Прикладная математика и механика. Том XIX, 1955
Институт механики Академии наук Союза ССР

ТЕОРЕМА ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ОБТЕКАНИЯ КЛИНОВИДНОГО ПРОФИЛЯ ОКОЛОЗВУКОВЫМ ПОТОКОМ ГАЗА

А. Ф. Крючин

(Рига)

Задача единственности для газодинамического уравнения Чаплыгина

$$K(\sigma)\frac{\partial^2\psi}{\partial\theta^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial\sigma^2}=0$$

была поставлена и решена Ф. И. Франклем [1]. Ниже аналогичным путем доказывается единственность задачи обтекания клиновидного профиля адиабатическим потоком газа при отсутствии трения и теплопередачи с отсоединенной ударной волной; эта задача сводится к решению следующей граничной задачи [2,3].

Ищется регулярное решение уравнения

$$yz_{xx}+z_{yy}=0 \qquad (1)$$

в области Ω (фиг. 1), удовлетворяющее условиям:

(1) Функция $z=0$ вдоль KB и $K'D$.

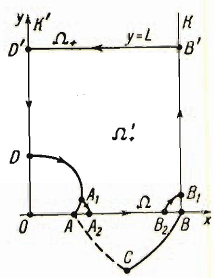
(2) Функция $z=0$ вдоль характеристики BC, уравнение которой $(x-1)^2+{}^4/_9 y^3=0$.

(3) Вдоль кривой DA, уравнение которой $2x^2+(y+\beta)^2(y-\beta)=0$:

$$(7y-\beta)\sqrt{\tfrac{1}{2}(\beta-y)}\,z_x+(5y-3\beta)\,z_y=0 \qquad (2)$$

(4) Функция $z=z_A<0$ в точке A.

Решение задачи рассматривается в классе регулярных функций, т. е.: а непрерывных и обладающих непрерывными и ограниченными производными в замкнутой области $\Omega°$; б) функции и их производные по y стремятся к нулю при $y\to\infty$.



Фиг. 1

В классе регулярных функций имеет место

Теорема. Регулярное решение уравнения (1), удовлетворяющее условиям задачи, единственно. Доказательство теоремы основано на двух леммах.

Лемма 1. (Ф. Трикоми [4]). Если в треугольнике ACB (фиг. 1) решение уравнения (1) равно нулю на характеристике BC, то

$$\int_{x_A}^{1}\tau(x)\,\nu(x)\,dx\geqslant 0 \qquad \left(\tau(x)=z(x,\ 0),\quad \nu(x)=\lim_{y\to 0}\frac{\partial z}{\partial y}\right) \qquad (3)$$

Лемма 2. Если в области Ω_+ (эллиптическая часть области) регулярное решение уравнения (1) удовлетворяет условиям задачи, причем $z_A=0$, то

$$\int_{x_A}^{1}\tau(x)\,\nu(x)\,dx\leqslant 0 \qquad (4)$$

Рассмотрим область Ω_+', образованную из Ω_+ исключением точек A, B при помощи дуг «нормальных» кривых

$$(x-x_A)^2+\frac{4}{9}y^3=\delta^2, \qquad (x-1)^2+\frac{4}{9}y^3=\delta^2$$

и бесконечно удаленной точки прямой $y=L$. Для любого решения уравнения (1) имеет место тождество

$$\frac{\partial}{\partial x}(yzz_x)+\frac{\partial}{\partial y}(zz_y)=yz_x^2+zy^2$$

Интегрируем это тождество по области Ω_+' и преобразуем интеграл от левой части в криволинейный:

$$\oint\limits_{\Gamma_+'} z(yz_x dy - z_y\,dx)=\iint\limits_{\Omega_+'}(yz_x^2+z_y^2)\,dx\,dy \qquad (5)$$

где Γ_+' — граница области Ω_+'. В силу граничных условий

$$\int\limits_{D'D} z(yz_x dy - z_y\,dx)=0, \qquad \int\limits_{B_1B'} z(yz_x\,dy - z_y\,dx)=0 \qquad (6)$$

Так как $z(x,\ y)$ — регулярное решение, то

$$\lim_{\delta\to 0}\int\limits_{A_1A_2} z(yz_x\,dy - z_y\,dx)=0,\quad \lim_{\delta\to 0}\int\limits_{B_2B_1} z(yz_x\,dy - z_y\,dx)=0,\quad \lim_{L\to\infty}\int\limits_{B'}^{D'} zz_y\Big|_{y=L}dx=0 \qquad (7)$$

Докажем, что

$$J=\int\limits_{AD} z(yz_x\,dy - z_y\,dx)\geqslant 0$$

Так как $dz=z_xdx+z_ydy$ вдоль кривой AD, то из уравнения этой кривой $2x^2+(y+\beta)^2(y-\beta)=0$ имеем

$$\frac{dx}{dy}=\frac{1}{2\sqrt{2}}\frac{\beta-3y}{\sqrt{\beta-y}} \qquad (8)$$

Поэтому, учитывая (2), получим

$$J=\int\limits_{AD}\sqrt{\frac{\beta-y}{2}}\,z\,dz=\frac{1}{4\sqrt{2}}\int\limits_{AD}\frac{z^2}{\sqrt{\beta-y}}\,dy\geqslant 0 \qquad (9)$$

Соотношение (5) перепишется

$$\int\limits_{x_A}^{1}\tau(x)\,\nu(x)\,dx=-\iint\limits_{\Omega_+}(yz_x^2+z_y^2)\,dx\,dy+\int\limits_{DA} z(yz_xdy-z_ydx)\leqslant 0 \qquad (10)$$

Из лемм 1 и 2 следует

$$\int\limits_{x_A}^{1}\tau(x)\,\nu(x)\,dx=0$$

Тогда из (10)

$$\int\limits_{DA} z(yz_x\,dy - z_y\,dx)=0, \qquad \iint\limits_{\Omega_+}(yz_x^2+z_y^2)\,dx\,dy=0$$

Это означает, что $z\equiv 0$ во всей области Ω_+. Из регулярности решения $z(x,\ y)$ в Ω_+ следует $\tau(x)=\nu(x)=0$. Тогда как следствие теоремы единственности решения задачи Коши с начальными данными на линии параболичности имеем $z\equiv 0$ во всей области Ω, что и доказывает теорему.

Поступила 3 II 1955

ЛИТЕРАТУРА

1. Франкль Ф. И. О задачах Чаплыгина для смешанных до- и сверхзвуковых течений, Известия АН СССР, серия математическая, т. IX, № 2, 1945.
2. Овсянников Л. В. Уравнения околозвукового движения газа. Вестник ЛГУ, № 6, 1952.
3. Крючин А. Ф. Обтекание профиля околозвуковый потоком. ПММ, т. XVIII, вып. 5, 1954.
4. Трикоми Ф. О линейных уравнениях смешанного типа. ГИТТЛ, 1947.