К ВОПРОСУ ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ПО ПЕРВОМУ ПРИБЛИЖЕНИЮ

Е. А. Барбашин, М. А. Скалкина

(Свердловск)

Пусть уравнения возмущенного движения имеют вид:

$$\frac{dy_s}{dt} = Y_s(t, y_1, \ldots, y_n) + R_s(t, y_1 \ldots, y_n) \qquad (s = 1, \ldots, n) \tag{1}$$

где функции $Y_s(t, y, \ldots, y_n)$ и $R_s(t, y_1, \ldots, y_n)$ определены и непрерывны в области $|y_s| \leqslant H$, $0 \leqslant t < \infty$ и удовлетворяют в ней условиям Липшица по $y_1, \ldots, y_n$ (постоянные Липшица L и K соответственно); кроме того,

$$Y_s(t, 0, \ldots, 0) \equiv 0, \qquad R_s(t, 0, \ldots, 0) \equiv 0$$

Из этих условий следует, что если $|y_s(t)| \leqslant y \leqslant H$, $0 \leqslant t < \infty$, то

$$|R_s(t, y_1, \ldots, y_n)| < Bny \qquad (R \leqslant K) \tag{2}$$

Наряду с (1) будем рассматривать уравнения

$$\frac{dx_s}{dt} = Y_s(t, x_1, \ldots, x_n) \qquad (s = 1, \ldots, n) \tag{3}$$

Теорема. Если любое решение уравнения (3) при начальных значениях $|x_s(t_0)| \leqslant x < H$, $0 \leqslant t_0 < \infty$ удовлетворяет неравенству

$$|x_s(t)| \leqslant Bxe^{-\alpha(t-t_0)} \tag{4}$$

где B, α — положительные постоянные, не зависящие от t_0, $x_{10}, \ldots, x_{n0}$, то при достаточно малом R нулевое решение системы (1) будет асимптотически равномерно устойчивым относительно $t_0, t_{10}, \ldots, y_{n0}$.

Доказательство. Нужно показать, что для любого как угодно малого $\varepsilon > 0$ существует $\delta(\varepsilon) > 0$ такое, что $|y_s(t)| < \varepsilon$ при $t \geqslant t_0$,если $|y_{s0}| < \delta$, и что $\lim y_s(t) = 0$ при $t \to \infty$ равномерно относительно $t_0, t_{10}, \ldots, y_{n0}$.

Предварительно заметим, что если

$$|x_s(t_0)| \leqslant x \leqslant H, \qquad T \geqslant \frac{1}{\alpha} \ln 4B$$

то непосредственно из (4) следует, что для $\tau \geqslant t_0 + T$ имеет место неравенство

$$|x_s(\tau)| < \frac{1}{4} x, \qquad \tau \geqslant t_0 + T \tag{5}$$

Итак, возьмем произвольное как угодно малое ε, $0 < \varepsilon \leqslant H$; за $\delta(\varepsilon) > 0$ выберем число

$$\delta = \min\left\{\frac{\varepsilon}{2B}; \quad \varepsilon e^{-n(L+R)T}\right\} \tag{6}$$

Очевидно, что величины δ и T не зависят от $t_0, x_{10}, \ldots, x_{n0}$, и, не нарушая общности рассуждений, можно предполагать, что $B \geqslant 1$. Покажем, что выбранное $\delta > 0$ и является искомым. Рассмотрим для этого две траектории $y_s(t)$ и $x_s(t)$, выходящие одновременно из произвольной точки δ-окрестности начала координат, т. е.

$$y_s(t_0) = x_s(t_0), \qquad |x_{s0}| < \delta \leqslant \frac{1}{2}\varepsilon$$

Из (4), (5) и (6) следует, что если $|x_{s0}| < \delta$, то:

$$|x_s(\tau)| < \frac{1}{4}\delta \text{ при } \tau \geqslant t_0 + T, \qquad |x_s|(t)| < \frac{1}{2}\varepsilon \text{ при } t \geqslant t_0 \tag{7}$$

Оценим $|y_s(t) - x_s(t)|$ за время T, т. е. $t_0 \leqslant t \leqslant t_0 + T$. В силу непрерывной зависимости $y_s(t)$ от начальных условий из сравнения $y_s(t)$ с тривиальным решением уравнения (1) имеем

$$|y_s(t)| < |y_s(t_0)| e^{n(L+R))t-t_0)} < \varepsilon \tag{8}$$

Согласно выбору начальных условий и (2) следует, что при $t_0 \leqslant t \leqslant t_0 + T$ выполняются вместе с (9) неравенства

$$|R_s(t, y_1, \ldots, y_n)| < Rn\delta e^{n(L+R)T} \tag{9}$$

Интегрируя (1) и (3), получаем

$$\sum_{s=1}^{n} | y_s(t) - x_s(t) | < Rn^2\delta T e^{n(L+R)T}\left[1 + \frac{L}{Rn\delta T e^{n(L+R)T}}\int_{t_0}^{t}\sum_{s=1}^{n} | y_s(t) - x_s(t) | \, dt\right]$$

На основании леммы 1[1] имеем

$$\sum_{s=1}^{n} | y_s(t) - x_s(t) | < Rn^2\delta T e^{n(L+R)T} e^{nL(t-t_0)}$$

или

$$| y_s(t) - x_s(t) | < Rn^2\delta T e^{n(2L+R)T}$$

Если R достаточно мало, то

$$| y_s(t) - x_s(t) | < \frac{1}{4}\delta, \qquad t_0 \leqslant t \leqslant t_0 + T \tag{10}$$

Очевидно, для этого нужно полагать, что R удовлетворяет неравенству

$$Rn^2 T e^{n(2L+R)T} < \frac{1}{4} \tag{11}$$

Складывая теперь неравенства (8) и (10), получаем

$$| y_s(t) | < \varepsilon \qquad \text{при } t_0 \leqslant t \leqslant t_0 + T$$

а (7) и (10) дают

$$| y_s | (t_0 + T) | < \frac{1}{2}\delta$$

Рассмотрим теперь движение $\bar{x}_s(t)$ уравнения (3), начавшееся при $\bar{t}_0 = t_0 + T$ в точке $\bar{x}_s^0 = y_s(t_0 + T)$. Непосредственно из последнего неравенства следует, что $|\bar{x}_s^0| < {}^1/_2\ \delta$ и согласно (4), (6)

$$| \bar{x}_s(t) | < \frac{1}{2}\delta B \leqslant \frac{1}{4}\varepsilon, \qquad t \geqslant t_0 \tag{12}$$

а так как выбранное T не зависит от начальных условий, из (5) имеем

$$| \bar{x}_s(\tau) | < \frac{1}{8}\delta, \qquad \bar{t}_0 + T \leqslant \tau \tag{13}$$

На основании (9), (6) и (11) получаем

$$| y_s(t) - \bar{x}_s(t) | < \frac{1}{8}\delta, \qquad \bar{t}_0 \leqslant t \leqslant \bar{t}_0 + T, \tag{14}$$

Суммируя (12), (14) и (13), находим

$$| y_s(t) | < \frac{1}{2}\varepsilon, \qquad t_0 + T \leqslant t \leqslant t_0 + 2T. \qquad | y_s(t_0 + 2T) | < \frac{1}{4}\delta$$

Продолжая этот процесс дальше, можно убедиться, что

$$| y_s(t) | < \frac{\zeta}{2^{n-1}}, \qquad t_0 + (n-1)T \leqslant t \leqslant t_0 + nT, \qquad | y_s(t_0 + nT) | < \frac{\delta}{2^n}.$$

Из этих оценок легко усмотреть, что если $| y_s(t_0) | < \delta$, то

$$| y_s(t) | < \varepsilon \quad \text{при } t > t_0, \qquad \lim y_s(t) = 0 \text{ при } t \to \infty$$

равномерно относительно $t_0, y_{10}, \ldots, y_{n0}$. Таким образом, теорема полностью доказана.

В случае, когда система (3) линейна относительно $x_1, \ldots, x_n$, мы получаем, очевидно, известную теорему об устойчивости по первому приближению, полученную К. П. Персидским[2].

Поступила 19 XI 1954

ЛИТЕРАТУРА

1. Немыцкий В. В. и Степанов В. В. Качественная теория дифференциальных уравнений. ГИТТЛ, М—Л, 1949, стр. 19
2. Персидский К. П. К теории устойчивости интегралов систем дифференциальных уравнений. Изв. физ.-мат. об-ва при Казанском ун-те, т. VIII, 1936—1937.