Прикладная математика и механика. Том XIX, 1955
Институт механики Академии наук Союза ССР

О ВОЛНАХ НА ПОВЕРХНОСТИ РАЗДЕЛА ДВУХ ЖИДКОСТЕЙ, ТЕКУЩИХ ПОД УГЛОМ ДРУГ К ДРУГУ

И. Н. Кочина

(Москва)

Рассматривается пространственное волновое движение на границе раздела двух жидкостей, текущих под углом друг к другу.

Эта задача поставлена Л. Н. Сретенским [1], рассмотревшим свободные волны на поверхности раздела двух жидкостей в предположении, что верхняя и нижняя жидкости простираются до бесконечности.

В первом разделе обе жидкости предполагаются простирающимися до бесконечности, а в нижней жидкости располагается тело произвольной формы.

Во втором разделе нижняя жидкость предполагается ограниченной горизонтальным дном, на котором находится препятствие произвольной формы.

1. Пусть горизонтальная плоскость xy является поверхностью раздела двух жидкостей разной плотности, которые мы будем предполагать идеальными, несжимаемыми и однородными, причем нижняя жидкость имеет плотность φ_1 и простирается безгранично вниз, а верхняя с плотностью φ_2 простирается безгранично вверх.

В нижней жидкости помещается тело, ограниченное поверхностью S, обладающей во всех точках непрерывной кривизной.

Предположим, что нижняя жидкость движется со скоростью c_1, направленной вдоль оси x, а верхняя — со скоростью c_2, направленной под углом α к оси x. Движение предполагается установившимся и безвихревым, а возмущения на поверхности раздела

$$z = \delta(x, y) \tag{1.1}$$

предполагаются малыми.

Потенциалы скоростей нижней и верхней жидкостей могут быть записаны соответственно в виде

$$c_1 x + c_1 \varphi_1(x, y, z), \qquad c_2 x \cos\alpha + c_2 y \sin\alpha + c_2 \varphi_2(x, y, z)$$

Продифференцировав по времени уравнение (1.1), получим условие на поверхности раздела

$$w = u\frac{\partial \delta}{\partial x} + v\frac{\partial \delta}{\partial y}$$

Пренебрегая произведениями малых величин, получаем для частицы нижней жидкости, находящейся на поверхности раздела, условие

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial z} = \frac{\partial \delta}{\partial x}$$

Так как $\delta(x, y)$ мало, то можно считать это условие выполненным на плоскости $z = 0$.

Для частицы верхней жидкости имеем

$$\frac{\partial \varphi_2}{\partial z} = \frac{\partial \delta}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial \delta}{\partial y}\sin\alpha \qquad \text{при } z = 0$$

Используя уравнение Бернулли и непрерывность давления на поверхности разделе, получим еще одно условие:

$$g(\rho_1-\rho_2)\,\delta(x,y)=\rho_2 c_2^2\left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial\varphi_2}{\partial y}\sin\alpha\right)-\rho_1 c_1^2\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}$$

Считаем его выполняющимся также на плоскости $z=0$.

Задача сводится к определению функции $\varphi_1(x,y,z)$, гармонической в области, ограниченной плоскостью $z=0$ и телом S, и функции $\varphi_2(x,y,z)$, гармонической в области $z>0$. Эти функции должны удовлетворять следующим граничным условиям:

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial z}=\frac{\partial\delta}{\partial x}, \qquad \frac{\partial\varphi_2}{\partial z}=\frac{\partial\delta}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial\delta}{\partial y}\sin\alpha \tag{1.2}$$

$$\nu\delta(x,y)=m_2\left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial\varphi_2}{\partial y}\sin\alpha\right)-m_1\frac{\partial\varphi_1}{\partial x} \qquad \text{при } z=0$$

где

$$\nu=\frac{g(\rho_1-\rho_2)}{\rho_1 c_1^2+\rho_2 c_2^2}, \qquad m_k=\frac{\rho_k c_k^2}{\rho_1 c_1^2+\rho_2 c_2^2} \qquad (k=1,\ 2) \tag{1.3}$$

Кроме того, на поверхности S имеем условие

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial n}=-\cos(n,x) \tag{1.4}$$

Исключая из уравнений (1.2) $\delta(x,y)$, получаем граничные условия для $\varphi_1(x,y,z)$ и $\varphi_2(x,y,z)$ при $z=0$:

$$\nu\frac{\partial\varphi_1}{\partial z}=m_2\left(\frac{\partial^2\varphi_2}{\partial x^2}\cos\alpha+\frac{\partial^2\varphi_2}{\partial x\,\partial y}\sin\alpha\right)-m_1\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial x^2} \tag{1.5}$$

$$\nu\left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial z}-\frac{\partial\varphi_1}{\partial z}\cos\alpha\right)=m_2\sin\alpha\left(\frac{\partial^2\varphi_2}{\partial x\,\partial y}\cos\alpha+\frac{\partial^2\varphi_2}{\partial y^2}\sin\alpha\right)-m_1\sin\alpha\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial x\,\partial y}$$

2. Вполне аналогично Н. Е. Кочину [2] ищем сперва потенциалы скорости движения, вызванного источником, находящимся в точке (ξ,η,ζ) нижней жидкости, в виде

$$\varphi_1(x,y,z)=\frac{1}{r}+\operatorname{Re}\int_{-\pi}^{\pi}\int_0^{\infty}A(\lambda,0)\,e^{\lambda z}e^{\lambda(x\cos\theta+y\sin\theta)i}\,d\lambda\,d\theta$$
$$\varphi_2(x,y,z)=\operatorname{Re}\int_{-\pi}^{\pi}\int_0^{\infty}F(\lambda,\theta)\,e^{-\lambda z}e^{\lambda(x\cos\theta+y\sin\theta)i}\,d\lambda\,d\theta \tag{2.1}$$

где

$$r=\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}$$

Функции $A(\lambda,\theta)$ и $F(\lambda,\theta)$ определяются из условий (1.5).

Затем, распределяя источники переменной мощности $\gamma(\xi,\eta,\zeta)$ на поверхности S, т. е. умножая (2.1) на $-\gamma(\xi,\eta,\zeta)/4\pi$ и интегрируя по S, получаем выражения для потенциалов скоростей

$$\varphi_1(x,y,z)=-\frac{1}{4\pi}\iint_S\frac{\gamma(S)}{r}\,dS-\frac{1}{8\pi^2}\operatorname{Re}\int_{-\pi}^{\pi}\int_0^{\infty}\frac{\lambda[m_2\cos^2(\theta-\alpha)-m_1\cos^2\theta]-\nu}{Q(\lambda,\theta)}\times$$
$$\times\, e^{\lambda z}\,\overline{H(\lambda,\theta)}\,e^{\lambda(x\cos\theta+y\sin\theta)i}\,d\lambda\,d\theta \tag{2.2}$$

$$\varphi_2(x,y,z)=-\frac{m_1}{4\pi^2}\operatorname{Re}\int_{-\pi}^{\pi}\int_0^{\infty}\frac{\lambda\cos(\theta-\alpha)\cos\theta}{Q(\lambda,\theta)}\,e^{-\lambda z}\,\overline{H(\lambda,\theta)}\,e^{\lambda(x\cos\theta+y\sin\theta)i}\,d\lambda\,d\theta$$

а из последнего условия (1.2) — выражение для возвышения поверхности раздела

$$\delta(x,y)=+\frac{m_1}{4\pi^2}\operatorname{Re}\int_{-\pi}^{\pi}\int_0^{\infty}\frac{\lambda\cos\theta\, i\,\overline{H(\lambda,\theta)}}{Q(\lambda,\theta)}\,e^{\lambda(x\cos\theta+y\sin\theta)i}\,d\lambda\,d\theta \tag{2.3}$$

где

$$Q(\lambda, \theta) = \lambda [m_2 \cos^2(\theta - \alpha) + m_1 \cos^2 \theta] - \nu \tag{2.4}$$

$$H(\lambda, \theta) = \iint\limits_S \gamma(S)\, e^{\lambda\zeta} e^{\lambda(\xi \cos\theta + \eta \sin\theta) i}\, dS \tag{2.5}$$

Функция $H(\lambda, \theta)$ введена Н. Е. Кочиным [2]; все результирующие выражения зависят от формы тела только через эту функцию. Заметим, что $Q(\lambda, \theta)$ обращается в нуль при

$$\lambda_0(\theta) = \frac{\nu}{m_2 \cos^2(\theta - \alpha) + m_1 \cos^2\theta}$$

так что под интегралами, взятыми по λ, в выражениях (2.2) и (2.3) понимаются их главные значения в смысле Коши.

Поскольку $2\pi / \lambda_0(\theta)$ — длина свободной волны, потенциалы скорости свободных волн имеют вид:

$$\begin{aligned} \varphi_{10} &= \operatorname{Re} \int_{\theta_1}^{\theta_2} A_0(\theta)\, e^{\lambda_0 z} e^{\lambda_0(x\cos\theta + y\sin\theta) i}\, d\theta \\ \varphi_{20} &= -\operatorname{Re} \int_{\theta_1}^{\theta_2} A_0(\theta) \frac{\cos(\theta - \alpha)}{\cos\theta} e^{-\lambda_0 z} e^{\lambda_0(x\cos\theta + y\sin\theta) i}\, d\theta \end{aligned} \tag{2.6}$$

Выражение для возвышения поверхности раздела свободных волн получается из последнего условия (1.2):

$$\delta_0(x, y) = -\operatorname{Re} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{iA_0(\theta)}{\cos\theta} e^{\lambda_0(x\cos\theta + y\sin\theta) i}\, d\theta \tag{2.7}$$

Пределы θ_1, θ_2 и функция $A_0(\theta)$ будут выбраны ниже.

При помощи граничного условия (1.4) можно составить интегральное уравнение для определения функции $\gamma(S)$. Аналогично тому, как это сделано в работе Н. Е. Кочина [2], можно доказать существование и единственность решения этого уравнения.

3. Исследуем теперь вид волн вдали от тела. Для этого прежде всего повернем оси координат на угол $^1/_2\,\alpha + \omega_0$, соответствующий экстремуму функции $\lambda_0(\theta)$; при этом ω_0 определится из уравнения $\operatorname{tg} 2\omega_0 = (m_2 - m_1) \operatorname{tg} \alpha$. В новых переменных λ, χ знаменатель подинтегрального выражения (2.3) имеет вид, симметричный относительно χ:

$$Q(\lambda, \chi) = \frac{\lambda}{2} [1 + \beta \cos 2\chi] - \nu \qquad \left(\beta = \frac{\cos\alpha}{\cos 2\omega_0} = \pm\sqrt{1 - 4m_1 m_2 \sin^2\alpha}\right) \tag{3.1}$$

и формула возвышения поверхности раздела может быть преобразована аналогично работе [2]. После этого к полученному выражению нужно добавить возмущение поверхности раздела, происходящее от свободыных волн (2.6), и выбрать функцию $A_0(\chi)$ и пределы интегрирования так, чтобы волны отсутствовали для больших отрицательных значений x' (оси $x' = r\cos\varphi$, $y' = r\sin\varphi$ повернуты относительно старых осей x, y на угол $^1/_2\,\alpha + \omega_0$).

Используя далее метод стационарной фазы [3, 4], получаем асимптотическую оценку

$$\delta(r, \varphi) \approx \sqrt{\frac{2\pi}{r}} \sum_k \frac{m_1 \lambda_0^2(\chi_k) \cos(^1/_2\,\alpha + \omega_0 + \chi_k)\; H(\lambda_0, \chi_k)}{\sqrt{|g''(\chi_k)|}} \exp\left(rg(\chi_k)\, i \pm \frac{\pi i}{4}\right) \tag{3.2}$$

где $g(\chi) = \lambda_0(\chi) \cos(\chi - \varphi)$, а суммирование производится по корням χ_k уравнения $g'(\chi) = 0$, которое имеет вид:

$$\operatorname{tg}(\chi - \varphi) = \frac{2\beta \sin 2\chi}{1 + \beta\cos 2\chi} \tag{3.3}$$

Это уравнение имеет три корня, если $1/3 < \beta < 1$ или $-1 < \beta < -1/3$, и один корень, если $-1/3 \leqslant \beta \leqslant 1/3$. Поэтому асимптотическое представление $\delta(r, \varphi)$ состоит из трех членов, если $1/3 < \beta < 1$ или $-1 < \beta < -1/3$, и из одного члена, если $-1/3 \leqslant \beta \leqslant 1/3$.

Фаза каждой системы образующихся волн равна

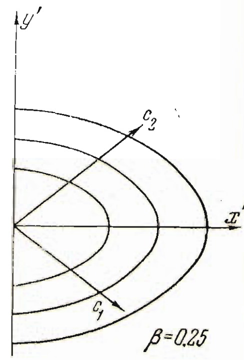
$$\vartheta = \arg f(\chi_k) + r\lambda_0(\chi_k)\cos(\chi_k - \varphi) \pm \frac{1}{4}\pi \tag{3.4}$$

Кривые равной фазы могут быть записаны в виде

$$\begin{aligned} x' &= r\cos\varphi = [c - \arg f(\chi_k)]\, \frac{\lambda_0(\chi_k)\cos\chi_k + \lambda_0'(\chi_k)\sin\chi_k}{\lambda_0^2(\chi_k)} \\ y' &= r\sin\varphi = [c - \arg f(\chi_k)]\, \frac{\lambda_0(\chi_k)\sin\chi_k - \lambda_0'(\chi_k)\cos\chi_k}{\lambda_0^2(\chi_k)} \end{aligned} \tag{3.5}$$

или после подстановки выражений для $\lambda_0(\chi)$ и $\lambda_0'(\chi)$

$$\begin{aligned} x' &= \frac{c - \arg f(\chi_k)}{2\nu}\left[\left(1 + \frac{3}{2}\beta\right)\cos\chi_k - \frac{1}{2}\beta\cos 3\chi_k\right] \\ y' &= -\frac{c - \arg f(\chi_k)}{2\nu}\left[\left(\frac{3}{2}\beta - 1\right)\sin\chi_k + \frac{1}{2}\sin 3\chi_k\right] \end{aligned} \tag{3.6}$$



Фиг. 1

Если $\arg f(\chi_k) = \mathrm{const}$, то кривые равной фазы зависят только от параметра β, так как корень χ_k уравнения $g'(\chi) = 0$ зависит от β. Поэтому получаются три качественно различные картины волн на поверхности раздела.

Если $-1/3 \leqslant \beta \leqslant 1/3$, то существует одна система волн. Кривые равной фазы представляют собой половинки замкнутых овальных кривых, подобных относительно начала координат (фиг. 1). Из выражения (3.1) для β следует, что $70°32' \leqslant \alpha \leqslant 109°28'$ для значений β.

Если $1/3 < \beta < 1$, то уравнение $g'(\chi) = 0$ имеет три корня. Поэтому картина течения состоит из трех систем волн. Внутри угла

$$2\varphi = 2\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{3\beta - 1}{3\beta + 1}\right)^{3/2}$$

биссектрисой которого служит ось x', существуют все три системы волн, вне его в полуплоскости $x' > 0$ — одна.

При возрастании β от $1/3$ до 1 угол φ увеличивается от 0° до значения 19°28′, и волны приближаются к корабельным [5], $\beta = 1$ соответствует углу $\alpha = 0$ (фиг. 2, 3).

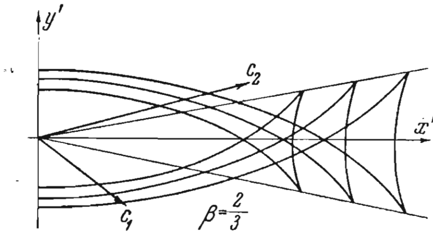
Если $-1 < \beta < -1/3$, то угол $\alpha > 90°$. Уравнение $g'(\chi) = 0$ имеет три корня Внутри угла

$$2\tau = 2\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{3\beta + 1}{3\beta - 1}\right)^{3/2}$$

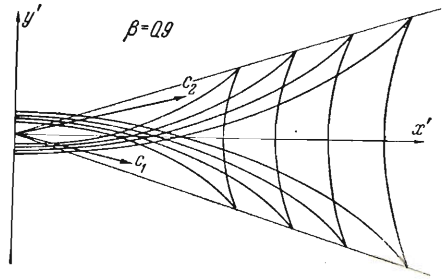
с биссектрисой по оси y' существуют две системы волн, а, кроме того, во всей полуплоскости $x' > 0$ еще одна. При убывании β от $-1/3$ до -1 угол φ растет от 0° до 19°28′. Значение $\beta = -1$ соответствует углу $\alpha = 180°$ (фиг. 4).

4. Рассмотрим случай, когда нижняя жидкость ограничена снизу плоским дном $z = 0$, на которое опирается поверхность S_1. Уравнение поверхности раздела имеет вид: $z = h + \delta(x, y)$.

Требуется определить функцию $\varphi_1(x, y, z)$, гармоническую в области, ограниченной снизу поверхностью S_1 и горизонтальным дном, а сверху — плоскостью $z = h$,



Фиг. 2



Фиг. 3

и функцию $\varphi_2(x, y, z)$, гармоническую в области $z > h$, если они удовлетворяют следующим граничным условиям:

$$\nu \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} = m_2 \left(\frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x^2} \cos\alpha + \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x \, \partial y} \sin\alpha \right) - m_1 \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x^2} \qquad \text{при } z = h \tag{4.1}$$

$$\nu \left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial z} - \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} \cos\alpha \right) = m_2 \sin\alpha \left(\frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x \, \partial y} \cos\alpha + \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial y^2} \sin\alpha \right) - m_1 \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x \, \partial y} \sin\alpha \tag{4.2}$$

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial z} = 0 \qquad \text{при } z = 0 \tag{4.3}$$

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial n} = -\cos(nx) \qquad \text{на } S_1 \tag{4.4}$$

а выражение для $\delta(x, y)$ определяется из условия

$$\nu \delta(x, y) = m_2 \left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial x} \cos\alpha + \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} \sin\alpha \right) - m_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \qquad \text{при } z = h \tag{4.5}$$

5. Как в предыдущей задаче, ищутся сначала потенциалы от источника, расположенного в нижней жидкости в точке ξ, η, ζ, а затем источники мощностью $\gamma(\xi, \eta, \zeta)$ распределяются по поверхности S_1. Присоединяя к поверхности S_1 ее отражение S_1' в плоскости xy, считая, что $\gamma(\xi, \eta, \zeta) = \gamma(\xi, \eta, -\zeta)$, и обозначая через S поверхность, составленную из S_1 и S_1', получаем

$$\varphi_1(x, y, z) = -\frac{1}{4\pi} \iint\limits_S \frac{\gamma(S)}{r} \, dS - \tag{5.1}$$

$$-\frac{1}{4\pi^2} \operatorname{Re} \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\lambda [m_2 \cos^2(\theta - \alpha) - m_1 \cos^2\theta] - \nu}{P(\lambda, \theta)} \operatorname{ch} \lambda z H(\lambda, \theta) \, e^{-\lambda(x\cos\theta + y\sin\theta)i} \, d\lambda \, d\theta$$

$$\varphi_2(x, y, z) = -\frac{m_1}{4\pi^2} \operatorname{Re} \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\lambda e^{2\lambda h} \cos\theta \cos(\theta - \alpha)}{P(\lambda, \theta)} \, e^{-\lambda z} H(\lambda, \theta) \, e^{-\lambda(x\cos\theta + y\sin\theta)i} \, d\lambda \, d\theta \tag{5.2}$$

$$\delta(x, y) = \frac{m_1}{4\pi^2} \operatorname{Re} \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\lambda e^{\lambda h} \cos\theta i \, H(\lambda, \theta)}{P(\lambda, \theta)} \, e^{-\lambda(x\cos\theta + y\sin\theta)i} \, d\lambda \, d\theta \tag{5.3}$$

Здесь $H(\lambda, \theta)$ — функция Кочина (2.5),

$$\begin{aligned} P(\lambda, \theta) = e^{2\lambda h} \{ [m_2 \cos^2(\theta - \alpha) + m_1 \cos^2\theta] \lambda - \nu \} - \\ - \{ [m_2 \cos^2(\theta - \alpha) - m_1 \cos^2\theta] \lambda - \nu \} \end{aligned} \tag{5.4}$$

Можно показать, что уравнение $P(\lambda, \theta) = 0$ имеет один ненулевой корень $\lambda_0(\theta)$ при любом значении θ при условии, что $\nu h > m_1$, поэтому под интегралом по λ в равенствах (5.1)—(5.3) понимается его главное значение в смысле Коши.

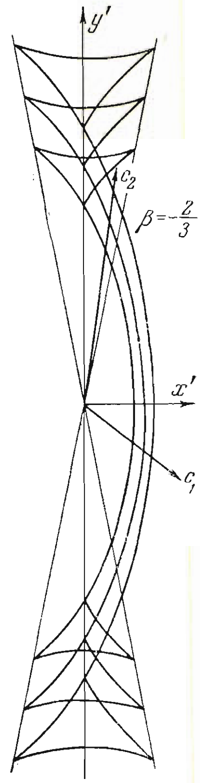
Выражения для потенциалов и для поверхности раздела свободных волн имеют вид:

$$\varphi_{10} = 2\mathrm{Re}\int\limits_{\theta_1}^{\theta_2} A_0(\theta)\,\mathrm{ch}\,\lambda_0 h\, e^{-\lambda_0 (x\cos\theta + y\sin\theta)i}\, d\theta \tag{5.5}$$

$$\varphi_{20} = \frac{2}{m_2}\,\mathrm{Re}\int\limits_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{m_1\cos^2\theta\,\mathrm{ch}\,\lambda_0 h - \nu\,\mathrm{sh}\,\lambda_0 h}{\lambda_0 e^{-\lambda_0 h}\cos\theta\cos(\theta-\alpha)} A_0(\theta)\, e^{-\lambda_0 (x\cos\theta + y\sin\theta)i} d\theta \tag{5.6}$$

$$\delta(x, y) = \mathrm{Re}\int\limits_{\theta_1}^{\theta_2} 2A_0(\theta)\,\frac{i\,\mathrm{sh}\,\lambda_0 h}{\cos\theta}\, e^{-\lambda_0 (x\cos\theta + y\sin\theta)i} d\theta \tag{5.7}$$

6. Исследуем форму поверхности раздела вдали от тела. Для этого введем вместо угла θ угол $\chi = \theta - \theta_0$, где $\theta_0 = \theta^* + {}^1/_2\,\pi$, а θ^* есть то значение θ, при котором $\lambda_0(\theta)$ — корень уравнения $P(\lambda_0, \theta) = 0$ — достигает экстремума. Координатные оси, повернутые на угол θ_0, назовем x', y', а соответствующие им полярные — r, φ. В новых осях выделим в выражении (5.3) регулярную часть; воспользовавшись формулой оценки двойного интеграла, указанной М. И. Канторовичем и Ю. К. Муравьевым [5], можно показать, что эта регулярная часть имеет порядок r^{-1} для больших значений r. К остальной части выражения (5.3) можно применить метод Хогнера [7], так что получаем



Фиг. 4

$$\begin{aligned}\delta(r, \varphi) = &-\frac{m_1}{2\pi}\,\mathrm{Re}\int\limits_{-{}^1/_2\pi}^{{}^1/_2\pi} \frac{\cos(\chi+\theta_0)\,\lambda_0(\chi)\,e^{-\lambda_0 h}}{\partial\,[e^{-2\lambda_0 h} P(\lambda_0\,\chi)]\,/\,\partial\lambda} H(\lambda_0, \chi)\, e^{-\lambda_0 r\cos(\chi-\varphi)i} d\chi + \\ &+\frac{m_1}{\pi}\,\mathrm{Re}\int\limits_{-{}^1/_2\pi}^{{}^1/_2\pi} \frac{\cos(\chi+\theta_0)\,\lambda_0(\chi)\,e^{-\lambda_0 h}}{\partial\,[e^{-2\lambda_0 h} P(\lambda_0,\,\chi)]\,/\,\partial\lambda} H(\lambda_0, \chi)\, e^{-\lambda_0 r\cos(\chi-\varphi)i} d\chi + O\left(\frac{1}{r}\right)\end{aligned} \tag{6.1}$$

Здесь второй интеграл берется по тому промежутку значений χ из интервала $-{}^1/_2\,\pi$, ${}^1/_2\,\pi$, где $\cos(\chi - \varphi) > 0$; символ $O(r^{-1})$ означает величину порядка r^{-1}.

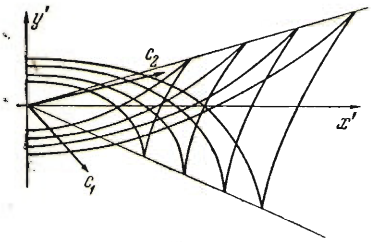
Преобразуем выражение (5.7) для поверхности раздела свободных волн к новым осям, возьмем пределы интегрирования $\chi_1 = -{}^1/_2\,\pi$, $\chi_2 = {}^1/_2\,\pi$ и выберем функцию $A_0(\chi)$ так, чтобы выполнялось равенство

$$\begin{aligned}&-\frac{m_1}{2\pi}\int\limits_{-{}^1/_2\pi}^{{}^1/_2\pi} \frac{\cos(\chi+\theta_0)\,\lambda_0(\chi)\,e^{-\lambda_0 h}}{\partial\,[e^{-2\lambda_0 h} P(\lambda_0,\chi)]\,/\,\partial\lambda} H(\lambda_0, \chi)\, e^{-\lambda_0 r\cos(\chi-\varphi)\, i} d\chi + \\ &\qquad+\int\limits_{-{}^1/_2\pi}^{{}^1/_2\pi} \frac{2A_0(\chi)\,i}{\cos(\chi+\theta_0)}\,\mathrm{sh}\,\lambda_0 h e^{-\lambda_0 r\cos(\chi-\varphi)\, i} d\chi = 0\end{aligned} \tag{6.2}$$

т. е.

$$A_0(\chi) = \frac{m_1\cos^2(\chi+\theta_0)\,\lambda_0(\chi)\,e^{-\lambda_0 h}}{4\pi i\,\mathrm{sh}\,\lambda_0 h\,\partial\,[e^{-2\lambda_0 h} P(\lambda_0,\,\chi)]\,/\,\partial\lambda} \tag{6.3}$$

Применяя принцип стационарной фазы, получаем асимптотическую оценку для поверхности раздела



Фиг. 5

$$\delta_0(r, \varphi) \approx \sqrt{\frac{2\pi}{r}} \sum_k \frac{f(\chi_k)}{\sqrt{|g''(\chi_k)|}} \exp\left(rg(\chi_k)\, i \pm \frac{\pi i}{4}\right) \tag{6.4}$$

где

$$f(\chi_k) = \frac{m_1 \cos(\chi_k + \theta_0)\, \lambda_0 e^{-\lambda_0 h} H(\lambda_0, \chi_k)}{\pi \partial\, [e^{-2\lambda_0 h} P(\lambda_0, \chi)] / \partial\lambda},$$

$$g(\chi_k) = -\lambda_0(\chi_k) \cos(\chi_k - \varphi)$$

а суммирование производится по корням уравнения $g'(\chi_k) = 0$, которые лежат в той части интервала $-{}^1/_2\,\pi$, ${}^1/_2\,\pi$, где $\cos(\chi - \varphi) > 0$.

Рассмотрим пример. Пусть $m_1 = 0.3$, $\alpha = 60°$, $\nu h = 0.5$. Графическое решение уравнения $g'(\chi) = 0$ показывает, что оно имеет три корня для взятых частных значений параметров. Кривые равной фазы, удовлетворяющие уравнениям (3.5), изображены на фиг. 5. Картина течения не симметрична относительно оси x'.

В заключение автор выражает искреннюю благодарность Л. Н. Сретенскому под руководством которого выполнялась работа.

Поступила 13 V 1955

ЛИТЕРАТУРА

1. Сретенский Л. Н. О волнах на поверхности раздела двух потоков, текущих под углом друг к другу. Известия АН СССР, № 12, 1952.
2. Кочин Н. Е. Пространственная задача о волнах на поверхности раздела двух масс жидкостей разной плотности, вызываемых неровностями дна. Собрание сочинений, т. I. Изд. АН СССР, 1949.
3. Ламб, Гидродинамика. ОГИЗ, Гостехиздат, 1947.
4. Ватсон Г. Н. Теория бесселевых функций, ч. I. ИЛ, 1949.
5. Кочин Н. Е., Кибель, И. А., Розе Н. В. Теоретическая гидромеханика, т. I. ОГИЗ, Гостехиздат, 1948.
6. Канторович М. И., Муравьев Ю. К. Вывод законов отражения геометрической оптики на основе асимптотической трактовки задачи диффракции. ЖТФ, т. XXII, вып. 3, 1952.
7. Hogner E. A Contribution to the Theory of Ship Waves. Arkiv för matematik, astronomi och fysik, 17 : 12, 1922.