Прикладная математика и механика. Том XIX, 1955
Институт механики Академии наук Союза ССР

О МЕТОДЕ ОСТРОГРАДСКОГО ИНТЕГРИРОВАНИЯ ДИНАМИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

В. С. Ленский
(Москва)

М. В. Остроградский [1,2] рассмотрел задачу о свободных колебаниях упругого пространства, исходя из уравнений теории упругости с одной независимой упругой постоянной. Пуассон [3] рассмотрел аналогичную задачу для волнового уравнения, а Кирхгофф [4] дал решение задачи Коши для волнового уравнения при наличии массовых сил. После введенного Стоксом [5] представления вектора перемещения в виде градиента скалярной функции и ротации соленоидального вектора интегрирование динамических уравнений теории упругости сводят к интегрированию волновых уравнений. Здесь показана применимость метода Остроградского к динамическим уравнениям теории упругости с двумя упругими постоянными при наличии массовых сил.

Рассмотрим уравнения движения

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} - \left[a^2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} + b^2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2} + b^2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_3^2} + (a^2 - b^2)\left(\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1 \partial x_3}\right)\right] = \chi_1(M, t) \quad (1,2,3) \qquad (1)$$

где $a^2 = (\lambda + 2\mu)/\rho$, $b^2 = \mu/\rho$ (λ и μ — упругие постоянные, ρ — плотность, которая считается постоянной), M — точка с координатами x_1, x_2, x_3.

Начальные условия предполагаем следующие

$$u_i(M, 0) = f_i(M), \qquad \left.\frac{\partial u_i}{\partial t}\right|_{t=0} = \varphi_i(M) \qquad (2)$$

Будем разыскивать решение в виде интегралов Фурье

$$u_i(M, t) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \int_{-\infty}^{+\infty} T_i(A, N, t)\,\psi\, d\tau, \qquad \psi = e^{i\alpha(r-\nu)} \qquad (3)$$

где α, $\mathbf{r}$, ν — радиус-векторы точек $A(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, $M(x_1, x_2, x_3)$, $N(\nu_1, \nu_2, \nu_3)$, $d\tau = d\alpha_1\, d\alpha_2\, d\alpha_3\, d\nu_1\, d\nu_2\, d\nu_3$.

Если массовые силы представить в виде

$$\chi_i(M, t) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \int_{-\infty}^{+\infty} \chi_i(N, t)\,\psi\, d\tau \qquad (4)$$

то уравнения (1) будут удовлетворены, если

$$\frac{\partial^2 T_i}{\partial t^2} + b^2 k^2 T_i + (a^2 - b^2)\,\alpha_i \sum_{j=1}^{3} \alpha_j T_j = \chi_i(N, t) \qquad \left(k^2 = \sum_1^3 \alpha_j^2\right)$$

Уравнения для T_i можно преобразовать к виду

$$\begin{gathered}\frac{\partial^2 (\alpha_i T_j - \alpha_j T_i)}{\partial t^2} + b^2 k^2 (\alpha_i T_j - \alpha_j T_i) = \alpha_i \chi_j - \alpha_j \chi_i \qquad (i \neq j = 1, 2, 3) \\ \frac{\partial^2}{\partial t^2} \sum_1^3 \alpha_j T_j + a^2 k^2 \sum_1^3 \alpha_j T_j = \sum_1^3 \alpha_j \chi_j\end{gathered} \qquad (5)$$

причем T_i должны удовлетворять начальным данным

$$T_i(A,\ N,\ 0) = f_i(N), \qquad \left.\frac{\partial T_i}{\partial t}\right|_{t=0} = \varphi_i(N) \tag{6}$$

Заметим, что преобразование уравнений для T_i к виду (5) по существу эквивалентно разложению вектора перемещения на вихревую и безвихревую части, позже введенному Стоксом [5]. Решения уравнений (5) при начальных условиях (6) имеют вид

$$\alpha_i T_j - \alpha_j T_i = [\alpha_i f_j(N) - \alpha_j f_i(N)]\cos bkt + [\alpha_i \varphi_j(N) - \alpha_j \varphi_i(N)]\frac{\sin bkt}{bk} +$$

$$+ \int_0^t [\alpha_i \chi_j(N,\ \xi) - \alpha_j \chi_i(N,\ \xi)]\frac{\sin bk(t-\xi)}{bk}\,d\xi \qquad (i \neq j = 1,\ 2,\ 3) \tag{7}$$

$$\sum_1^3 \alpha_j T_j = \cos akt \sum_1^3 \alpha_j f_j(N) + \frac{\sin akt}{ak}\sum_1^3 \alpha_j \varphi_j(N) + \int_0^t \left[\sum_1^3 \alpha_j \chi_j(N,\ \xi)\right]\frac{\sin \alpha k(t-\xi)}{ak}\,d\xi$$

Определяя из этой системы уравнений $T_i(A,\ N,\ t)$ и подставляя в (3), находим

$$u_i(M,\ t) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \int_{-\infty}^{+\infty} f_i(N)\,\psi\cos bkt\,d\tau + \left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_i(N)\,\psi\frac{\sin bkt}{bk}\,d\tau +$$

$$+ \int_0^t \left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \int_{-\infty}^{+\infty} \chi_i(N,\ \xi)\,\psi\frac{\sin bk(t-\xi)}{bk}\,d\tau\,d\xi +$$

$$+ \left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \int_{-\infty}^{+\infty} \alpha_i \left[\sum_1^3 \alpha_j f_j(N)\right]\psi\frac{\cos akt - \cos bkt}{k^2}\,d\tau + \tag{8}$$

$$+ \int_0^t \left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \int_{-\infty}^{+\infty} \alpha_i \left[\sum_1^3 \alpha_j \varphi_j(N)\right]\psi\frac{\cos akt - \cos bkt}{k^2}\,d\tau\,dt +$$

$$+ \int_0^t \left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \int_{-\infty}^{+\infty} \alpha_i \left[\sum_1^3 \alpha_j \chi_j(N,\ \xi)\right]\frac{\psi}{k^2}\left[\frac{1}{ak}\sin ak(t-\xi) - \frac{1}{bk}\sin bk(t-\xi)\right]d\tau\,d\xi$$

Следуя М. В. Остроградскому, приведем вычисление содержащихся здесь шестикратных интегралов к вычислению двойных и тройных интегралов и к операциям повторного интегрирования.

Первые два члена в (8) преобразуются при помощи представления (см. например[6])

$$\frac{\sin bkt}{bk} = \frac{1}{4\pi}\int_0^\pi dq \int_0^{2\pi} te^{ibt\omega}\sin q\,dp \tag{9}$$

где $\omega = \alpha_1 \sin q \cos p + \alpha_2 \sin q \sin p + \alpha_3 \cos q$, к виду

$$J_{i1} \equiv \left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \int_{-\infty}^{+\infty} f_i(N)\,\psi\cos bkt\,d\tau =$$

$$= \frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial t}\int_0^\pi\int_0^{2\pi} f_i(x_1 + bt\sin q\cos p,\ x_2 + bt\sin q\sin p,\ x_3 + bt\cos q)\,t\sin q\,dp\,dq$$

$$J_{i2} \equiv \left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_i(N)\,\psi\frac{\sin bkt}{bk}\,d\tau =$$

$$= \frac{1}{4\pi}\int_0^\pi\int_0^{2\pi} \varphi_i(x_1 + bt\sin q\cos p,\ x_2 + bt\sin q\sin p,\ x_3 + bt\cos q)\,t\sin q\,dp\,dq$$

где q — широта, отсчитываемая от полюса, и p — долгота в сферических координатах.

Пользуясь (9), третий член в (8) преобразуем к виду

$$J_{i3} = \frac{1}{4\pi}\int_0^t d\xi \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \chi_i\,[x_1 + b\,(t-\xi)\sin q\cos p,\ x_2 + b\,(t-\xi)\sin q\sin p,\ x_3 + \\ + b\,(t-\xi)\cos q,\ \xi]\,(t-\xi)\sin q\,dp\,dq$$

Вводя вместо ξ новую переменную интегрирования $r = b\,(t-\xi)$, получим

$$J_{i3} = \frac{1}{4\pi b^2}\int_0^{bt}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \frac{1}{r}\chi_i\left(x_1 + r\sin q\cos p,\ x_2 + r\sin q\sin p,\ x_3 + r\cos q,\ t - \frac{r}{b}\right)\times \\ \times r^2 \sin q\,dp\,dq\,dr = \frac{1}{4\pi b^2}\iiint\limits_{r\leqslant bt} \frac{1}{r}\chi_i\left(x_1',\ x_2',\ x_3',\ t - \frac{r}{b}\right) dx_1'\,dx_2'\,dx_3'$$

где

$$r = \left[\sum_1^3 (x_i - x_i')^2\right]^{1/2}$$

Используя тождество

$$\frac{\cos akt - \cos bkt}{k^2} = \int_{at}^{bt} d\eta \int_0^{\eta} \cos ks\,ds \tag{10}$$

и равенства $\alpha_i\,\alpha_j\,\psi = -\,\partial^2\psi / \partial x_i\,\partial x_j$, преобразуем четвертый член в выражении (8):

$$J_{i4} = \sum_{j=1}^{3}\int_{at}^{bt} d\eta \int_0^{\eta}\left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \int_{-\infty}^{+\infty} \alpha_i\,\alpha_j\,f_j\,(N)\,\psi\cos ksd\tau\,ds =$$

$$= -\sum_{j=1}^{3}\int_{at}^{bt} d\eta \int_0^{\eta}\left[\frac{\partial^2}{\partial x_i\,\partial x_j}\left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \int_{-\infty}^{+\infty} f_j\,(N)\,\psi\cos ks\,d\tau\right] ds =$$

$$= -\frac{1}{4\pi}\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial^2}{\partial x_i\,\partial x_j}\int_{at}^{bt}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} f_j\,(x_1 + s\sin q\cos p,\ x_2 + s\sin q\sin p,\ x_3 + s\cos p)\,s\sin q\,dp\,dq\,ds$$

Обозначая

$$L = \sum_{j=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_j}\iiint\limits_{r\leqslant at}\frac{1}{r}\,f_j\,(x_1',\ x_2',\ x_3')\,dx_1'\,dx_2'\,dx_3' - \\ -\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_j}\iiint\limits_{r\leqslant bt}\frac{1}{r}\,f_j\,(x_1',\ x_2',\ x_3')\,dx_1'\,dx_2'\,dx_3' \qquad \left(r = \left[\sum_1^3 (x_i - x_i')^2\right]^{1/2}\right) \tag{11}$$

можем записать

$$J_{i4} = \frac{1}{4\pi}\frac{\partial L}{\partial x_i}$$

Если через P обозначить выражение, получающееся из (11) заменой f_i на φ_j, то

$$J_{i5} = \frac{1}{4\pi}\int_0^t \frac{\partial P}{\partial x_i}\,dt$$

Если шестой член в (8) записать в виде

$$J_{i6} = \int_0^t d\xi \int_{\xi}^{t}\left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \int_{-\infty}^{+\infty} \alpha_i\left[\sum_1^3 \alpha_j\,\chi_j\,(N,\ \xi)\right]\psi\,\frac{\cos ak\,(t-\xi) - \cos bk\,(t-\xi)}{k^2}\,d\tau dt$$

и воспользоваться тождеством (10), то, вводя обозначение

$$Q=\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_j}\iiint\limits_{r\leqslant a(t-\xi)}\frac{1}{r}\chi_j(x_1', x_2', x_3', \xi)\,dx_1'\,dx_2'\,dx_3' -$$

$$-\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_j}\iiint\limits_{r\leqslant b(t-\xi)}\frac{1}{r}\chi_j(x_1', x_2', x_3', \xi)\,dx_1'\,dx_2'\,dx_3'$$

для J_{i6} получим

$$J_{i6}=\frac{1}{4\pi}\int_0^t d\xi\int_\xi^t\frac{\partial Q}{\partial x_i}\,dt$$

Таким образом решение задачи Коши для уравнений (1) при начальных условиях (2) имеет вид

$$4\pi u_i(M, t)=\frac{\partial}{\partial t}\int_0^\pi\int_0^{2\pi} f_i(x_1+bt\sin q\cos p, x_2+bt\sin q\sin p, x_3+bt\cos q)\,t\sin q\,dp\,dq +$$

$$+\int_0^\pi\int_0^{2\pi}\varphi_i(x_1+bt\sin q\cos p, x_2+bt\sin q\sin p, x_3+bt\cos q)\,t\sin q\,dp\,dq +$$

$$+\frac{1}{b^2}\iiint\limits_{r\leqslant bt}\frac{1}{r}\chi_i\left(M', t-\frac{r}{b}\right)dx_1'\,dx_2'\,dx_3'+\frac{\partial L}{\partial x_i}+\int_0^t\frac{\partial P}{\partial x_i}\,dt+\int_0^t d\xi\int_\xi^t\frac{\partial Q}{\partial x_i}\,dt \qquad (12)$$

Если в уравнениях (1) формально положить $a=b$, то система (1) разбивается на три независимых волновых уравнения. Так как при этом $L=P=Q=0$, то решение (12) превращается в известную формулу Кирхгофа для волнового уравнения, являющуюся, таким образом, частным случаем решения динамических уравнений теории упругости по методу Остроградского.

Поступила 20 IV 1955

ЛИТЕРАТУРА

1. Остроградский М. В. Sur l'intègration des équations à différences partielles, relatives aux petites vibrations d'un milieu élastique. Mém. de l'Acad. Петербург, 1, 1831
2. Остроградский М. В. Sur l'intègration des équations à différences partielles relatives aux petites vibrations des corps élastiques. Mém. de l'Acad. Петербург, II, 1833.
3. D. Poisson. Mémoire sur l'intégration de quelques èquations linèaires aux différences partielles et particulièrement de l'équation gênérale du mouvement des fluides èlastiques. Mém. de l'Inst., Paris, v. 3, 1820.
4. G. Kirchhoff. Zur Theorie der Lichtstrahlen. Ann. Phys. Soc. Cambr., v. 18, 1883.
5. Stokes. On the dynamical theory of diffraction. Trans. Phil. Soc. Cambr., v. 9, 1849.
6. Крылов. А. Н. О некоторых дифференциальных уравнениях математической физики. ГТТИ, 1950.