Прикладная математика и механика. Том XIX, 1955
Институт механики Академии наук Союза ССР

К КРИТЕРИЯМ УСТОЙЧИВОСТИ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПЕРИОДИЧЕСКИМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

В. Б. Лидский, М. Г. Нейгауз
(Москва)

В последнее время классический критерий Ляпунова [1] ограниченности всех решений уравнения

$$y'' + p(t)\, y = 0 \qquad (p(t+\omega) = p(t)) \tag{1}$$

в ряде работ (см.[2—5]) был обобщен на случай произвольной области устойчивости.

Во всех перечисленных работах авторы исходили из вариационных соображений. Ниже показано, как, пользуясь установленной М. Г. Крейном теоремой о монотонном движении мультипликаторов по единичной окружности (см. [6]), можно получать аналогичные критерии весьма простой оценкой.

Дальнейшие рассуждения не усложнятся, если предположить, что формулой (1) задана система k дифференциальных уравнений с симметрической матрицей коэффициентов.

1°. Рассмотрим систему k дифференциальных уравнений

$$y'' + (n^2 E_k + \lambda Q(t))\, y = 0 \tag{2}$$

где $Q(t)$ — вещественная симметрическая периодическая матрица с периодом[1] π. $Q(t+\pi) = Q(t)$, E_k — единичная матрица, $y(t)$ — вектор $(y_1(t), y_2(t), \ldots, y_n(t))$; n — целое число, λ — вещсетвенный параметр, который в дальнейшем будет играть вспомогательную роль.

Будем предполагать, что матрица $Q(t)$ является кусочно-непрерывной и знакоопределенной при всех t. Последнее означает, что квадратичная форма

$$(Q(t)\, h, h) = \sum_{i,\, j=1}^{k} q_{ij}(t)\, h_i h_j$$

является либо неотрицательной $(Q(t)\, h, h) \geqslant 0$, либо неположительной $(Q(t)\, h, h) \leqslant 0$.

Заметим, что при $\lambda = 0$ все решения системы (2) имеют вид: $y(t) = \sin nt f_1 + \cos nt f_2$, где f_1 и f_2 — постоянные векторы, и поэтому являются ограниченными при $|t| \to \infty$.

Допустим для определенности, что n — четное число ($n \neq 0$). Тогда, как следует из результатов М. Г. Крейна [6]; с увеличением параметра λ от нуля все решения системы (2) будут оставаться ограниченными по крайней мере до тех пор, пока при некотором $\lambda = \lambda_0$ у системы не появится антипериодическое решение $u(t)$:

$$u(t+\pi) = -u(t) \tag{3}$$

Покажем, что решение $u(t)$ удовлетворяет некоторому интегральному соотношению, которое позволит оценить число λ_0 снизу.

Воспользуемся формулой для решения линейного неоднородного уравнения (см.[7], стр. 105) и представим тождество

$$u'' + n^2 u = -\lambda_0 Q(t)\, u$$

[1] Для удобства мы полагаем $\omega = \pi$, чего всегда можно добыться заменой независимого переменного.

в виде

$$u(t) = f_1 \sin nt + f_2 \cos nt - \frac{\lambda_0}{n} \int_{t_0}^{t} \sin n(t-\tau) Q(\tau) u(\tau) dt \qquad (4)$$

где f_1 и f_2 — некоторые постоянные векторы.

Замечая, что

$$u(t_0) = \sin nt_0 f_1 + \cos nt_0 f_2 \qquad (5)$$

положим в формуле (4) $t = t_0 + \pi$ и из получившегося соотношения вычтем равенство (5). Учитывая, что n — четное число, и формулу (3), получим

$$2u(t_0) = \frac{\lambda_0}{n} \int_{t_0}^{t_0+\pi} \sin n(t_0 - \tau) Q(\tau) u(\tau) d\tau \qquad (6)$$

для всех t_0.

В случае, если n — нечетное число, изложенные выше рассуждения повторяются почти дословно. Роль λ_0 играет то наименьшее положительное значение параметра, при котором у системы (2) появляется периодическое решение $u(t+\pi) = u(t)$. Последнее, как легко проверить, удовлетворяет соотношению (6).

2°. Обозначим через $|u(t)|$ норму вектора $u(t)$:

$$|u(t)| = \sqrt{|u_1(t)|^2 + \ldots + |u_k(t)|^2}$$

и через $|Q(t)|$ — норму симметрической матрицы $Q(t)$:

$$|Q(t)| = \max_s |\mu_s(t)|$$

где $\mu_s(t)$ $(s = 1, \ldots, k)$ — собственные значения $Q(t)$ при данном t. В случае одного уравнения $|u(t)|$ и $|Q(t)|$ означают модули соответствующих функций.

Предположим, что при $t = t_0$ функция $|u(t)|$ принимает наибольшее значение [6] на интервале $[0, \pi]$.

Из формулы (6) тогда следует неравенство

$$2|u(t_0)| \leqslant \frac{\lambda_0}{n} \int_{t_0}^{t_0+\pi} |\sin n(t_0 - \tau)| |Q(\tau)| |u| t_0)| d\tau \qquad (7)$$

Сократив неравенство (7) на $|u(t_0)|$, сделаем в интеграле замену переменного по формуле $\tau = \xi + t_0$.

В результате получим неравенство

$$2n \leqslant \lambda_0 \int_0^{\pi} |\sin n\xi| |Q(\xi + t_0)| d\xi$$

которое содержит оценку для λ_0 снизу.

Мы приходим к следующему условию ограниченности решений системы дифференциальных уравнений.

Критерий: пусть дана система k дифференциальных уравнений

$$y'' + (n^2 E_k + Q(t) y) = 0$$

где $Q(t)$ — знакоопределенная симметрическая матрица с периодом π $(Q(t+\pi) = Q(t))$, а n — целое число, отличное от нуля. Тогда, если выполняется условие

$$\int_0^{\pi} |\sin n\xi| |Q(\xi + t)| d\xi < 2n \qquad (0 \leqslant t \leqslant \pi) \qquad (8)$$

то все решения системы ограничены при $|t| \to \infty$.

В такой форме условие ограниченности всех решений является новым результатом даже для одного уравнения (1).

Можно доказать, что оно не улучшаемо в том смысле, что замена в правой части (8) $2n$ на $2n+\varepsilon$ делает утверждение уже неверным.

Поступила 14 II 1955.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ляпунов. Мемуары. 1902.
2. Borg G. Über die Stabilität gewisser Klassen von linearen Differentialgleichungen. Arkiv för matematik, astronomie och fysik от. 31, p. 1, sp. 1—31, 1944.
3. Якубович В. А. Об ограниченности решений уравнения $y''sp(t)y=0$, $p(t+\omega)=p(t)$. ДАН СССР, т. XXIV, № 5, стр. 901—903, 1950.
4. Нейгауз М. Г. и Лидский В. Б. Об ограниченности решений линейных систем дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами. ДАН СССР, т. 77, № 2, стр. 189—192, 1951.
5. Крейн М. Г. О некоторых задачах на максимум и минимум для характеристических чисел и о ляпуновских зонах устойчивости. ПММ, т. XV, вып. 3, стр. 323—348, 1951.
6. Крейн М. Г. Обобщение некоторых исследований А. М. Ляпунова о линейных дифференциальных уравнениях с периодическими коэффициентами. ДАН СССР, т. 73, № 3, стр. 445—448, 1950.
7. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. Гостехиздат, 1953, стр. 105.