Прикладная математика и механика. Том XIX, 1955
Институт механики Академии наук Союза ССР

КАЧЕСТВЕННЫЕ МЕТОДЫ В ТЕОРИИ УСТОЙЧИВОСТИ

Н. П. Еругин
(Ленинград)

Известно, что впервые теория устойчивости была построена А. М. Ляпуновым[1]. В его знаменитых работах были развиты два метода исследования вопросов устойчивости.

Первый метод состоит в том, что строится общее решение в окрестности точки равновесия в виде рядов, которые оказываются равномерно сходящимися в бесконечном промежутке $t \geqslant t_0$, когда (например) все характеристичные числа положительны и система первого приближения есть правильная. Из этих рядов и усматривается асимптотическая устойчивость невозмущенного нулевого решения в указанном случае.

Мы не останавливаемся на полной характеристике тех результатов, которые мы имеем на основании первого метода Ляпунова. Отметим лишь, что первый метод собственно в теории устойчивости не получил еще значительного развития в исследованиях других ученых, хотя, надо сказать, влияние первого метода на многие исследования по теории дифференциальных уравнений весьма велико и плодотворно. Второй метод состоит в том, что строится так называемая функция Ляпунова, из свойств которой и вытекает факт устойчивости или неустойчивости. При этом само решение мы не получаем ни в каком виде. Мы можем еще, конечно, по свойству этой функции и ее полной производной судить иногда о быстроте затухания движения или области устойчивости, когда имеем дело с асимптотической устойчивостью. Второй метод получил весьма сильное развитие сначала в работах Казанской школы, возглавляемой Н. Г. Четаевым, а затем и в других исследованиях и оказался весьма плодотворным во многих приложениях.

Несколько ранее Ляпунова начал развивать А. Пуанкаре качественную теорию дифференциальных уравнений. После работ Ляпунова качественная теория дифференциальных уравнений получила свое дальнейшее развитие. Именно, стали изучать картину расположения интегральных кривых в окрестности точки равновесия. Здесь многие получали и такие результаты, которые в простых частных случаях повторяли результаты, полученные Ляпуновым. При этом создается впечатление, что авторами не были осознаны работы Ляпунова. Это в особенности относится к вопросу условной асимптотической устойчивости, хорошо разработанному в весьма общей форме Ляпуновым, что соответствует тому случаю, когда мы имеем лишь часть интегральных кривых, начинающихся в окрестности точки равновесия и входящих в начало координат.

В последние годы началось развитие методов исследования вопросов устойчивости, основанных на идеях, примыкающих к качественным методам, хотя и использующих часто также второй метод Ляпунова. В целом это, однако, представляет собой методы, качественно отличные от строго ляпуновских методов. Впрочем, и характер тех задач, которые здесь рассматриваются, отличаются от того, что изучал Ляпунов.

Эти новые методы возникли в особенности при изучении вопросов устойчивости в целом, хотя имеются исследования этого рода и в вопросах локальной теории устой-

[1] Речь идет об устойчивости в смысле Ляпунова.

чивости (и, в частности, условий асимптотической устойчивости). Приобретают также значение и методы аналитической теории дифференциальных уравнений.

Об этих новых методах мы и будем здесь говорить (но не коснемся методов аналитической теории дифференциальных уравнений).

Мы будем рассматривать работы, появившиеся в период 1950—1954 гг. Именно в эти годы произошел качественный сдвиг в методах исследования вопросов устойчивости движения и обновился характер рассматриваемых задач. Все это произошло в большой степени под влиянием тех задач, с которыми столкнулись в теории автоматического регулирования.

Можно было бы рассказывать о работах в порядке хронологии их выхода в свет. Такой исторический способ изложения имеет свои привлекательные стороны. Мы увидели бы, как появление одной работы порождало другие работы. Но такой способ изложения занял бы больше места. Мы попытаемся только охарактеризовать те задачи, которые рассматривались, и те методы, которыми они решались.

Исходным пунктом той серии задач, о которых мы будем говорить, является, по жалуй, задача, предложенная М. А. Айзерманом [3].

Дана система линейных дифференциальных уравнений:

$$\frac{dx_1}{dt} = \sum_{j=1}^{n} a_{1j}x_j + ax_k, \qquad \frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \qquad (i = 2, \ldots, n) \tag{1}$$

Пусть при заданных постоянных a_{pj} $(p, j = 1, \ldots, n)$ и любом значении a из некоторого промежутка $\alpha < a < \beta$ все корни характеристического уравнения системы (1) имеют отрицательные действительные части. Требуется доказать или опровергнуть следующее утверждение.

«Для любого промежутка (α, β), для которого при $\alpha < a < \beta$ соблюдается условие отрицательности действительных частей корней характеристического уравнения системы (1) и для любой однозначной непрерывной функции $f(x)$, удовлетворяющей условиям

$$\begin{aligned} &(a) \qquad \alpha x^2 < xf(x) < \beta x^2 \qquad \text{при всех } x \neq 0 \\ &(b) \qquad f(0) = 0 \end{aligned} \tag{2}$$

и система

$$\frac{dx_1}{dt} = \sum_{j=1}^{n} a_{1j}x_j + f(x_k), \qquad \frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \tag{3}$$

единственным состоянием равновесия которой является, очевидно, начало координат $x_1 = \ldots = x_n = 0$, будет иметь в начале координат устойчивое состояние равновесия и область его притяжения охватывает все фазовые пространства системы (3), т. е. $-\infty < x_j < \infty$ $(j = 1, \ldots, n)$».

Здесь пункт (а) в условиях задачи дан в исправленном виде, так как у М. А. Айзермана он был формулирован не совсем удачно.

Чтобы задача стояла правильно, здесь прежде всего, как оказалось, необходимо было потребовать выполнения такого свойства $f(x)$, при котором существует единственное решение, обладающее свойством $x_i(t) \to 0$ при $t \to t_0$ $(i = 1, \ldots, n)$.

М. А. Айзерман искал решение этой задачи на основе построения функции Ляпунова для системы (1). Он получал положительный ответ при условии, что $\alpha' x^2 < xf(x) < \beta' x^2$, где промежуток (α', β') сильно уменьшенный по сравнению с (α, β).

Основным недостатком метода исследования Айзермана было прежде всего то, что к $f(x)$ предъявлялось требование, слишком общего характера [неравенство (а)].

На это было обращено внимание в работе [4], в которой для функции $f(x)$ было установлено точное неравенство, порождаемое коэффициентами системы (1) (при $a = 0$ в силу условий Гурвица. Это сразу упростило изучение проблемы.

Условимся говорить, что нулевое решение $x_k = 0$ $(k = 1, \ldots, n)$, системы $dx_k / dt = f_k(x_1, \ldots, x_n)$ $(k = 1, \ldots, n)$ асимптотически устойчиво в целом, если оно асимптотически устойчиво в смысле Ляпунова и все решения системы обладают свойством

$$x_k(t) \to 0 \qquad \text{при } t \to \infty \qquad (k = 1, \ldots, n) \tag{4_1}$$

Если же решение $x_k = 0$ асимптотически устойчиво и все решения, начинающиеся в области (D), окружающей начало координат, обладают свойством (4_1), то будем говорить, что (D) есть область притяжения решения $x_k = 0$ или область асимптотической устойчивости. Проблема Айзермана полностью исследована в случае системы двух уравнений. Пусть дана система [6]

$$dx / dt = ay + f(x), \qquad dy / dt = bx + cy, \qquad f(0) = 0 \tag{4}$$

где a, b и c — постоянные, а непрерывная функция $f(x)$ подчинена условиям единственности решения $x = 0$, $y = 0$ и

$$x[f(x) + cx] < 0, \qquad x[cf(x) - abx] > 0, \qquad x \neq 0 \tag{5}$$

Тогда при $c^2 + ab \neq 0$ решение $x = y = 0$ асимптотически устойчиво в целом.

Если $c^2 + ab = 0$, то область (D_1), определенная условием

$$2\int_0^x [cf(x) - abx]\, dx + (ay - cx)^2 < D_1 = \lim_{x \to \infty} 2\int_0^x [cf(x) - abx]\, dx \tag{6}$$

лежит в области притяжения решения $x = 0$, $y = 0$.

Если же $D_1 = \infty$, то решение $x = 0$, $y = 0$ асимптотически устойчиво в целом.

В случае $c^2 + ab = 0$ области притяжения решения $x = 0$, $y = 0$ принадлежит также область, определенная условием

$$x^2 + (ay - cx)^2 \leqslant r = \min \{\max - \varphi(x), \text{ при } x < 0, \ \max \varphi(x) \text{ при } x > 0\} \tag{7}$$

где

$$\varphi(x) = cf(x) - abx$$

Следовательно, если $\max[-\varphi(x)] = \infty$ при $x < 0$, $\max \varphi(x) = \infty$ при $x > 0$, то снова решение $x = 0$, $y = 0$ асимптотически устойчиво в целом.

Эта последняя область притяжения (7) получена на основе качественных методов [5,6], основывающихся на построении мажорантных систем дифференциальных уравнений.

В работе Н. Н. Красовского, который рассмотрел систему более общего вида[7], чем система (4), показано, что в случае $c^2 + ab = 0$ указанные сейчас условия асимптотической устойчивости решения $x = 0$, $y = 0$ в целом являются и необходимыми. Он же построил и конкретный пример, где решение $x = 0$, $y = 0$ не будет устойчиво в целом [8].

В работе В. А. Плисса [9] показано, как при $c^2 + ab = 0$ можно строить кривые, ограничивающие область притяжения точки $x = 0$, $y = 0$, когда нет асимптотической устойчивости в целом нулевого решения. Здесь же подробно изучена качественная картина расположения интегральных кривых как внутри области притяжения точки $x = 0$, $y = 0$, так и вне этой области.

В работе [4] получены и такие результаты, которые относятся к вопросу качества регулирования. В этой же работе дан метод построения как угодно узких полосок, входящих в начало координат и содержащих внутри себя интегральные кривые с заданными начальными значениями. Получено и следующее.

Пусть задана система типа Айзермана

$$\frac{dx}{dt} = -a_{22}x + a_{12}y - \alpha(x), \qquad \frac{dy}{dt} = a_{21}x + a_{22}y \tag{8}$$

$$x\alpha(x) > 0 \qquad \text{при } x \neq 0, \qquad \alpha(0) = 0$$

и при $x > 0$ имеем

$$\alpha(x) = ax^{1+q} + \theta(x), \qquad x^{-(1+q)}\theta(x) \to 0$$

где a и q — положительные постоянные. Тогда при малых r с точностью до бесконечно малой величины имеем¹

$$d = \frac{1}{r^q} - \frac{1}{r_0^q} = \frac{aq}{\lambda}\left[(\lambda - a_{12}a_{21})^2 + a_{22}^2\right]^{1/2q} B\left(\frac{3+q}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

где $B(m, n)$ — известного рода Эйлерова функция

$$\lambda = \sqrt{-D}, \qquad D = a_{22}^2 + a_{12}a_{21} < 0$$

r, r_0 — радиусы-векторы точки движения с аргументами, отличающимися на π.

На основе каких основных фактов получены окончательные выводы, сформулированные здесь?

В работе Н. П. Еругина [4] получена теорема (3.1). Предположим, что:

1) точка $(0, 0)$ — единственная точка равновесия;
2) невозмущенное движение $x = 0$, $y = 0$ асимптотически устойчивое и, следовательно, движения, начинающиеся в некоторой области (ε) $x^2 + y^2 \leqslant \varepsilon)$, обладают свойством $x(t) \to 0$, $y(t) \to 0$ при $t \to \infty$;
3) прямая $L(0, \infty)$, уходящая в бесконечность из точки $(0, 0)$, пересекается движениями в одном направлении;
4) движения, имеющие ограниченный полярный угол, ограничены;
5) периодических решений нет.

Тогда решение $x = 0$, $y = 0$ асимптотически устойчиво в целом.

Эта теорема получена на основе общей качественной теории.

И. Г. Малкин, пользуясь методом А. И. Лурье и В. Н. Постникова[13], для системы (4) указал функцию Ляпунова

$$V = \int_0^x [cf(x) - abx]\,dx + \frac{1}{2}(cx - ay)^2 \tag{9}$$

При помощи этой функции можно показать, что система Айзермана (4) при самых общих предположениях относительно $f(x)$ и величины $K = c^2 + ab$ не имеет периодических [6] решений, что и обеспечивает для системы (4) выполнение условия (5) указанной теоремы (3.1).

Остальные условия теоремы (3.1) в случае $K \neq 0$ проверяются на основе методов качественной теории, что и позволяет получить указанные выше результаты относительно системы (4) при $K \neq 0$.

При этом важную роль играет тот факт, что всякое движение, определяемое, например, системой (4), обладает свойством: либо оно ограничено, либо оно пересекает бесконечное число раз кривые, определяемые уравнениями $f(x) + ay = 0$, $bx + cy = 0$. Это обнаружено в работе [4] и связано с выполнением п. 4 общей теоремы (3.1).

Область притяжения (6) в случае $K = 0$ мы получаем на основании функции Ляпунова (9), а область притяжения (7) снова получаем на основании качественных методов. Вот в общих чертах та схема исследования, которая позволяет получить указанные выше результаты относительно факта устойчивости для системы (4).

При некоторых дополнительных предположениях относительно $f(x)$ мы всегда получаем асимптотическую устойчивость нулевого решения лишь при помощи функции Ляпунова (9) и на основании некоторых дополнительных рассуждений качественного характера.

Это дополнительное предположение относительно $f(x)$ состоит в самой общей форме в том, что должно быть [6]

$$\int_0^x [cf(x) - abx]\,dx \to \infty \qquad \text{при} \quad x \to \infty$$

¹ При $\theta(x) \equiv 0$ это равенство точное.

Метод исследования вопроса устойчивости в целом нулевого решения на основе функции Ляпунова в общей форме дан в работе Е. В. Барбашина и Н. Н. Красовского, которые доказали следующие теоремы [10].

Пусть дана система вида

$$dx_i / dt = X_i (x_1, \dots, x_n) \qquad (i = 1, \dots, n) \tag{10}$$

где X_i — непрерывно дифференцируемые функции переменных $x_1, \dots, x_n$ в области $-\infty < x_i < \infty$ и $X_i (0, \dots, 0) = 0$.

Назовем функцию $v (x_1, \dots, x_n)$ бесконечно большой определенно положительной, если $v (x_1, \dots, x_n) > 0$ для $r^2 = x_1^2 + \dots + x_n^2 \neq 0$ и $v (x_1, \dots, x_n) \to \infty$ при $r^2 \to \infty$.

Теорема 1. Если существует определенно положительная бесконечно большая функция $v (x_1, \dots, x_n)$, имеющая определенно отрицательную производную, то нулевое решение системы (10) асимптотически устойчиво в целом.

Теорема 2. Если нулевое решение $x_i = 0$ асимптотически устойчиво в целом, то существует непрерывно дифференцируемая бесконечно большая и определенно положительная функция $v (x_1, \dots, x_n)$ имеющая определенно отрицательную производную по времени.

Доказательство этой теоремы закончено в работе [11].

Теорема 3. Если все решения системы (10) продолжимы на промежутке $0 \leqslant t < \infty$ и существует непрерывно дифференцируемая определенно положительная функция $v (x_1, \dots, x_n)$ такая, что для любого положительного числа ε можно указать положительное k, удовлетворяющее условию

$$dv / dt < -k \qquad \text{при} \quad x_1^2 + \dots + x_n^2 > \varepsilon$$

то нулевое решение $x_i = 0$ системы (10) будет асимптотически устойчиво в целом.

Теорема 4. Пусть существует бесконечно большая определенно положительная функция $v (x_1, \dots, x_n)$ и множество M такое, что

$$dv / dt < 0 \quad \text{вне } M; \qquad dv / dt = 0 \quad \text{на } M$$

Пусть множество M обладает тем свойством, что на любом пересечении множеств $v = c \neq 0$ и M не содержится положительных полутраекторий системы (1). Тогда нулевое решение $x_i \equiv 0$ системы (10) асимптотически устойчиво в целом.

При доказательстве этой теоремы авторы пользовались методами общей качественной теории.

Заметим, однако, что даже для системы (4) мы еще не умеем строить функцию Ляпунова, удовлетворяющую указанным здесь условиям, если оставить общие предположения (5). В то же время, например, при $c^2 + ab > 2$ задача асимптотической устойчивости в целом и вопросы качества регулирования для системы (4) при общих предположениях (5) разрешаются тривиально качественными методами [4], которые применялись и при получении области устойчивости (7). Это указывает на большую разнохарактерность тех свойств, содержащихся в правых частях систем дифференциальных уравнений, которые влекут за собой факт асимптотической устойчивости в целом нулевого решения.

Мы видим, таким образом, что уже при изучении системы вида (4) развернулись большие исследования, которые породили несколько разных качественных методов исследования вопросов асимптотической устойчивости в целом, а также привели к дальнейшему развитию второго метода Ляпунова и к синтезу качественных методов и второго метода Ляпунова. В дальнейших исследованиях все это получило еще большее развитие, и круг задач, рассматриваемых на основе этих методов, также значительно расширился.

Заметим еще, что рассматривалась [5, 6, 12] и такая система двух уравнений вида (4), где произвольная функция в первом уравнении является функцией от y.

Систему трех дифференциальных уравнений типа Айзермана изучал А. П. Тузов, но он нашел [15] лишь некоторые различные достаточные признаки асимптотической устойчивости в целом нулевого решения.

В работе Н. П. Еругина [16] получены теоремы общего характера, которые оказались полезными в вопросах устойчивости. Здесь, в частности, доказана теорема о том, что граница области притяжения нулевого решения состоит из целых траекторий.

Другие теоремы этой работы содержат некоторые общие условия асимптотической устойчивости в целом и анализ возможной структуры границы области асимптотической устойчивости.

Эти другие теоремы доказывались на основании только что указанной теоремы о строении границы области притяжения нулевого решения.

В работе Н. А. Сахарникова [17] показано, что область устойчивости типа центр для системы $\dot{x} = P(x, y)$, $\dot{y} = Q(x, y)$ ограничена такой интегральной кривой (если не вся плоскость заполнена периодическими движениями), которая либо проходит через бесконечно удаленную точку, либо проходит через особую точку вида «седло» и не проходит через особые точки другого вида, находящиеся на конечном расстоянии.

В систему Айзермана входит одна произвольная функция и подчиняется условиям, порождаемым неравенствами Гурвица.

Исходя из такой же методики конструирования систем дифференциальных уравнений, Е. А. Барбашин, Н. Н. Красовский и С. Н. Шиманов рассмотрели несколько классов дифференциальных уравнений.

Н. Н. Красовский [8] рассматривал систему вида

$$dx / dt = f_1(x) + ay, \qquad dy / dt = f_2(x) + by \tag{11}$$

где a, b — постоянные, $f_1(x)$, $f_2(x)$ — непрерывные функции, удовлетворяющие условиям, обеспечивающим единственное решение при любых начальных данных, $f_1(0) = f_2(0) = 0$.

Здесь доказаны теоремы.

Теорема 1. Если

$$xf_1(x) + bx^2 < 0, \qquad xbf_1(x) - xaf_2(x) > 0 \tag{12}$$

$$\lim \int_0^x [bf_1(x) - af_2(x)]\, dx = \infty \quad \text{при } |x| \to \infty \tag{13}$$

то тривиальное решение $x \equiv y \equiv 0$ системы (11) асимптотически устойчиво в целом.

Здесь строится определенно положительная во всей плоскости функция $v(x, y)$, имеющая знакопостоянную полную производную. Сама же функция $v(x, y)$ в силу сделанных предположений [именно в силу (13)] бесконечно большая при $x^2 + y^2 \to \infty$.

Кроме того, при доказательстве используются основные теоремы (теоремы Бендиксона) качественной теории.

Далее для системы

$$dx / dt = f_1(x) + ay, \qquad dy / dt = f_2(y) + bx \tag{14}$$

доказывается теорема 2.

Если

$$xf_1(x) + x^2c_2 < 0, \qquad xf_1(x)\,c_2 - x^2ab > 0$$
$$yf_2(y) + y^2c_1 < 0, \qquad yf_2(y)\,c_1 - y^2ab > 0$$

где c_1, c_2 — такие постоянные, что $c_1 c_2 = ab$ и

$$\lim \int_0^x (f_1(x)\,c_2 - abx)\, dx = \infty \quad \text{при } |x| \to \infty$$

или

$$\lim \int_0^y (f_2(y)\,c_2 - aby)\, dy = \infty \quad \text{при } |y| \to \infty$$

то тривиальное решение $x \equiv y \equiv 0$ системы (14) асимптотически устойчиво в целом.

Доказательство аналогично доказательству теоремы 1.

Здесь строилась бесконечно большая функция Ляпунова, но далее автор проводил подробные рассуждения, так как теорема Е. А. Барбашина и Н. Н. Красовского [10], на которую можно было сослаться, была высказана позднее. Заметим, что именно в этой работе Н. Н. Красовский построил пример, показывающий, что в общем случае задача Айзермана не имеет положительного решения.

Н. Н. Красовский [18] рассмотрел систему трех уравнений вида

$$\begin{aligned} dx / dt &= f_1(x) + a_{12}y + a_{13}z \\ dy / dt &= f_2(x) + a_{22}y + a_{23}z \\ dz / dt &= f_3(x) + a_{32}y + a_{33}z \end{aligned} \tag{15}$$

где a_{kl} — вещественные постоянные, $f_i(x)$ — функции непрерывные, $f_i(0) = 0$ и выполнены условия теоремы единственности решения $x = y = z = 0$ при $t = t_0$. Предполагалось еще, что $\Delta_{11}^2 + \Delta_{21}^2 + \Delta_{31}^2 \neq 0$, где $\Delta_{11} = a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}$, $\Delta_{21} = a_{13}a_{32} - a_{12}a_{33}$, $\Delta_{31} = a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22}$.

Теорема 1. Пусть $a_{12}\Delta_{31} = \Delta_{21}a_{13}$ и коэффициенты уравнения

$$-\begin{vmatrix} x^{-1}f_1(x) - \lambda & a_{12} & a_{13} \\ x^{-1}f_2(x) & a_{22} - \lambda & a_{23} \\ x^{-1}f_3(x) & a_{32} & a_{33} - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^3 + a(x)\lambda^2 + b(x)\lambda + c(x) = 0 \tag{16}$$

при всех $x \neq 0$ удовлетворяют неравенствам

$$a(x) > 0, \qquad a(x)\,b(x) - c(x) > 0, \qquad c(x) > 0$$

аналогичным условиям Рауза-Гурвица в линейном случае.

Тогда, для того чтобы решение $x = y = z = 0$ системы (15) было асимптотически устойчиво в целом, необходимо и достаточно выполнения условия

$$\lim \left[x(-a(x)) + \frac{\Delta_{21}}{a_{12}} \operatorname{sign} x - \int^{x} xc(x)\,dx \right] = -\infty \qquad \text{при } x \to \pm\infty \tag{17}$$

Здесь показывается, что система (15) в этом случае линейным неособым преобразованием приводится к системе таких трех уравнений, что первые два уравнения содержат только две неизвестные функции, а третье уравнение есть линейное неоднородное уравнение относительно третьей неизвестной

$$\begin{gathered} dx_1 / dt = \varphi_1(x_1) + y_1, \qquad dy_1 / dt = \varphi_2(x_1) \\ dz / dt = -(\Delta_{21} / \Delta_{12})\, z_1 + b_{32}y_1 + \varphi_3(x_1) \end{gathered} \tag{18}$$

Асимптотическая устойчивость в целом нулевого решения $x_1 = 0$, $y_1 = 0$ показывается автором на основе качественного метода; именно показывается, что здесь выполнены условия теоремы (3.1), после чего и асимптотическая устойчивость решения $x_1 = y_1 = z_1 = 0$ системы (18) становится очевидной. Качественным методом показывается и необходимость указанных условий для асимптотической устойчивости в целом.

Интересно отметить, что автор доказывает единственность интегральной кривой системы первых двух уравнений (18), проходящей через любую точку плоскости (x_1, y_1), основываясь только на предположениях о непрерывности функций $f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_3(x)$.

Теорема 2. Пусть имеем $a_{12}\Delta_{31} \neq \Delta_{21}a_{13}$. Тогда для асимптотической устойчивости в целом решения $x = y = z = 0$ системы (15) достаточно выполнения условий

$$\lim \int_0^x c(x)\,x\,dx = \infty \qquad \text{при } x \to \pm\infty \tag{19}$$

$$4K_2c(x)(a(x) - K_1) - \left[\frac{c(x)(1 + K_2)}{K_1} + K_2(a(x) - K_1)K_1 - K_2b(x)\right]^2 > 0 \tag{20}$$

при всех $x \neq 0$, где K_1, K_2 — положительные постоянные.

Это утверждение доказывается на основе построения функции Ляпунова с привлечением, однако, также некоторых фактов из теории дифференциальных уравнений. Автор дополняет далее результаты, полученные Е. А. Барбашиным [19].

Н. Н. Красовскому не удалось указать необходимых и достаточных условий (как в первой теореме) асимптотической устойчивости в целом во втором случае. Но это не удивительно, так как такие условия еще не найдены и в том случае задачи Айзермана, когда имеем систему трех уравнений и где имеется только одна произвольная функция.

Е. А. Барбашин рассмотрел [19] уравнение

$$\frac{d^3x}{dt^3} + a\frac{d^2x}{dt^2} + \varphi\left(\frac{dx}{dt}\right) + f(x) = 0 \tag{21}$$

где a — постоянная, функция $f(x)$ непрерывно дифференцируема, а функция $\varphi(y)$ непрерывна при всех значениях аргумента.

Здесь вводится функция

$$W(x, y) = aF(x) + f(x)y + \Phi(y)$$

$$F(x) = \int_0^x f(x)\,dx, \qquad \Phi(y) = \int_0^y \varphi(y)\,dy \tag{22}$$

Доказана теорема. Если $a > 0$ и функции $f(x)$, $\varphi(y)$ в уравнении (21) удовлетворяют условиям

$$\varphi(0) = f(0) = 0, \qquad xf(x) > 0 \qquad (x \neq 0)$$

$$y\varphi(y) - y^2 f'(x) > 0 \qquad \text{при } y \neq 0$$

$$\lim W(x, y) = \infty \qquad \text{при } r = \sqrt{x^2 + y^2} \to \infty$$

то нулевое решение $x = 0$ уравнения (21) асимптотически устойчиво при любых начальных возмущениях.

Для доказательства теоремы строится определенно положительная функция

$$W(x, y, z) \qquad \left(y = \frac{dx}{dt}, \quad z = \frac{dy}{dt} + ay\right)$$

имеющая знакопостоянную отрицательную полную производную ($W' = 0$ на плоскости $y = 0$, где не расположены целиком траектории)

При этом $W' \to \infty$ для $x^2 + y^2 + z^2 \to \infty$. (Но при некоторых предположениях относительно $\varphi(x)$ и $f(x)$ этого не будет, и эти случаи автор не рассматривает.) Далее автор для доказательства теоремы привлекает еще некоторые соображения общей качественной теории дифференциальных уравнений, хотя здесь можно было бы сослаться на теорему 4 Барбашина-Красовского, которая была опубликована позднее [10].

Также рассматриваются здесь некоторый другой случай асимптотической устойчивости и другое уравнение третьего порядка.

С. Н. Шиманов [34] изучал уравнение

$$\frac{d^3x}{dt^3} + f\left(x, \frac{dx}{dt}\right)\frac{d^2x}{dt^2} + b\frac{dx}{dt} + cx = 0 \tag{23}$$

где b, c — постоянные, $f(x, y)$ — непрерывная функция вместе с производной по x при всех конечных значениях аргументов.

Доказана теорема. Если $b > 0$, $c > 0$, а $f(x, y)$ удовлетворяет условию $f(x, y) \geqslant c/b$, $y\partial f/dx \leqslant 0$ при всех конечных значениях аргументов, то решение $x \equiv 0$ асимптотически устойчиво в целом.

Рассматриваются и частные случаи [задания $f(x, y)$].

Доказательство аналогично доказательству, построенному Е. А. Барбашиным в предыдущей работе.

С. Н. Шиманов [33] указал также условия, при которых нулевое решение системы уравнений

$$\frac{d^2x}{dt^2} + f_1\left(x, y, \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}\right)\frac{dx}{dt} + \varphi(x) = 0$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} + f_2\left(x, y, \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}\right)\frac{dy}{dt} + \psi(y) = 0$$

асимптотически устойчиво в целом. Здесь φ, ψ, f_1 и f_2 — непрерывны и таковы, что обеспечено условие существования и единственности решения в области

$$-\infty < x < \infty, \qquad -\infty < y < \infty, \qquad -\infty < \frac{dx}{dt} < \infty, \qquad -\infty < \frac{dy}{dt} < \infty.$$

Доказана теорема. Если выполнены условия

$$\varphi(0) = \psi(0) = 0, \qquad \frac{\varphi(x)}{x} > 0 \quad \text{при } x \neq 0, \qquad \frac{\psi(y)}{y} > 0 \quad \text{при } y \neq 0$$

$$f_1\left(x,\ y,\ \frac{dx}{dt},\ \frac{dy}{dt}\right) > 0, \qquad f_2\left(x,\ y,\ \frac{dx}{dt},\ \frac{dy}{dt}\right) > 0$$

$$\int_0^x \varphi(x)\,dx = \infty \quad \text{при } |x| \to \infty, \qquad \int_0^y \psi(y)\,dy = \infty \quad \text{при } |y| \to \infty$$

то тривиальное решение системы будет асимптотически устойчиво в целом.

Автор приводит эту систему к системе четырех уравнений и строит функцию Ляпунова, удовлетворяющую условиям теоремы Е. А. Барбашина и Н. Н. Красовского.

Указывается, что так же можно рассмотреть систему

$$\frac{d^2x_i}{dt^2} + f_i\left(x_1, \ldots, x_n,\ \frac{dx}{dt}, \ldots, \frac{dx_n}{dt}\right)\frac{dx_i}{dt} + \varphi_i(x_i) = 0 \qquad (i=1, \ldots, n)$$

Н. Н. Красовский [7] рассмотрел систему вида

$$dx_1 / dt = f_{11}(x_1) + f_{12}(x_2), \qquad dx_2 / dt = f_{21}(x_1) + f_{22}(x_2) \tag{24}$$

где две из функций

$$h_{ij}(x_j) = \frac{f_{ij}(x_j)}{x_j} \qquad (x_j \neq 0), \qquad (i, j=1, 2) \tag{25}$$

являются постоянными и имеем

$$h_{11} + h_{22} < 0, \qquad h_{11}h_{22} - h_{12}h_{21} > 0 \qquad \text{при } x_1^2 + x_2^2 \neq 0 \tag{26}$$

Для системы

$$dx_1 / dt = h_{11}x_1 + h_{12}x_2, \qquad dx_2 / dt = h_{21}x_1 + h_{22}x_2$$

с постоянными h_{ij} условия (26) обеспечивают отрицательность характеристических чисел. Для системы

$$dx / dt = f_1(x) + ay, \qquad dy / dt = f_2(x) + by \tag{27}$$

с постоянными a и b указываются условия для $f_1(x)$ и $f_2(x)$, при которых все решения системы (27) будут обладать свойством

$$x(t) \to 0, \quad y(t) \to 0 \ \text{при } t \to \infty \tag{28}$$

При этом автор на примере показывает, что эти условия, обеспечивая свойство (28) всех решений, отнюдь не обеспечивают даже простой устойчивости в смысле Ляпунова решения $x = 0$, $y = 0$.

Далее указывается и достаточное условие, обеспечивающее асимптотическую устойчивость в целом решения $x = 0$, $y = 0$ системы (27).

Эти доказательства автор получает на основе общей качественной теории.

Именно, после некоторого преобразования он получает систему с переменными u и z, для движений которой он устанавливает, что всякая траектория при $t \to \infty$ либо примыкает к началу координат, либо пересекает полуось[1] $u = 0$, $z > 0$. Далее он показывает, что траектории, начинающиеся в точках полуоси $u = 0$, $z > 0$, имеют единственную предельную точку $u = 0$, $z = 0$ при $t \to \infty$. Правда, автор пользуется здесь и некоторой системой замкнутых вокруг начала координат линий, которые пересекаются движениями извне внутрь, т. е. пользуется некоторой функцией, напо-

---

[1] Интересно отметить, что именно таким свойством обладают и решения системы Айзермана, что было указано выше.

минающей функцию Ляпунова. Однако это рассуждение носит чисто качественный характер.

Дополняя условия, обеспечивающие свойство решений $x \to 0$, $y \to 0$ при $t \to \infty$, условием, обеспечивающим асимптотическую устойчивость решения $x = 0$, $y = 0$ в смысле Ляпунова, автор и получает условия асимптотической устойчивости в целом решения $x = 0$, $y = 0$.

Далее указываются условия, при которых система (27) имеет траекторию, уходящую в бесконечность при $t \to \infty$.

На основании этих результатов автор получает теорему. Пусть

$$xf_1(x)\,b - xf_2(x)\,a > 0 \qquad \text{при} \quad x \neq 0$$
$$xf_1(x) + x^2 b < 0 \qquad \text{при} \quad x \neq 0$$

Тогда, для того чтобы решение $x = 0$, $y = 0$ системы (27) было асимптотически устойчивым в целом, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия

$$\lim \left[(f_1(x) + bx)\operatorname{sign} x - \int_0^x (f_1(x)\,b - f_2(x)\,a)\,dx\right] = \infty \qquad \text{при} \quad x \to \pm\infty$$

Далее в этой работе рассматривалась система вида

$$dx\,/\,dt = f_1(x) + ay, \quad dy\,/\,dt = bx + f_2(y) \tag{28}$$

для которой получена теорема.

Пусть $ab < 0$ и функции $f_1(x)$, $f_2(y)$ удовлетворяют условиям $xf_1(x) \leqslant 0$, $yf_2(y) \leqslant 0$ при $x - y \neq 0$, причем по крайней мере в одном из условий выполняется строгое неравенство.

Тогда решение $x = 0$, $y = 0$ системы (28) асимптотически устойчиво в целом.

Здесь строится функция $v(x, y) = bx^2 - ay^2$, удовлетворяющая в силу высказанных предположений условиям теоремы 4 Е. А. Барбашина и Н. Н. Красовского [10].

Относительно системы (28) доказана еще теорема. Пусть обе функции $f_1(x)$ и $f_2(y)$ не являются линейными.

Тогда при выполнении условий

$$\frac{f_1(x)}{x} + \frac{f_2(y)}{y} < 0 \qquad \text{при} \quad x \neq 0, \ y \neq 0$$
$$\frac{f_1(x)}{x} \cdot \frac{f_2(y)}{y} - ab > 0 \qquad \text{при} \quad x \neq 0, \ y \neq 0$$

решение $x = 0$, $y = 0$ асимптотически устойчиво в целом.

Это предложение доказано качественными методами. Именно, сначала доказано, что все движения ограничены, а затем построена определенно положительная функция $v(x, y)$, имеющая знакоотрицательную полную производную, после чего на основании теоремы 4 Е. А. Барбашина и Н. Н. Красовского имеем асимптотическую устойчивость решения $x = 0$, $y = 0$ в целом.

В теореме Барбашина и Красовского требуется, чтобы $v(x, y)$ была бесконечно большой, но здесь она не такая. Однако здесь доказана ограниченность всех решений, что заменяет предположение о том, что $v(x, y) \to \infty$ при $x^2 + y^2 \to \infty$.

Далее здесь изучены системы вида

$$dx\,/\,dt = ax + f_2(y), \qquad dy\,/\,dt = f_1(x) + by \tag{29}$$
$$dx\,/\,dt = f_1(x) + f_2(y), \qquad dy\,/\,dt = ax + by \tag{30}$$

для которых указаны достаточные признаки устойчивости в целом нулевого решения $x = 0$, $y = 0$.

Доказательства этих теорем основаны на весьма остроумных качественных методах и с использованием некоторых геометрических качественных приемов, предложенных С. А. Стебаковым [20].

Рассматривая эти системы, Н. Н. Красовский качественным методом показывает сначала, что все движения такой системы ограничены, после чего показывается, что точка $x=0$, $y=0$ есть ω предельная точка для траекторий системы и решение $x=0$, $y=0$ устойчиво в смысле Ляпунова. Это и доказывает, что решение $x=0$, $y=0$ асимптотически устойчиво в целом. Показано также на примере, что для системы (30) выполнение усиленных неравенств Гурвица

$$\frac{f_1(x)}{x}+b<-\varepsilon, \qquad \frac{f_1(x)}{x}b-\frac{f_2(y)}{y}a>\varepsilon$$

где $\varepsilon>0$ — достаточно малое число, недостаточно для асимптотической устойчивости решения $x=0$, $y=0$ в смысле Ляпунова [1].

Необходимые и достаточные условия асимптотической устойчивости систем (29) и (30) при выполнении условий Гурвица, а также границы области устойчивости не указаны.

Б. А. Ершов рассмотрел систему другого типа [21]:

$$dx/dt=F(x, y), \qquad dy/dt=f(\sigma), \qquad \sigma=c_1x-d_1y \tag{31}$$

где c_1, d_1 — положительные постоянные, $F(x, y)$ — непрерывная функция, имеющая частные производные по x и y при всех их значениях, и $F(0, 0)=0$.

При некоторых различных предположениях относительно функций $F(x, y)$ и $f(\sigma)$ (в частности, всегда предполагается $\sigma f(\sigma)>0$ при $\sigma\neq 0$) и рассматривается задача об асимптотической устойчивости в целом нулевого решения $x=0$, $y=0$. Кроме того, строится качественная картина в окрестности начала координат.

Автор качественными методами показывает, что в рассматриваемых им случаях можно установить выполнение условий общей теоремы (3.1) об асимптотической устойчивости нулевого решения.

Эту же систему рассматривал Н. Н. Красовский,[22] которому удалось построить функцию Ляпунова, удовлетворяющую всем условиям, при выполнении которых обеспечена асимптотическая устойчивость нулевого решения в силу теоремы Е. А. Барбашина и Н. Н. Красовского [10].

Н. Н. Красовский предполагал, что

$$y\varphi(0, y)<0, \qquad \sigma f(\sigma)>0 \qquad (\sigma\neq 0,\ y\neq 0)$$
$$\sigma[\varphi(\sigma, y)-\varphi(0, y)]<0 \qquad (\sigma\neq 0)$$
$$\left|\int_0^\infty f(\sigma)\,d\sigma\right|=\infty, \qquad \left|\int_0^\infty \varphi(0, y)\,dy\right|=\infty \tag{32}$$

где

$$\varphi(\sigma, y)=c_1F\left(\frac{\sigma+d_1y}{c_1},\ y\right)-d_1f(\sigma)$$

Исследование системы Б. А. Ершова еще нельзя считать в какой-то мере завершенным, так как, например, условия (32), повидимому, можно ослабить.

Н. Н. Красовский [22] рассматривал вопрос о нахождении условий, при которых вариация правых частей системы

$$dx_i/dt=X_i(x_1, \ldots, x_n) \qquad (i=1, \ldots, n)$$

имеющей решение $x_1=\ldots=x_n=0$, асимптотически устойчивое в целом, оставляет ограниченными все решения новой системы, при этом верхняя граница модулей решений стремится к нулю, когда высший предел модулей вариаций стремится к нулю. К таким системам и принадлежит система Б. А. Ершова в предположениях Н. Н. Красовского, а также другие системы [8], рассмотренные Н. Н. Красовским ранее с точки зрения асимптотической устойчивости в целом нулевого решения.

Аналогичная задача рассматривалась ранее П. В. Атрашенком [2].

---

1 Но при

$$\frac{f_1(x)}{x}+b<0, \quad \frac{f_1(x)}{x}b-\frac{f_2(y)}{y}a>0$$

и монотонно убывающей функции $\varphi(x)=f_1(x)+bx$ нулевое решение системы (30) асимптотически устойчиво в целом.

Он рассмотрел систему

$$\frac{dx_i}{dt} = L_i(x) + \varphi_i(x, t) + f_i(x, t)$$

где x — вектор: $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $L_i(x)$ — линейная часть (с постоянными коэффициентами), функции $\varphi_i(x, t)$, $f_i(x, t)$ определены и непрерывны при всех x и $t \geqslant t_0$ и удовлетворяют условиям

$$|\varphi_i(x, t)| \leqslant \chi |x|, \qquad |f_i(x, t)| \leqslant d$$

с постоянными χ, d.

Предполагая отрицательными вещественные части корней характеристического уравнения матрицы коэффициентов линейной системы дифференциальных уравнений $dx_i / dt = L_i(x)$, автор доказывает ограниченность всех решений исходной системы при достаточно малых $\chi > 0$, а также дает оценку этих решений в зависимости от начальных значений при $t = t_0$ и величины d, справедливую для всех $t \geqslant t_0$.

При доказательствах П. В. Атрашенок пользовался и функцией Ляпунова и некоторыми теоремами качественного характера, полученными Болем [32].

Н. Н. Красовский рассмотрел систему [23]

$$dx / dt = X(x, y), \qquad dy / dt = Y(x, y) \tag{33}$$

где функции X, Y имеют непрерывные частные производные первого порядка при всех значениях x, y и $X(0, 0) = Y(0, 0) = 0$.

Здесь изучается поведение траекторий в зависимости от значеняй корней уравнения

$$\begin{vmatrix} \partial X / \partial x - \lambda & \partial X / \partial y \\ \partial Y / \partial x & \partial Y / \partial y - \lambda \end{vmatrix} = 0 \tag{34}$$

Пусть

$$m(r) = \min \sqrt{X^2(x, y) + Y^2(x, y)} \quad \text{при} \quad x^2 + y^2 = r^2$$

$$N = \max \sqrt{X^2 + Y^2} \quad \text{на окружности} \quad x^2 + y^2 = R^2$$

Теорема 1. Для того чтобы окружность $x^2 + y^2 = R^2$ лежала внутри области притяжения C_0 точки $x = y = 0$, достаточно, чтобы уравнение (34) имело корни с отрицательными вещественными частями в области $x^2 + y^2 \leqslant R_1^2$, где число R_1 удовлетворяет неравенству

$$\int_R^{R_1} m(r)\, dr > 2\pi R N$$

Доказывается это так. В силу условий теоремы решение $x = y = 0$ устойчиво по Ляпунову.

Далее на основании условий теоремы показывается, что ближайшая граничная (области притяжения) точка p такова, что граничная траектория [1] (в силу упомянутой выше теоремы работы [16] траектория $f(p, t)$ граничная) $f(p, t)$ не может оставаться в круге $x^2 + y^2 \leqslant R_1^2$ при $t \to \infty$, если p лежит в круге $x^2 + y^2 \leqslant R^2$, а также не может выходить из круга $x^2 + y^2 \leqslant R_1^2$.

Отсюда следует, что граничная точка p не может лежать в круге $x^2 + y^2 \leqslant R^2$.

Доказательство строится на основе методов общей качественной теории.

Отсюда получается *Теорема 2.* Если во всех точках плоскости x, y корни $\lambda_1(x, y)$, $\lambda_2(x, y)$ уравнения (34) имеют отрицательные действительные части и

$$\int_0^\infty m(r)\, dr = \infty^*$$

то решение $x = y = 0$ уравнения (33) устойчиво в целом.

Указывается, что требования на X и Y можно несколько ослабить, сохраняя полученные результаты.

[1] $f(p, 0) = p$.

Здесь же доказана *теорема 3*. Если в точке $x = y = 0$ уравнение (34) имеет корни с положительными вещественными частями, а вне некоторого круга $x^2 + y^2 = R^2$ действительные части этих корней отрицательны и выполняется условие *, то система (33) имеет по крайней мере одну устойчивую периодическую траекторию, если, кроме (0, 0), нет других точек равновесия.

Ранее этой работы Н. Н. Красовский рассмотрел систему [24]

$$dx_i / dt = X_i (x_1, x_2) \qquad (i = 1, 2) \tag{35}$$

где $X_i (0, 0) = 0$ и характеристическое уравнение

$$| \| a_{ij} \| - \lambda E | = 0, \qquad a_{ij} = \left.\frac{\partial X_i}{\partial x_j}\right|_{x_1 = x_2 = 0} \tag{36}$$

имеет один нулевой корень или пару чисто мнимых корней.

Здесь доказано следующее утверждение.

Пусть уравнение (36) имеет один нулевой и один отрицательный корень или пару чисто мнимых корней.

Если в некоторой окрестности начала координат (за исключением самой точки $x_1 = x_2 = 0$) уравнение

$$\left| \left\| \frac{\partial X_i}{\partial x_j} \right\| - \lambda E \right| = 0, \qquad x_1^2 + x_2^2 \neq 0 \tag{37}$$

имеет корни с отрицательными вещественными частями, то решение $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ уравнений (35) асимптотически устойчиво. Если в каждой точке некоторой окрестности начала координат уравнение (37) имеет корень с положительной действительной частью, то решение $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ неустойчиво

Доказываются эти утверждения на основании теоремы Е. А Барбашина, Н. Н. Красовского [10] и одной общей теоремы работы [4].

Н. Н. Красовский [35] рассмотрел систему n уравнений

$$dx_i / dt = X_i (x_1, \ldots, x_n) \qquad (i = 1, \ldots, n) \tag{38}$$

где функции $X_i (x_1, \ldots, x_n)$ имеют непрерывные частные производные первого порядка во всем пространстве $-\infty < x_i < \infty$ $(i = 1, \ldots, n)$ и в точке $x_1 = \cdots = x_n = 0$ обращаются в нуль. Обозначим через $\lambda_i (x_1, \ldots, x_n)$ собственные числа матрицы

$$\left\{ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial X_k}{\partial x_i} + \frac{\partial X_i}{\partial x_k} \right) \right\}_{ik} \tag{39}$$

и пусть

$$r) = \min \sum_{i=1}^{n} X_i^2, \qquad \lambda (r) = \min (| \lambda_1 (x_1, \ldots, x_n) |, \ldots, | \lambda_n (x_1, \ldots, x_n) |)$$

при $x_1^2 + \cdots + x_n^2 = r^2$. Здесь доказаны теоремы.

Теорема 1. Для того чтобы сфера

$$x_1^2 + \cdots + x_n^2 = R^2$$

лежала в области притяжения C точки $x_1 = \cdots = x_n = 0$, достаточно, чтобы все собственные значения λ_i были отрицательны в каждой точке области $x_1^2 + \cdots + x_n^2 \leqslant R_1^2$, где число R_1 удовлетворяет неравенству

$$\int_{R}^{R_1} m (r) \lambda (r) \, dr > N = \frac{1}{2} \max \sum_{i=1}^{n} X_i^2 \quad \text{при} \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = R^2.$$

Доказывается это так. Из условий теоремы следует асимптотическая устойчивость нулевого решения. Если предположить, что теорема не верна, то в области $x_1^2 + \cdots + x_n^2 = R^2$

есть граничные точки p области притяжения C точки $x = 0$ (x — вектор). Далее автор показывает, что граничная траектория $f(p, t)$ области C не может выйти из области $x_1^2 + \cdots + x_n^2 = R_1^2$ и не может в ней остаться.

Отсюда получается *Теорема 2.* Если λ_i отрицательны в области $-\infty < x_i < \infty$ $(i = 1, \ldots, n)$ и

$$\int_0^\infty m(r)\,\lambda(r)\,dr = \infty$$

то решение $x = 0$ асимптотически устойчиво в целом.

Здесь же получена *Теорема 3.* Если существует постоянная симметричная матрица $A = \{a_{ij}\}$, собственные значения которой μ_i $(i = 1, \ldots, n)$ положительны и симметризованная матрица произведения

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial X_1 / \partial x_1 & \ldots & \partial X_1 / \partial x_n \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \partial X_n / \partial x_1 & \ldots & \partial X_n / \partial x_n \end{pmatrix}$$

имеет в некоторой окрестности начала координат (за исключением самой точки $x_1 = \cdots = x_n = 0$) отрицательные собственные числа λ_i $(i = 1, \ldots, n)$, то решение $x_1 = \cdots = x_n = 0$ системы (38) асимптотически устойчиво по Ляпунову.

Автор сначала показывает, что точка $x = 0$ устойчива, а затем, используя граничные траектории, получает, что в достаточно малой окрестности точки $x = 0$ нет точек равновесия, а тогда ясно, что $x = 0$ асимптотически устойчива, так как в силу условий теоремы функция

$$v(x_1, \ldots, x_n) = \frac{1}{2} \sum_{i=1,\, j=1}^{n} a_{ij} X_i X_j$$

имеет определенно отрицательную производную

$$\frac{dv}{dt} = \sum_{i=1,\, k=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \frac{\partial X_i}{\partial x_k} \right) X_i X_k$$

в окрестности начала координат, если в окрестности начала координат нет точек равновесия (где бы $X_i = 0$).

Здесь, таким образом, доказана локальная асимптотическая устойчивость на основе качественных методов и построения функции Ляпунова. Этим Н. Н. Красовский обобщил (в теореме 3) и некоторые теоремы В. И. Зубова [25]. Сюда же примыкает результат, полученный Н. Н. Красовским в другой его работе [26].

Обозначим через $\partial X / \partial x$ матрицу, стоящую вторым множителем в произведении (40). Тогда имеем теорему.

Для того чтобы решение $x_1 = \cdots = x_n = 0$ уравнений (38) было асимптотически устойчивым в целом, достаточно, чтобы существовала постоянная симметрическая матрица

$$A = \begin{Vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{Vmatrix} \tag{40}$$

имеющая положительные собственные числа и такая, что симметризованная матрица произведения

$$\frac{1}{2} \left(\left\{ A \frac{\partial X}{\partial x} \right\}_{ik} + \left\{ A \frac{\partial X}{\partial x} \right\}_{ki} \right)$$

имеет собственные числа $\lambda_i(x_1, \ldots, x_n)$ $(i = 1, \ldots, n)$, удовлетворяющие во всем пространстве $\{x_i\}$ неравенству $\lambda_i < -\delta$ $(i = 1, \ldots, n)$, где δ — положительная постоянная

Здесь доказывается, что не может существовать граничная траектория (которая должна быть по отмеченной выше теореме работы [16], если область притяжения точки $(0, \ldots, 0)$ не есть все пространство) и тем самым доказывается теорема [1].

В работе [26] Н. Н. Красовский также широко использует и результаты и методы общей качественной теории. В частности он использует многие результаты Е. А. Барбашина, полученные им в его работе [28], а также один результат В. В. Немыцкого.

Здесь, в частности, показана грубость свойства неустойчивости нулевого решения и получена интересная теорема о том, что необходимым и достаточным условием существования в окрестности начала координат функции $v(x_1, \ldots, x_n)$ класса C', имеющей определенно положительную производную

$$\frac{dv}{dt} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial v}{\partial x_k} X_k$$

является отсутствие целых траекторий (отличных от состояния равновесия) в окрестности начала координат.

Можно еще отметить работу [11] Е. А. Барбашина и Н. Н. Красовского. Здесь рассматривается система дифференциальных уравнений

$$dx_i / dt = X_i(t, x_1, \ldots, x_n) \tag{41}$$

где X_i — непрерывные дифференцируемые функции переменных $x_1, \ldots, x_n, t$, в области $t_0 \leqslant t < \infty$, $-\infty < x_i < \infty$ $(i = 1, \ldots, n)$, обращающиеся в нуль в точке $(0, \ldots, 0)$ при всех $t \geqslant t_0$.

Сначала, предполагая, что X_i не зависят от t, авторы заканчивают доказательство (начатое в работе [10]) существования функции Ляпунова, обеспечивающей асимптотическую устойчивость в целом нулевого решения, если такая устойчивость имеется. Затем доказывают для системы (41) аналогичную теорему.

Для того чтобы решение $x = 0$ системы (41) было равномерно устойчиво в целом, необходимо и достаточно, чтобы во всем пространстве $-\infty < x_i < \infty$ $(i = 1, \ldots, n)$ существовала определенно положительная, бесконечно большая функция $v(x_1, \ldots, x_n)$, допускающая высший предел, бесконечно малый в точке $(0, \ldots, 0)$, имеющая определенно отрицательную во всем пространстве x производную dv/dt.

В работе В. И. Зубова [29] показано, что существует функция Ляпунова $v(x_1, \ldots, x_n)$, определенная в области притяжения начала координат и обладающая свойством $v \to -1$ при $x \to$ гр. области притяжения.

Заметим, что здесь строится также функция Ляпунова $v(x, t)$ (для нестационарной системы), которая обладает свойством $v(x, t_0) \to -1$ при x, стремящемся к границе области притяжения $A(t_0)$. Эти результаты получены на основании общих качественных методов и некоторых общих теорем, полученных в работе Ляпунова.

В. А. Плисс доказал теорему, обобщающую теорему (3.1) на случай системы n уравнений. При этом он показал, что условия, высказанные им в теореме, являются необходимыми и достаточными для асимптотической устойчивости в целом нулевого решения.

Б. Н. Скачков рассмотрел систему трех уравнений вида

$$\dot{\eta}_1 = b_{11}\eta_1 + b_{12}\eta_2 + \bar{n}_1\xi$$
$$\dot{\eta}_2 = b_{21}\eta_1 + b_{22}\eta_2 + \bar{n}_2\xi$$
$$\dot{\xi} = f(\sigma), \qquad \sigma = p_1\eta_1 + p_2\eta_2 - \xi$$

[1] Интересно выяснить, каким условием нужно дополнить правые части системы (38), чтобы при условии лишь $\lambda_i < 0$ $(i = 1, \ldots, n)$ во всем пространстве $\{x_i\}$ нулевое решение системы было асимптотически устойчиво в целом.

Можно, вероятно, допустить и $\lambda_i > 0$ в некоторой области наряду с $\lambda_i < 0$, не нарушая асимптотической устойчивости нулевого решения в целом.

где $b_{ij}, \overline{n_i}, p_i$ $(i, j = 1, 2)$ — вещественные постоянные, $f(\sigma)$ — любая ограниченная однозначная непрерывная функция, обладающая свойствами

$$\sigma f(\sigma) > 0, \ f(0) = 0$$

Предполагается еще, что корни уравнения

$$\begin{vmatrix} b_{11} - r & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} - r \end{vmatrix} = 0$$

вещественны, отрицательны и имеют в случае их равенства простые элементарные делители.

Автор указал одно необходимое условие устойчивости в целом нулевого решения, а затем получил и некоторые достаточные условия. Эти результаты получены качественными методами и являются обобщением некоторых случаев устойчивости в целом, а также обобщением некоторых частных случаев качественной картины расположения интегральных кривых в целом, указанных в работе [4] для системы двух уравнений.

Мы уже отметили исследования Н. Н. Красовского, где качественные методы были использованы для установления локальной асимптотической устойчивости. Качественные методы и методы аналитической теории дифференциальных уравнений были использованы А. Ф. Андреевым [30] при изучении вопросов условий устойчивости системы двух уравнений. Именно, он, рассматривая систему двух уравнений

$$\dot{x} = P(x, y), \qquad \dot{y} = x + Q(x, y)$$

где $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ — степенные ряды без свободных и линейных членов, во всех случаях построил уравнения интегральных кривых, входящих в начало координат и ограничивающих области условий устойчивости и неустойчивости.

К этой же работе тесно примыкает и работа Н. Б. Хаимова [31].

Заключение. Мы видим, таким образом, что в качественной теории дифференциальных уравнений и в теории устойчивости за последние годы имеется явный успех.

Мы не остановились на развитии этих проблем на основе аналитической теории дифференциальных уравнений, а проследили это лишь на методах качественной теории дифференциальных уравнений. Мы видели, что теперь завершен вопрос (и в положительном смысле) о существовании функции Ляпунова, разрешающей задачу асимптотической устойчивости в целом или во всей области притяжения.

Но остался открытым вопрос еще о систематических методах фактического построения такой функции Ляпунова.

Мы видим, что даже для исчерпывающим образом изученной системы двух уравнений типа Айзермана такая функция Ляпунова не построена. Для остальных рассматриваемых систем также построены лишь такие функции Ляпунова, которые налагают дополнительные условия на системы для асимптотической устойчивости в целом нулевого решения.

Необходимые и достаточные условия асимптотической устойчивости в целом получали до сих пор только на основании качественных методов.

Другими словами, исчерпывающее исследование удавалось провести только на основании качественных методов или на основании качественных методов и с использованием также частного вида функций Ляпунова. Надо ожидать, что в дальнейшем будут найдены различные свойства правых частей систем дифференциальных уравнений, из которых будет следовать выполнение всех условий асимптотической устойчивости, указанных в теореме (3.1) или в теореме В. А. Плисса для системы n уравнений. Такая задача, очевидно, будет привлекать к себе внимание. Это расширит класс изучаемых систем дифференциальных уравнений.

Следует, конечно, обратить внимание и на развитие методов построения траекторий, ограничивающих область устойчивости, когда нет асимптотической устойчивости в целом. Эта задача не разрешена еще и для некоторых из тех классов уравнений, которые мы рассмотрели в этой статье. Очевидно, следует обратить внимание на изучение качественной картины в целом и для таких систем дифференциальных уравнений, где правые части суть голоморфные функции или полиномы.

Определенные успехи в этом также имеются. Мы на них не останавливаемся.

Поступила 28 III 1955

ЛИТЕРАТУРА

1. Ляпунов А. М. Общая задача об устойчивости движения. Гостехтеоретиздат, М.—Л., 1950.
2. Атрашенок П. В. Некоторые вопросы теории устойчивости. Вестник Ленинградского университета, № 8, сер. мат., физ. и хим., 1954.
3. Айзерман М. А. Об одной проблеме, касающейся устойчивости в большом динамических систем. Успехи матем. наук, т. IV, в. 4, 1949.
4. Еругин Н. П. О некоторых вопросах устойчивости движения и качественной теории дифференциальных уравнений в целом. ПММ, т. XIV, вып. 5, 1950.
5. Еругин Н. П. Качественное исследование интегральных кривых системы дифференциальных уравнений. ПММ, т. XIV, вып. 6, 1950.
6. Еругин Н. П. Об одной задаче теории устойчивости систем автоматического регулирования. ПММ, т. XVI, вып. 5, 1952.
7. Красовский Н. Н. Об устойчивости решений системы двух дифференциальных уравнений. ПММ, т. XVII, вып. 6, 1953.
8. Красовский Н. Н. Теоремы об устойчивости движений, определяемых системой двух уравнений. ПММ, т. XVI, вып. 5, 1952.
9. Плисс В. А. Качественная картина интегральных кривых в целом и построение с любой точностью области устойчивости одной системы двух дифференциальных уравнений. ПММ, т. XVII, вып. 5, 1953.
10. Барбашин Е. А. и Красовский Н. Н. Об устойчивости движений в целом. ДАН СССР, т. LXXVI, № 3, 1952.
11. Барбашин Е. А. и Красовский Н. Н. О существовании функции Ляпунова в случае асимптотической устойчивости в целом. ПММ, т. XVIII, вып. 3, 1954.
12. Малкин И. Г. Об одной задаче теории устойчивости систем автоматического регулирования. ПММ, т. XVI, вып. 3, 1952.
13. Лурье А. И., Постников В. Н. К теории устойчивости регулируемых систем. ПММ, т. VII, № 3, 1944.
14. Лурье А. И. Некоторые нелинейные задачи теории автоматического регулирования. ГНТ-ТЛ, 1951.
15. Тузов А. П. Вопросы устойчивости движения для некоторой системы трех дифференциальных уравнений, встречающихся в теории регулирования. Автореферат. Ленинградский университет, 1952.
    Тузов А. П. Вопросы устойчивости для одной системы регулирования. Вестник Ленинградского университета, № 2, 1955.
16. Еругин Н. П. Некоторые общие вопросы теории устойчивости движения. ПММ, т. XV, вып. 2, 1951.
17. Сахарников Н. А. Качественная картина поведения траекторий вблизи границы области устойчивости, содержащей особую точку вида центр. ПММ, т. XV, вып. 3, 1951.
18. Красовский Н. Н. Об устойчивости при любых начальных возмущениях решений одной нелинейной системы трех уравнений. ПММ, т. XVII, вып. 3, 1953.
19. Барбашин Е. А. Об устойчивости решения одного нелинейного уравнения третьего порядка. ПММ, т. XVI, вып. 5, 1952.
20. Стебаков С. А. Качественное исследование системы $\dot{x} = P(x, y)$, $\dot{y} = Q(x, y)$ при помощи изоклин. ДАН СССР, т. LXXXII, № 5, 1952.

21. Ершов Б. А. Об устойчивости в целом некоторой системы автоматического регулирования. ПММ, т. XVII, вып. 1, 1953.
22. Красовский Н. Н. Об устойчивости движения в целом при постоянно действующих возмущениях. ПММ, т. XVIII, вып. 1, 1954.
23. Красовский Н. Н. О поведении в целом интегральных кривых системы двух дифференциальных уравнений. ПММ, т. XVIII, вып. 2, 1954.
24. Красовский Н. Н. Об устойчивости решений системы второго порядка в критических случаях. ДАН СССР, т. 93, № 6, 1953.
25. Зубов В. И. Некоторые достаточные признаки устойчивости нелинейной системы дифференциальных уравнений. ПММ, т. XVII, вып. 4, 1953.
26. Красовский Н. Н. Об устойчивости в целом решения нелинейной системы дифференциальных уравнений. ПММ, т. XVIII, вып. 6, 1954.
27. Красовский Н. Н. Об обращении теорем А. М. Ляпунова и Н. Г. Четаева о неустойчивости для стационарных систем дифференциальных уравнений. ПММ, т. XVIII, вып. 5, 1954.
28. Барбашин Е. А. Метод сечений в теории динамических систем. Матем. сборник, т. XXIX, вып. 2. 1951.
29. Зубов В. И. Вопросы теории второго метода Ляпунова построения общего решения в области асимптотической устойчивости. ПММ, т. XIX, вып. 2, 1955.
30. Андреев А. Ф. Исследование поведения интегральных кривых системы двух дифференциальных уравнений в окрестности особой точки. Автореферат, Москва• Математический институт АН СССР, 1953. Работа печатается в «Вестнике Ленинградского университета», 1955.
31. Хаимов Н. Б. Некоторые теоремы об особых точках первой группы. Ученые записки Сталинабадского госуд. объединенного педагогического и учительского института. I. (1952).

Хаимов Н. Б. Исследование уравнения, правая часть которого содержит линейные члены. Ученые записки Сталинабадского гос. объединенного педагогического и учительского института. II. (1952).
32. Боль. О некоторых дифференциальных уравнениях общего характера, применимых в механике. Юрьев, 1900.
33. Шиманов С. Н. Об устойчивости решения одной нелинейной системы уравнений. Успехи мат. наук, т. VIII, вып. 6 (58), 1953.
34. Шиманов С. Н. Об устойчивости решения одного нелинейного уравнения третьего порядка. ПММ, т. XVII, вып. 3, 1953.
35. Красовский Н. Н. Достаточные условия устойчивости системы нелинейных дифференциальных уравнений. ДАН СССР, т. XCVIII, № 6, 1954.