, что их будет бесконечное множество, если, разумеется, не почти всюду $P(t) = 0$, т. е. $P(t) \not\equiv 0$.

Что же касается первого интеграла, то в силу формулы (6.13) он равен $\Sigma(1/\lambda_j'^2)$, где $\{\lambda_j'\}$ — совокупность всех характеристических чисел краевой задачи (6.9), в которой $P(t)$ заменено на $P_1(t)$. А так как $P_{1\text{ср}}=0$, то эта сумма может быть вычислена по формуле (5.20), где $Q(t)$ — первообразная матрица-функция по отношению к $P_1(t)$ с $Q_{\text{ср}}=0$, т. е. определяется (6.1). Таким образом, первый интеграл в (6.14) равен

$$\frac{1}{2}T\int_0^T \operatorname{sp} Q^2(t)\,dt$$

Этот вывод можно также получить непосредственно — путем интегрирования по частям первого интеграла в (6.14) один раз по r, другой по s, используя, что $P(s)=Q'(s)$. Заметим, что в приведенных выше рассуждениях условия (6.6) и (6.7) нигде не были использованы. Мы пришли, таким образом, к обобщению формулы (5.20):

Какова бы ни была вещественная симметрическая матрица-функция $P(t)$, всегда справедливо соотношение

$$\frac{1}{2}T\int_0^T \operatorname{sp} Q^2(t)\,dt+\frac{1}{48}T^2\operatorname{sp}\left(\int_0^T P(t)\,dt\right)^2=\sum\frac{1}{\lambda^2_j} \qquad (6.14')$$

где $Q(t)$ вычисляется по формуле (6.1), *а* $\{\lambda_j\}$ — *совокупность всех характеристических чисел краевой задачи* (6.9).

Если

$$P(t)\sim P_{\text{ср}}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(A_k\cos\frac{2k\pi t}{T}+B_k\sin\frac{2k\pi t}{T}\right)$$

то

$$Q(t)=\frac{T}{2\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\left(A_k\sin\frac{2k\pi t}{T}-B_k\cos\frac{2k\pi t}{T}\right)$$

и левая часть в (6.14′) будет равна

$$\frac{1}{48}T^4\operatorname{sp}(P_{\text{ср}}^2)+\frac{T^4}{16\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}\operatorname{sp}(A_k^2+B_k^2) \qquad (6.15)$$

Отсюда при выполнении условий (6.6) *и* (6.7) *все решения уравнения* (0.8) *устойчиво ограничены, коль скоро величина* (6.15) *меньше единицы или, что одно и то же,*

$$T\int_0^T \operatorname{sp} Q^2\,dt+\frac{1}{24}T^2\operatorname{sp}\left(\int_0^T P(t)\,dt\right)^2<2 \qquad (6.16)$$

Этот Z-признак более эффективен для того случая, когда почти всюду форма $(P(t)\eta, \eta)$ неотрицательна, так как в этом (и только этом) случае у краевой задачи (6.6) будут отсутствовать отрицательные собственные числа и оценка сверху числа λ_1^{-2} выражением (6.16) будет относительно более точной.

Повидимому, даже для скалярных уравнений (0.8) признак (6.16) не ыл известен.

б

Если $P^{(1)}$ — постоянная вещественная симметрическая матрица с неотрицательной формой $(P^{(1)}\eta, \eta)$, то согласно формуле (6.15) будем иметь

$$\tfrac{1}{48} T^4 \operatorname{sp} P^{(1)^2} = \sum \frac{1}{\lambda_j'^2}$$

где $(0<)\, \lambda_1' \leqslant \lambda_2' < $ — последовательные характеристические числа краевой задачи

$$y'' + \lambda P^{(1)} y = 0, \qquad y(0) + y(T) = y'(0) + y'(T) = 0$$

Отсюда, повторяя рассуждения, использованные при доказательстве Z-признака (2.16), получаем следующее предложение.

Если $(P(t)\eta, \eta) \geqslant (P^{(1)}\eta, \eta)$, *то все решения уравнения (0.8) устойчиво ограничены, коль скоро*

$$\frac{T^4}{48} \operatorname{sp}(P_{\text{ср}}^2) + \frac{T}{2}\int_0^T \operatorname{sp} Q^2\, dt < 1 + \frac{T^4}{48}\operatorname{sp} P^{(1)^2} - \frac{T^4}{\pi^4}\,\omega_{\text{м}}^4$$

где $\omega_{\text{м}}^2$ — *наибольшее собственное число матрицы* $P^{(1)}$.

В частности, если

$$(P(t)\eta, \eta) > a^2(\eta, \eta) \qquad \left(0 < a < \frac{\pi}{T}\right) \tag{6.17}$$

то все решения уравнения (0.8) *устойчиво ограничены, коль скоро*

$$\frac{T^4}{48} \operatorname{sp}(P_{\text{ср}}^2) + \frac{T}{2}\int_0^T \operatorname{sp} Q^2\, dt < 1 + \left(\frac{m}{48} - \frac{1}{\pi^4}\right) a^4 T^4 \tag{6.18}$$

Подобно тому, как это было проделано в § 3, 4, отправляясь от Z-признака (6.18), можно получить и признак устойчивости ограниченности решений уравнения (0.8) для случая, когда соотношение (6.17) выполняется при a, лежащем в интервале $[k\pi/T,\ (k+1)\pi/T]$.

3. Заканчивая этот параграф, заметим, что различные иные признаки устойчивой ограниченности решений уравненния (0.8) можно получить, используя то обстоятельство, что уравнение (0.8) (получающееся из уравнения (6.4) при $\lambda = 1$) эквивалентно канонической системе положительного типа

$$\frac{dy}{dt} = -Qy + z, \qquad \frac{dz}{dt} = -(Q^2 + P_{\text{ср}})\, y + Qz \tag{6.19}$$

где Q определяется равенствами (6.1). Применяя к системе (6.19) тот или иной признак устойчивой ограниченности решений канонической системы, мы получим соответствующий признак для уравнения (0.8).

Так, например, Z-признак (2.2) в применении к системе (6.19) позволяет утверждать, что если выполняются условия (6.6) и (6.7), то все решения уравнения (0.8) будут устойчиво ограничены, коль скоро

$$T\int_0^T \operatorname{sp}(Q^2 + P)\, dt < 2 \tag{6.20}$$

Если же, кроме того, $P(t) - P_{\text{ср}}$ — нечетная функция, то признак сохранит силу и при замене в правой части числа 2 числом 4.

Очевидно, что даже без этой замены признак (6.20) может давать в некоторых случаях лучший результат, нежели признак (6.16). Это будет всякий раз, когда $0 < \mathrm{sp} P_{\mathrm{ср}} < {}^1/_{24}\, T\, \mathrm{sp}\, P_{\mathrm{ср}}^2$.

Если в системе (6.19) сделать подстановку $z = l z_1$ и затем заменить z_1 на z, то она примет вид:

$$\frac{dy}{dt} = -Qy + lz, \qquad \frac{dz}{dt} = -l^{-1}(Q^2 + P_{\mathrm{ср}})\,y + Qz$$

Рассуждая аналогично тому, как при выводе Z-признака (5.46), без труда получим еще следующий результат.

При выполнении условий (6.6) *и* (6.7) *все решения уравнения* (0.8) *будут устойчиво ограничены, коль скоро*

$$T\left(\int_0^T q_{\mathrm{м}}^2\,dt + \omega_{\mathrm{м}}^2\right) < \frac{1}{4}\pi^2$$

где $q_{\mathrm{м}}^2(t)$ — *наибольшее собственное число матрицы* $Q^2(t)$, *а* $\omega_{\mathrm{м}}^2$ — *наибольшее собственное число матрицы* $P_{\mathrm{ср}}$.

В следующем параграфе мы остановимся на одном свойстве характеристического числа $\lambda_1(P)$, позволяющем устанавливать признаки иного типа.

§ 7. Вариационная характеристика числа $\lambda_1(P)$ и вытекающие отсюда признаки ограниченности решений уравнения (0.8). 1. Обычными методами может быть установлено, что если выполняется условие положительности в среднем

$$\int_0^T (P(t)\eta, \eta)\,dt \geqslant 0 \tag{7.1}$$

и $P(t) \not\equiv 0$, то первое положительное характеристическое число краевой задачи (0.11) существует и, более того, может быть получено как решение вариационной задачи, а именно

$$\frac{1}{\lambda_1(P)} = \max\left[\int_0^T (P(t)y, y)\,dt \Big/ \int_0^T |y'|^2\,dt\right] \qquad (y \in G_T) \tag{7.2}$$

где G_T обозначает класс всех непрерывно дифференцируемых вектор-функций $y(t)$ $(0 \leqslant t \leqslant T)$, удовлетворяющих условию $y(0) + y(T) = 0$.

Иначе свойство (7.2) можно записать еще так:

$$\frac{1}{\lambda_1(P)} = \max\left[\int_0^T (P(t)y, y)\,dt\right] \qquad (y \in G_T) \tag{7.3}$$

где G_T — совокупность всех вектор-функций $y \in G_T$, нормированных так, что

$$\int_0^T \left|\frac{dy}{dt}\right|^2 dt = 1$$

Величину $\lambda_1^{-1}(P)$ можно рассматривать как функционал, определенный на «конусе» K_T всех вещественных симметричных суммируемых матриц-функций $P(t)$ $(0 \leqslant t \leqslant T)$, удовлетворяющих условию (7.1); при этом для $P(t) \not\equiv 0$ мы полагаем $\lambda_1^{-1}(P) = 0$. Множество $\boldsymbol{K}_T$ называем «конусом», так как оно, очевидно, обладает свойствами:

а) если $P(t) \in \boldsymbol{K}_T$, то $\varkappa P(t) \in \boldsymbol{K}_T$ при $\varkappa \geqslant 0$;

б) если $P_1 \in \boldsymbol{K}_T$, $P_2 \in \boldsymbol{K}_T$, то $P_1 + P_2 \in \boldsymbol{K}_T$.

Функционал $\lambda_1^{-1}(P)$ *положительно однороден и выпукл, т. е.*

1°. $\lambda_1^{-1}(\varkappa P) = \varkappa \lambda_1^{-1}(P)$ при $\varkappa > 0$.

2°. $\lambda_1^{-1}(P_1 + P_2) \leqslant \lambda_1^{-1}(P_1) + \lambda_1^{-1}(P_2)$ для любых $P_1, P_2 \in \boldsymbol{K}_T$.

Свойство 1° очевидно. Свойство 2° также немедленно следует из (7.3), так как для $y \in \boldsymbol{G}_T$

$$\lambda_1^{-1}(P_1 + P_2) = \max \int_0^T ((P_1 + P_2) y, y)\, dt \leqslant \max \int_0^T (P_1(t) y, y)\, dt +$$

$$+ \max \int_0^T (P_2(t) y, y)\, dt = \lambda_1^{-1}(P_1) + \lambda_1^{-1}(P_2)$$

Из 1° и 2° вытекает, что для любых $P_1, P_2 \in \boldsymbol{K}_T$

$$\lambda_1^{-1}(\varkappa P_1 + (1-\varkappa) P_2) \leqslant \varkappa \lambda_1^{-1}(P_1) + (1-\varkappa)\lambda_1^{-1}(P_2) \qquad (0 \leqslant \varkappa \leqslant 1)$$

Прямым следствием равенства (7.3) является также следующее свойство.

3°. Если $P_1, P_2 \in K_T$ и $(P_1(t)\eta, \eta) \leqslant (P_2(t)\eta, \eta)$, то $\lambda_1^{-1}(P_1) \leqslant \lambda_1^{-1}(P_2)$.

Обозначим через $\boldsymbol{L}_T$ линейную совокупность всех вещественных симметричных суммируемых матриц-функций $P(t) = \| p_{jk}(t) \|_1^m$ $(0 \leqslant t \leqslant T)$. $\boldsymbol{L}_T$ можно рассматривать как линейное пространство, определяя норму $|P|$ элемента $P \in L_T$, например, как величину

$$|P| = \max_{j,k} \int_0^T |p_{jk}(t)|\, dt$$

Тогда $\boldsymbol{K}_T$ можно будет рассматривать как *телесный* замкнутый конус в пространстве $\boldsymbol{L}_T$. Телесность означает, что $\boldsymbol{K}_T$ содержит внутренние точки. Таковыми, очевидно, будут те и только те элементы $P \in \boldsymbol{K}_T$, для которых форма $(P_{\text{ср}}\eta, \eta)$ строго положительна.

Нетрудно, показать, что $\lambda_1^{-1}(P)$ является *непрерывным* функционалом на $\boldsymbol{K}_T$; более того, из (7.3) следует, что $\lambda_1^{-1}(P)$ — функционал, удовлетворяющий условию Липшица, а именно

$$|\lambda_1^{-1}(P_1) - \lambda_1^{-1}(P_2)| \leqslant n^2 T\, |P_1 - P_2| \qquad (P_1, P_2 \in \boldsymbol{K}_T)$$

Обозначим теперь через $\boldsymbol{\Pi}_T$ совокупность всех $P \in \boldsymbol{K}_T$, для которых $\lambda_1^{-1}(P) < 1$. Совокупность $\boldsymbol{\Pi}_T$ *является выпуклым телом пространства* $\boldsymbol{L}_T$.

Выпуклость $\boldsymbol{\Pi}_T$ означает, что вместе с $P_1, P_2 \in \boldsymbol{\Pi}_T$ также

$$\varkappa P_1 + (1-\varkappa) P_2 \in \boldsymbol{\Pi}_T \qquad (0 \leqslant \varkappa \leqslant 1)$$

что очевидным образом следует из 1° и 2°.

Если $P \in \boldsymbol{K}_T$, то при достаточно малом $\varepsilon > 0$ также $\varepsilon P \in \boldsymbol{K}_T$, и если P внутренний элемент $\boldsymbol{K}_T$, то таковым будет и εP.

Вместе с любым элементом P тело $\boldsymbol{\Pi}_T$ будет содержать и весь отрезок $\varkappa P (0 \leqslant \varkappa \leqslant 1)$. Более того, в силу свойства 3° функционала $\lambda_1^{-1}(P)$, если $P \in \boldsymbol{\Pi}_T$, то $\boldsymbol{\Pi}_T$ будет принадлежать и всякий элемент $P_1 \in \boldsymbol{K}_T$, удовлетворяющий условию

$$(P_1(t)\eta, \eta) \leqslant (P(t)\eta, \eta)$$

В силу теоремы II, если $P \in \boldsymbol{\Pi}_T$ и $P(t)\eta \not\equiv 0$ при $\eta \neq 0$, то все решения уравнения (0.8) устойчиво ограничены при $0 < \lambda < 1$. Это утверждение допускает обращение.

2. Обозначим через $p_м(t)$ наибольшее собственное число матрицы $P(t)$; тогда

$$(P(t)\eta, \eta) \leqslant p_м(t)(\eta, \eta) \tag{7.4}$$

и в силу свойства 3° числа $\lambda_1(P)$ будем иметь

$$\lambda_1(P) \geqslant \lambda_1(p_м I_m) \tag{7.5}$$

С другой стороны, очевидно, что $\lambda_1(p_м I_m)$ есть не что иное, как $\lambda_1(p_м)$, т. е. первое положительное характеристическое число скалярной краевой задачи

$$y'' + \lambda p_м(t) y = 0, \qquad y(0) + y(T) = y'(0) + y'(T) = 0$$

Таким образом, все решения уравнения $y'' + P(t) y = 0$ *устойчиво ограничены, коль скоро* $\lambda_1(p_м) > 1$.

В этом утверждении, конечно, подразумевается, что матрица-функция $P(t)$ удовлетворяет условиям (7.1) и условию $P(t)\eta \not\equiv 0$ при $\eta \neq 0$.

Оно сохраняет силу, если в нем заменить $p_м(t)$ на

$$p_м^+(t) = \frac{1}{2}(p_м(t) + |p_м(t)|)$$

так как при этом неравенство (7.4), а с ним и (7.5) только усилятся.

Так как $p_м^+(t) \geqslant 0$, то к $\lambda_1(p_м^+)$ применима классическая оценка Ляпунова, откуда заключаем, что *решения уравнения (0.8) устойчиво ограничены, коль скоро*

$$T \int_0^T p_м^+(t)\, dt < 4 \tag{7.6}$$

Соображения, приведенные в п. 1, 2 этого параграфа, при более частных предположениях относительно $P(t)$ приводились нами и ранее (см. § 6[в] и § 9[1а]).

3. Свойство 2° функционала $\lambda_1(P)$ также может быть использовано для получения различных Z-признаков. Поясним это на примере скалярного уравнения

$$y'' + p(t) y = 0 \tag{7.7}$$

с $p_{ср} = 0$, так что

$$p(t) \sim \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos\frac{2k\pi t}{T} + b_k \sin\frac{2k\pi t}{T}\right)$$

В соответствии с обозначениями § 7 положим

$$q(t) = \frac{T}{2\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \left(a_k \sin\frac{2k\pi t}{T} - b_k \cos\frac{2k\pi t}{T}\right)$$

и введем в рассмотрение четные и нечетные составляющие функции $p(t)$ и $q(t)$:

$$p_a(t) = \frac{1}{2}(p(t) + p(-t)) \sim a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos\frac{2k\pi t}{T}$$

$$p_b(t) = \frac{1}{2}(p(t) - p(-t)) \sim \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin\frac{2k\pi t}{T}$$

и аналогично

$$q_a(t) = \frac{1}{2}(q(t) + q(-t)), \qquad q_b(t) = \frac{1}{2}(q(t) - q(-t))$$

На основании 3° будем иметь

$$\lambda_1^{-1}(p) \leqslant \lambda_1^{-1}(p_a) + \lambda_1^{-1}(p_b)$$

С другой стороны, согласно соотношению (5.20)

$$\lambda_1^{-1}(p_b) < \frac{1}{4} T \int_0^T q_b^2\, dt$$

а согласно Z-признаку (5.37)

$$\lambda_1^{-1}(p_a) < \frac{4T}{\pi^2} \int_0^T q_a^2\, dt$$

Отсюда находим, что *если* $p_{ср} = 0$ *и* $p(t) \not\equiv 0$, *то все решения уравнения (7.7) будут устойчиво ограничены, коль скоро*

$$\frac{2}{\pi}\left(T \int_0^T q_a^2 dt\right)^{1/2} + \frac{1}{2}\left(T \int_0^T q_b^2\, dt\right)^{1/2} < 1$$

Напомним, что рассмотрения § 5, п. 4 позволяют предполагать, что в этом Z-признаке число $2/\pi$ можно заменить числом $1/\sqrt{3}$.

Нетрудно получить различные обобщения этого признака на случай $p_{ср} \geqslant 0$, а также на случай векторных уравнений.

Дополнение. Одно частное применение теоремы II.

Пусть $R(t) = R(t+T)$ и $P(t) = P(t+T)$ — две вещественные симметричные матрицы-функции m-го порядка, причем форма $(P(t)\eta, \eta)$ неотрицательна в среднем и $P(t)\eta \not\equiv 0$ при $\eta \neq 0$.

Теорема II, § 6 позволяет сформулировать следующее утверждение. *Всегда найдется положительное* ε_0 *такое, что для всякого* $\varepsilon > 0$ *и* $< \varepsilon_0$ *все решения уравнения*

$$\frac{d^2y}{dt^2} + (R(\omega t) + \varepsilon\omega^2 P(\omega t))\, y = 0 \tag{*}$$

будут ограничены, коль скоро ω *будет превышать некоторую границу* $\Omega(\varepsilon)$.

В самом деле, требуемому условию удовлетворяет число $\varepsilon_0 = \lambda_1(P)$. Чтобы в этом убедиться, произведем сперва в уравнении (*) замену $\tau = \omega t$ и затем снова заменим букву τ буквой t. Тогда уравнение (*) примет вид:

$$y'' + (\omega^{-2}R(t) + \varepsilon P(t))\, y = 0$$

Так как при $0 < \varepsilon < \lambda_1(P)$ решения уравнения $y'' + \varepsilon P(t)\, y = 0$ устойчиво ограничены и

$$\omega^{-2} \int_0^T |r_{jk}(t)|\, dt \to 0 \quad \text{при} \quad \omega \to \infty \quad (R(t) = \| r_{jk}(t) \|_1^m)$$

то утверждение является непосредственным следствием теоремы II § 6.

В частности, утверждение применимо к линеаризированному уравнению движения математического маятника длины l с точкой подвеса, вертикально вибрирующей по закону $s = \varepsilon \sin(\omega l + \alpha)$. Действительно, это уравнение имеет вид:

$$\varphi'' + \left(\pm \frac{g}{l} - \varepsilon\omega^2 \sin(\omega t + \alpha)\right)\varphi = 0$$

где φ — угол отклонения маятника от начального вертикального положения, а при g/l стоит знак $+$ или $-$ в зависимости от того, находится ли маятник под точкой подвеса или над ней. Таким образом, «линейная теория» позволяет утверждать, что всегда найдется граница $\varepsilon_0 > 0$ такая, что при амплитуде $\varepsilon < \varepsilon_0$ $(\varepsilon > 0)$ маятник будет совершать устойчивые колебания независимо от того, расположен ли он первоначально под или над точкой подвеса, коль скоро частота ω вибраций точки подвеса достаточно велика $(\omega > \Omega(\varepsilon))$.

Этот парадоксальный вывод линейной теории хорошо известен. Сравнительно недавно П. Л. Капица [8] подтвердил его опытным путем и развил нелинейную теорию явления.

Поступила 30 VII 1955

ЛИТЕРАТУРА

1. Крейн М. Г. а) Основные положения теории λ-зон устойчивости канонической системы линейных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами, Сборник памя г ι А. Андронова, Изд. АН СССР, 1955 г. 413—498.

б) Обобщение некоторых исследований А. М. Ляпунова о линейных дифференциальных уравнениях с периодическими коэффициентами, ДАН СССР, т. LXXIII, № 3, 445—448, 1950 г.

в) О некоторых задачах на максимум и минимум для характеристических чисел и о ляпуновских зонах устойчивости, ПММ, т. XV, в. 3, 1951, 323—348.

2. Гельфанд И. М. и Лидский В. Б. О структуре областей устойчивости линейных канонических систем дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами, УМН, X, вып. 1 (63), 1955, 3—40.

3. Ляпунов А. М. а) Sur une série relative à la théorie des équations différentielles linéaires à coefficients périodiques, C. R. t. CXXIII 1896, 1248—1252.

б) Sur une équation differentielle linéaire du second ordre, C. R. t. CXXVIII, 15, 1899, 910—913.

в) Sur une équation transcendante et les équations différentielles liéaires du second ordre à coefficients periodiques C. R. t. CXXVIII, № 18, 1899, 1085—1088.

4. Старжинский В. М., Обзор работ об условиях устойчивости тривиального решения системы линейных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами, ПММ, т. XVIII, вып. 4, 1954. 469—510,

5. Жуковский Н. Е. Условия конечности интегралов уравнения $d^2y/dx^2 + py = 0$ Собр. соч., т. 1, 1948, 246—253.

6. Якубович В. А. Критерий устойчивости для системы двух уравнений канонического вида с периодическими коэффициентами. ДАН СССР, т. LXXVIII, № 2, 1951. 221—224,

7. Нейгауз М. Г. и Лидский В. Б. Об ограниченности решений линейных систем дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами. ДАН, СССР, т. LXXVII, № 2, 1951, 189—192.

8. Капица П. Л. а) Маятник с вибрирующим подвесом, Успехи физических наук, XLIV, № 1, 1951, 7—20.

б) Динамическая устойчивость маятника при колеблющейся точке подвеса, ЖЭТФ, т. 21, № 5, 1951, 588—597.