Прикладная математика и механика. Том XIX, 1955
Институт механики Академии наук Союза ССР

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ ПОЛУЧЕНИЯ ДОСТАТОЧНЫХ УСЛОВИЙ УСТОЙЧИВОСТИ НЕУСТАНОВИВШЕГОСЯ ДВИЖЕНИЯ

М. Ш. Аминов
(Казань)

В работе [1] Н. Г. Четаев для получения условия устойчивости вращения твердого тела вокруг неподвижной точки в случае Лагранжа применил метод построения функции Ляпунова в виде связки интегралов.

В настоящей заметке показывается, как можно использовать идею Н. Г. Четаева для получения достаточных условий устойчивости движения некоторых неустановившихся движений.

Пусть имеем дифференциальные уравнения возмущенного движения некоторой механической системы в форме

$$\frac{dx_s}{dt} = p_{s1} x_1 + p_{s2} x_s + \cdots + p_{sn} x_n + X_s \qquad (s = 1, \ldots, n) \tag{1}$$

где $p_{sj}(t)$ — непрерывные ограниченные функции t, $X_s(t, x_1, \ldots, x_n)$, голоморфные функции переменных $x_1, \ldots, x_n$, разложения которых начинаются членами не ниже второго порядка и обладают непрерывными и ограниченными относительно t коэффициентами. Кроме того, предположим, что при неограниченном возрастании t все коэффициенты правой части (1) стремятся к определенным постоянным пределам.

Обозначим $p_{sj}(t)$ и X_s при $t \to \infty$ соответственно через p_{sj}° и X_s°. Найдем достаточные условия устойчивости тривиального решения системы (1):

$$x_s = 0 \qquad (s = 1, \ldots, n) \tag{2}$$

При наших обозначениях предельная система имеет вид:

$$\frac{dx_s}{dt} = p_{s1}^\circ x_1 + p_{s2}^\circ x_2 + \cdots + p_{sn} x_n + X_s^\circ \tag{3}$$

для которой $x_s = 0$ также является решением.

Если среди корней характеристического уравнения предельной системы нет нулевых и чисто мнимых корней, то вопрос устойчивости невозмущенного движения (2) для системы (1) решается по известной теореме Н. Г. Четаева о предельных системах [2]. Хотя в механических задачах часто это уравнение имеет нулевые и чисто мнимые корни, но зато предельная система (3) может иметь первые интегралы.

Пользуясь этими интегралами, в некоторых случаях можно получить достаточные условия устойчивости. Пусть

$$V_1^{(1)} = c_1^{(1)}, \ldots, V_{m_1}^{(1)} = c_{m_1}^{(1)}; \quad V_1^{(2)} = c_1^{(2)}, \ldots, V_{m_2}^{(2)} = c_{m_2}^{(2)} \quad (m_1 + m_2 \leqslant n) \tag{4}$$

первые интегралы системы (3), где $c_j^{(1)}$, $c_j^{(2)}$ — постоянные, $V_j^{(1)}$ — линейные, $V_j^{(2)}$ — квадратичные функции переменных $x_1, \ldots, x_n$, причем все эти переменные по меньшей мере по одному разу входят в один из интегралов.

Составим функцию Ляпунова в виде связки этих интегралов:

$$V^\circ = \sum_1^{m_2} \lambda_j^{(2)} V_j^{(2)} + \sum_1^{m_1} \lambda_j^{(1)} V_j^{(1)} + \sum \sum \lambda_{ij} V_i^{(1)} V_j^{(1)} \tag{5}$$

где λ — произвольные постоянные. Эти постоянные выберем так, чтобы, во-первых, в (5) исчезли линейные члены, во-вторых, чтобы V° разбилось на наибольшее число однотипных квадратичных форм (двух, трех и т. д. переменных) с тем, чтобы условия знакоопределенности формы (5) были по возможности проще. Таким способом выберем все λ в виде определенных постоянных чисел, т. е. в окончательном выражении для V° уже нет произвольных постоянных λ. Так как $dV^\circ / dt \equiv 0$ в силу (4), то по известной теореме Ляпунова [3] полученные условия знакоопределенности формы V° и будут достаточными условиями устойчивости решения (2) для системы (3). При этом функция V° примет вид:

$$V^\circ = \frac{1}{2} \sum \sum P_{ij}{}^\circ x_i x_j \tag{6}$$

где $P_{ij}{}^\circ$ как-то зависят от $p_{rs}{}^\circ$ и коэффициентов разложения функций $X_s{}^\circ$.

Для решения вопроса устойчивости невозмущенного движения (2) системы (1) рассмотрим функцию

$$V = \frac{1}{2} \sum \sum P_{ij} x_i x_j \tag{7}$$

где P_{ij} получены из $P_{ij}{}^\circ$ заменой $p_{rs}{}^\circ$ через p_{rs} и соответствующих коэффициентов разложения функций X_s, т. е. они являются функциями времени t.

Легко найдем, что

$$\frac{dV}{dt} = \frac{1}{2} \sum \sum \frac{dP_{ij}}{dt} x_i x_j \tag{8}$$

Теперь условия определенной положительности (7) и постоянной отрицательности (8) по теореме Ляпунова и будут достаточными условиями устойчивости рассматриваемого решения. Условия определенной положительности (7) очень часто записываются почти так же, как и условия знакоопределенности (6), а условия постоянной отрицательности (8) аналогично им. В частности, для установившегося движения останутся только условия знакоопределенности (7), и эти условия могут быть и необходимыми.

Заметим, что интегралы (4) могут быть любыми функциями переменных $x_1, \ldots, x_n$; тогда мы их разложим в ряды по переменным $x_1, \ldots, x_n$ и функцию Ляпунова для предельной системы представим в виде

$$V^\circ = \frac{1}{2} \sum \sum P_{ij}{}^\circ x_i x_j + [3] \tag{9}$$

где [3] — члены третьего и высших порядков относительно $x_1, \ldots, x_n$. Дальше примерно все так же, как и выше.

Наконец, то, что V является квадратичной формой, принципиально не существенно, можно взять любую функцию, могущую быть функцией Ляпунова.

Поступила 29 V 1955

ЛИТЕРАТУРА

1. Четаев Н. Г. Об устойчивости вращения твердого тела с одной закрепленной точкой в случае Лагранжа. ПММ, т. XVIII, вып. 1, 1954.
2. Четаев Н. Г. Устойчивость движения. 1946.
3. Ляпунов А. М. Общая задача об устойчивости. ГИТТЛ, 1950.