Прикладная математика и механика. Том XIX, 1955
Институт механики Академии наук Союза ССР

ОБ ОДНОМ СЛУЧАЕ ИНТЕГРИРОВАНИЯ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ С ПЕРЕМЕННЫМ КОЭФФИЦИЕНТОМ ВЯЗКОСТИ

А. К. Павлин
(Черновицы)

Рассматривается плоская задача о теплообмене в вязкой жидкости, заключенной между двумя неограниченными параллельными плоскостями, одна из которых перемещается с постоянной скоростью. Для величины, обратной абсолютному коэффициенту вязкости, принята линейная зависимость от температуры. Найдено распределение скорости и температуры вязкой жидкости по сечению.

1. Между двумя твердыми неограниченными параллельными стенками, из которых верхняя движется равномерно с постоянной скоростью в направлении положительной оси OX, находится вязкая несжимаемая жидкость. Требуется определить распределение скорости и температуры в жидкости, если температура стенок поддерживается постоянной, движение жидкости происходит лишь за счет перемещения границы и на распределение температур и скоростей влияет тепло, приобретаемое жидкостью вследствие внутреннего трения.

Ось OX лежит в нижней плоскости, которую мы считаем неподвижной, ось OY перпендикулярна к ней; толщина плоской трубы — h.

Считаем, что скорость частиц жидкости всюду параллельна оси OX, давление постоянно и что действием массовых сил пренебрегается.

При этих условиях для решения поставленной задачи имеем уравнения

$$\frac{d}{dy}\left(\mu\frac{du}{dy}\right)=0, \qquad \lambda\frac{d^2T}{dy^2}=-\mu\left(\frac{du}{dy}\right)^2 \tag{1.1}$$

которые вместе с тем являются уравнениями движения жидкости и притока тепла в слое между вращающимися цилиндрами при малой толщине слоя. Граничные условия

$$u=0, \quad T=T_1 \text{ при } y=0, \quad u=V, \quad T=T_2 \text{ при } y=h \tag{1.2}$$

В уравнениях (1.1) и (1.2) u и T — соответственно переменные скорость и температура жидкости, зависящие от y, λ — коэффициент теплопроводности, взятый в механических единицах, который мы считаем постоянным, μ — абсолютный коэффициент вязкости.

Для функции $\mu^{-1}=F(T)$ примем линейную зависимость, справедливую для густых (смазочных) масел, нефти, а также для некоторых расплавленных металлов (например, чугуна), механизм движения которых не характеризуется какими-либо особенностями по сравнению с обычными случаями течения «нормальных» жидкостей:

$$F(T)=\frac{1}{\mu_1}+B(T-T_1) \tag{1.3}$$

Здесь μ_1 — вязкость при температуре T_1, B — постоянный температурный градиент текучести.

2. Примем для определенности $T_2 > T_1$ и перейдем к безразмерным величинам

$$y = \frac{y}{h}, \qquad \mu = \frac{\mu}{\mu_1}, \qquad u = \frac{u}{V}, \qquad T = \frac{T - T_1}{T_2 - T_1} \tag{2.1}$$

Для простоты в дальнейшем будем пользоваться прежними обозначениями.

Уравнения (1.1), граничные условия (1.2) и зависимость (1.3) в безразмерных величинах принимают вид:

$$(\mu u')' = 0, \qquad T'' = -\mu q^2 (u')^2 \tag{2.2}$$

$$u = 0, \quad T = 0 \quad \text{при } y = 0; \qquad u = 1, \quad T = 1 \quad \text{при } y = 1 \tag{2.3}$$

$$\frac{1}{\mu} = 1 + p^2 T \tag{2.4}$$

Здесь и в дальнейшем производные берутся по y.

Из (2.2) следует, что $\mu u' = c_1$, причем $c_1 = \tau h / V\mu_1$, где $\tau = \mathrm{const}$ — напряжение трения, которое, таким образом, остается постоянным во всех плоскостях, параллельных стенкам, и на самих стенках и подлежит в дельнейшем определению. Попутно заметим, что τ однозначно определяется заданием скорости V стенки.

Далее, используя (2.4), получим $u' = c_1 (1 + p^2 T)$; отсюда $c_1 p^2 T'' = u'''$. Подставляя последнее выражение для T'' во второе уравнение (2.2) и заменяя $\mu u'$ на c_1, получим

$$u''' + a^2 u' = 0 \qquad \left(a^2 = c_1{}^2 p^2 q^2 = \tau^2 h^2 \frac{\beta}{\lambda}\right) \tag{2.5}$$

Решая это линейное уравнение и удовлетворяя граничным условиям (2.3), найдем искомое выражение для u в виде

$$u = A + \frac{1}{pq} \sin(ay) - A \cos(ay) \tag{2.6}$$

После подстановки u' в (2.5) получим также, что

$$T = \frac{1}{p^2} [\cos(ay) + pqA \sin(ay) - 1] \tag{2.7}$$

В (2.6) и (2.7)

$$A = \frac{p^2 + q^2 + 2}{2q^2}, \qquad \frac{a}{2} = \operatorname{arc\,tg} \frac{pq}{2 + p^2} \tag{2.8}$$

Таким образом, из четырех произвольных постоянных две оказались равными по величине и противоположными по знаку, а τ определяется из соотношения

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\tau h}{2} \sqrt{\frac{B}{\lambda}}\right) = \frac{\mu_1 V}{2 + \mu_1 B T p} \sqrt{\frac{B}{\lambda}} \tag{2.9}$$

Так как напряжение трения τ однозначно определяется заданием V и возрастает вместе с V, то легко установить, что при определении τ следует в правой части второго равенства (2.8) всегда брать главное значение; при этом с возрастанием a скорость V возрастает от 0 до ∞, что вполне соответствует физическому содержанию задачи. Итак, последняя постоянная τ, а значит, и C_1, однозначно определяется из (2.9).

Если теперь в решениях (2.6) и (2.7) перейти к размерным величинам, получим точное решение полных уравнения движения и притока тепла (1.1) и (1.2):

$$u = \frac{B\lambda\mu_1 T_p^{\,2} + \mu_1 V^2 + 2\lambda T_p}{2\mu_1 V}\left[1 - \cos\left(a\frac{y}{h}\right)\right] + \frac{1}{\mu_1}\sqrt{\frac{\lambda}{B}}\sin\left(a\frac{y}{h}\right) \tag{2.10}$$

$$T = T_1 + \frac{1}{B\mu_1}\left[\cos\left(a\frac{y}{h}\right) + \sqrt{\frac{B}{\lambda}}\,\frac{B\lambda T_p^{\,2} + \mu_1 V^2 + 2\lambda T_p}{2V}\sin\left(a\frac{y}{h}\right) - 1\right] \tag{2.11}$$

При $\mu = \mathrm{const}$ вместо (2.10) получим $u = (y/h)V$ — обыкновенный линейный закон, а вместо (2.11)

$$T = T_1 + \left(T_p + \frac{\mu V^2}{2\lambda}\right)\frac{y}{h} - \frac{\mu V^2}{2\lambda}\left(\frac{y}{h}\right)^2$$

и значение y_0, при котором $T = T\max$, будет равно

$$y_0 = \left(\frac{\lambda T_p}{\mu V^2} + \frac{1}{2}\right)h$$

Как и следовало ожидать, $y_0 = {}^1\!/_2 h$ при $T_p = 0$. В последнем случае

$$T\max = T_1 + \frac{\mu V^2}{8\lambda}$$

3. Перейдем к исследованию зависимостей $u = u(y)$ и $T = T(y)$, причем будем пользоваться формулами (2.6) и (2.7).

Из (2.5) сразу вытекает, что

$$u'(y) \neq 0 \qquad (V \neq 0) \qquad \text{и} \quad u'(y) > 0$$

Из (2.2) следует, что $T''(y) < 0$, т. е. что кривая $T = T(y)$ в системе yOT вогнута вниз.

Для определения y_0 — значения безразмерной координаты y, при котором $T = T\max$, поступаем обычным образом.

Искомая величина y_0 находится из соотношения

$$y_0 = \frac{1}{a}\operatorname{arc\,tg}\frac{p}{2q}(p^2 + q^2 + 2) \qquad (0 \leqslant y_0 \leqslant 1)$$

где a определяется из (2.9). Фиксируя все параметры, входящие в p и q, кроме V, найдем, что $y_0 \to {}^1\!/_2$ при $V \to \infty$, $y_0 \to \infty$ при $V \to 0$.

Значение $T\max$ дается формулой

$$T\max = \frac{1}{p^2}\left(\sqrt{1 + (pqA)^2} - 1\right) \tag{3.1}$$

или в размерных величинах

$$T\max = T_1 + \frac{T_p}{p^2}\left(\sqrt{1 + (pqA)^2} - 1\right) \tag{3.2}$$

значения p, q и A были даны выше.

Производная $u''(y)$ совпадает, как нетрудно проверить, по знаку с $T'(y)$ и обращается в нуль вместе с последней, т. е. при $y = y_0$; в интервале $[0, y_0)$ производная $u'' < 0$, в интервале $(y_0, 1]$ имеем $u'' > 0$ и $u''(y_0) = 0$. Определим еще V_0 — скорость, при которой $T\max = 1$ и $y_0 = 1$. Считая в (3.1) $T\max = 1$, получим после несложных преобразований соотношение

$$q^2 = p^2 + 2 \tag{3.3}$$

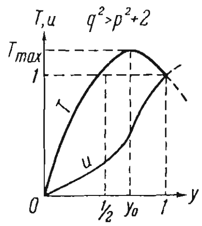
из которого определяется V_0.

Легко проверить, что

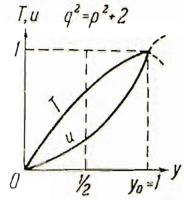
$$T'(1) = 0 \text{ при } q^2 = p^2 + 2.$$

При значении $V = V_0$, определяемой формулой (3.3), точка (1.1) в системах координат (yOu) и (yOT) будет точкой максимума для T и точкой перегиба для u.

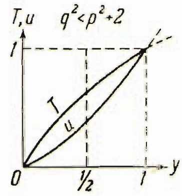
Наглядно изменение T и u при различных значениях V и произвольных, но фиксированных значениях всех остальных параметров можно изобразить следующими графиками в безразмерных величинах T и u.



Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3

В заключение приведем таблицу, при вычислении которой принято

$$T_1 = 20°, \quad T_2 = 40°, \quad \mu_1 = 243\cdot 10^{-4}, \frac{\text{кг сек}}{\text{м}^2}, \quad \lambda = 30.7\cdot 10^{-6} \frac{\text{ккал}}{\text{м сек° C}}$$

$$h = 10^{-3}\text{ м}, \quad J = 427 \frac{\text{кгм}}{\text{ккал}}$$

Таблица

V м/сек	1	5	6.7	10	15	20
A	23.30	1.41	1	0.73	0.60	0.56
$1/pq$	2.20	0.44	0.36	0.22	0.15	0.11
p^2	2.24	—	—	—	—	—
q^2	0.09	2.33	4.20	9.31	20.92	37.21
y_0/y	6.80	1.31	1	0.78	0.65	0.60
$T_{\max}$	40[1]	40[1]	40	42	48	58
τ кг/м^2	11	52	66	86	106	109
τ_0 кг/м^2	14	72	97	145	217	290

[1] Наибольшая температура в подшипнике (при $y = h$).

В этой таблице τ_0 — напряжение трения при $\mu = \text{const}$, $T = 30°$. Для подшипников $d = 24$ см взятые в таблице линейные скорости соответствуют диапазону числа оборотов от 85 до 1600 в минуту.

Нами взят, конечно, наиболее неблагоприятный случай $T > T_1$, и все же полученные результаты без учета теплоотдачи (охлаждения) могут быть приняты во внимание при расчетах.

Поступила 3 III 1954