Прикладная математика и механика. Том XIX, 1955
Институт механики Академии наук Союза ССР

О ПОВЕДЕНИИ РЕШЕНИЯ КОНЕЧНО-РАЗНОСТНОГО АНАЛОГА ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ

Л. И. Камынин
(Москва)

Решение волнового уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad \left(\begin{array}{c} 0 < a^2 < 1 \\ -\infty < x < +\infty \\ 0 \leqslant t < +\infty \end{array}\right) \tag{0.1}$$

методом конечных разностей приводит к конечно-разностному уравнению (0.2

$$u_{m,n+1} = a^2 \ (u_{m+1,n} + u_{m-1,u}) + 2(1 - a^2)\, u_{mn} - u_{m,n-1} \qquad \left(\begin{array}{l} m = \ldots -2,-1,0,1,2 \\ n = 0,1,2,\ldots \end{array}\right)$$

Представляет интерес изучение «элементарного» решения u_{mn} уравнения (0.2), удовлетворяющего начальным условиям

$$u_{m0} = 0, \qquad u_{m1} = \begin{cases} 0 & \text{при } m \neq 0 \\ 1 & \text{при } m = 0 \end{cases} \tag{0.3}$$

В заметке строится явное решение уравнения (0.2) и исследуется поведение u_{mn} при $m,\ n \to \infty$, что соответствует исследованию решения конечно-разностного уравнения (0.2) в конечной области, если шаги по x и по t неограниченно уменьшаются. Оказывается, что решение u_{mn} уравнения (0.2) отлично от нуля в треугольнике, ограниченном прямыми $m = \pm n$, $n = 0$ и содержащем характеристический треугольник волнового уравнения (0.1) $x = \pm at$, $t = 0$ внутри себя; однако при возрастании m и n значения решения в точках вне характеристическрго треугольника уравнения (0.1) убывают со скоростью, не меньшей $n^{-2/3}$, к нулю. Внутри же и на границе характеристического треугольника уравнения (0.1) значения u_{mn} стремятся соответственно к пределам $^1/_2\, a$ и $^1/_6\, a$.

§ 1. *Теорема 1.* Решение уравнения (0.2), удовлетворяющее начальным условиям (0.3), имеет вид:

$$u_{mn} = u_{-mn}$$

$$u_{0,2k} = 2k - 2 \sum_{l=1}^{k} \sum_{r=0}^{2l-2} (-1)^r \frac{(2l-1)^2 \cdots ((2l-1)^2 - r^2)}{(r+1)!\ (r+1)!}\, a^{2r+2}$$

$$u_{m,2k} = 0 \quad \text{при } |m| \geqslant 2k, \qquad u_{m,2k+1} = 0 \quad \text{при } |m| \geqslant 2k+1$$

$$u_{0,2k+1} = 2k + 1 - 2 \sum_{l=1}^{k} \sum_{r=0}^{2l-1} (-1)^r \frac{(2l)^2 \cdots ((2l)^2 - r^2)}{(r+1)!\ (r+1)!}\, a^{2r+2}$$

$$u_{m,2k} = a^{4k-2} - 2 \sum_{l=\left[\frac{|m|}{2}\right]+1}^{k} \ \sum_{r=|m|}^{2l-2} (-1)^r (2l-1)^2 \ldots ((2l-1)^2 - r^2)\, a^{2r+2}\, \Phi(r) \qquad (m \neq 0)$$

$$u_{m,2k+1} = a^{4k} - 2 \sum_{l=\left[\frac{|m|+1}{2}\right]}^{k} \ \sum_{r=|m|}^{2l-k} (-1)^r (2l)^2 \ldots [(2l)^2 - r^2]\, a^{2r+2}\, \Phi(r)$$

где

$$\Phi(r) = \left(\frac{1}{(r+1)!\ (r+1)!} - \frac{1}{(2r+2)!} \sum_{s=0}^{|m|-1} (-1)^s \frac{m^2(m^2-1^2)\cdots(m^2-s^2)(2r+2s+4)!}{(2s+2)!\ (r+s+2)!\ (r+s+2)!}\right)$$

Доказательство. Будем искать решение конечно-разностного аналога волнового уравнения (0.2), удовлетворяющего начальным условиям (0.3), в виде

$$v_n(t) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} u_{mn} \cos mt \tag{1.1}$$

Умножая (0.2) на $\cos mt$, суммируя по m и используя (1.1), получаем для $v_n(t)$ линейное разностное уравнение

$$v_{n+1}(t) = 2\,[1 - a^2(1-\cos t)]\, v_n(t) - v_{n-1}(t) \tag{1.2}$$

Решение (1.2) будем искать в виде $v_n(t) = [\lambda(t)]^n$ при краевых условиях

$$v_0(t) \equiv 0, \quad v_1(t) \equiv 2.$$

Подставляя $v_n(t)$ в (2.1), видим, что $\lambda(t)$ должно удовлетворять уравнению

$$\lambda^2(t) - 2\,[1 - a^2(1-\cos t)]\,\lambda(t) + 1 = 0 \tag{1.3}$$

имеющему корни

$$\lambda_{1,2}(t) = 1 - 2a^2 \sin^2 {}^1\!/_2\, t \pm 2a \sin {}^1\!/_2\, t \sqrt{a^2 \sin^2 {}^1\!/_2 t - 1}$$

Поскольку $0 \leqslant a < 1$ и $\lambda_1 = \overline{\lambda_2}$, $\lambda_1\lambda_2 = 1$, то $\lambda_{1,2}(t) = e^{\pm i\varphi}$. Таким образом, используя краевые условия, получаем

$$C_1 + C_2 = 0, \quad C_1 e^{\varphi i} + C_2 e^{-\varphi i} = 1 \quad \text{или} \quad C_1 = -C_2 = \frac{1}{2i \sin \varphi}$$

То есть

$$v_n(t) = \frac{\sin n\varphi}{\sin \varphi} \qquad \left(\sin \frac{\varphi}{2} = a \sin \frac{t}{2}\right)$$

Но

$$v_n(t) = u_{0n} + 2 \sum_{m=1}^{+\infty} u_{mn} \cos mt \tag{1.4}$$

поэтому искомое решение u_{mn} уравнения (0.2) имеет вид:

$$u_{mn} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} v_n(t) \cos mt\, dt \quad \text{или} \quad u_{mn} = \frac{1}{2} \int_0^{\alpha} \frac{\sin n\varphi}{\sin \varphi} F_m(\varphi)\, d\varphi \tag{1.5}$$

где

$$F_m(\varphi) = \frac{\cos[2mY(\varphi)]}{\sqrt{a^2 - \sin^2 {}^1\!/_2\varphi}} \cos {}^1\!/_2\, \varphi, \quad Y(\varphi) = \arcsin \frac{\sin {}^1\!/_2\, \varphi}{a} \quad (\alpha = 2 \arcsin a) \tag{1.6}$$

На отрезке $0 \leqslant \varphi \leqslant {}^1\!/_2\pi$ функция $F_m(\varphi)$ имеет ограниченное изменение и поэтому

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{{}^1\!/_2\pi} \frac{\sin n\varphi}{\sin \varphi} F_m(\varphi)\, d\varphi = \frac{1}{2} \pi F_m(+0)$$

При $\varphi = \alpha = 2 \arcsin a$ функция $F_m(\varphi)$ имеет слабую особенность порядка ${}^1\!/_2$, т. е. суммируема. Поэтому

$$\lim \int_{{}^1\!/_2\pi}^{\alpha} \sin n\varphi \frac{F_m(\varphi)}{\sin \varphi}\, d\varphi = 0 \qquad \text{при } n \to \infty$$

так как под знаком предела стоит коэффициент Фурье от суммируемой функции. Итак, для $m \neq 1$ при $n \to \infty$ существует $\lim u_{mn} = {}^1\!/_2 F_m(+0) = (2a)^{-1}$. Если $a = 1$, то $\varphi = t$,

$$u_{mn} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\sin nt}{\sin t} \cos mt\, dt \tag{1.6}$$

Используя равенства

$$\frac{\sin 2kt}{\sin t} = 2\sum_{l=1}^{k} \cos(2l-1)t, \qquad \frac{\sin(2k+1)}{\sin t} = 2\sum_{l=1}^{k} \cos 2lt + 1 \tag{1.7}$$

получаем

$$u_{m,2k} = \frac{2}{\pi}\sum_{l=1}^{k}\int_0^{\pi} \cos(2l-1)t\cos mt\,dt$$

откуда

$$u_{m,\,2k} = \begin{cases} 0, & \text{если } |m| \geqslant 2k \text{ или } m \text{ четное} \\ 1, & \text{если } |m| \leqslant 2k-1 \end{cases}$$

$$u_{m,\,2k+1} = \begin{cases} 0, & \text{если } m \text{ нечетное или } |m| \geqslant 2k+1 \\ 1, & \text{если } m \text{ четное и } |m| < 2k+1 \end{cases}$$

Таким образом, $\lim u_{mn}$ при $n \to \infty$ не существует. Но при $n \to \infty$

$$\lim u_{2mn} = \begin{cases} 0, & \text{если } n = 2k, \\ 1, & \text{если } n = 2k+1, \end{cases} \qquad \lim u_{2m+1,\,n} = \begin{cases} 1, & \text{если } n = 2k \\ 0, & \text{если } n = 2k+1 \end{cases}$$

Вычислим u_{mn} при $a < 1$. Используя равенства

$$\cos 2mt = 1 - \sum_{l=0}^{m-1} (-1)^l \frac{4^{l+1} m^2(m^2-1^2)\ldots(m^2-l^2)}{(2l+2)!}\sin^{2l+2}t \tag{1.8}$$

$$\sin^{2k}t = \frac{1}{4^k}\left\{\sum_{l=0}^{k-1} (-1)^{k-l}\cos 2(k-l)t + \binom{2k}{k}\right\} \tag{1.9}$$

получаем

$$u_{0,2k} = \frac{2}{\pi}\int_0^{\alpha}\sum_{l=1}^{k}\cos(2l-1)\varphi\frac{\cos{}^1\!/_2\varphi}{\sqrt{a^2-\sin^2{}^1\!/_2\varphi}}\,d\varphi = \frac{4}{\pi}\int_0^{{}^1\!/_2\pi}\cos[(2l-1)\,2\arcsin(a\sin t)]\,dt =$$

$$= 2k - 2\sum_{l=1}^{k}\sum_{r=0}^{2l-2}(-1)^r\frac{(2l-1)^2\ldots((2l-1)^2-r^2)}{(r+1)!\,(r+1)!}a^{2r+2}$$

При интегрировании использована замена $\sin{}^1\!/_2\varphi = a\sin t$. Аналогично

$$u_{0,2k+1} = \frac{2}{\pi}\int_0^{\alpha}\sum_{l=1}^{k}\cos 2l\varphi\frac{\cos{}^1\!/_2\varphi}{\sqrt{a^2-\sin^2{}^1\!/_2\varphi}}\,d\varphi +$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_0^{\alpha}\frac{\cos{}^1\!/_2\varphi\,d\varphi}{\sqrt{a^2-\sin^2{}^1\!/_2\varphi}} = 2k - 2\sum_{l=1}^{k}\sum_{r=0}^{2l-1}(-1)^r\frac{(2l)^2\ldots(4l^2-r^2)}{(r+1)!\,(r+1)!}a^{2r+2}+1$$

Найдем теперь $u_{m,\,2k}$ и $u_{m,\,2k+1}$. Используя (1.7), (1.8), получим

$$u_{m,\,2k} = \frac{1}{\pi}\int_0^{\alpha}\frac{\sin 2k\varphi}{\sin\varphi}\frac{\cos[2mY(\varphi)]\cos{}^1\!/_2\varphi}{\sqrt{a^2-\sin^2{}^1\!/_2\varphi}}\,d\varphi =$$

$$= \frac{4}{\pi}\int_0^{{}^1\!/_2\pi}\sum_{l=1}^{k}\cos[(2l-1)(2\arcsin(a\sin t))]\cos 2mt\,dt =$$

$$= \frac{4}{\pi}\int_0^{{}^1\!/_2\pi}\Big(k - k\sum_{s=0}^{m-1}(-1)^s 4^{s+1}\frac{m^2(m^2-1^2)(m^2-s^2)}{(2s+2)!}\sin^{2s+2}t -$$

$$-\sum_{l=1}^{k}\sum_{r=0}^{2l-2}(-1)^r 4^{r+1}\frac{(2l-1)^2\ldots[(2l-1)^2-r^2]}{(2r+2)!}a^{2r+2}\sin^{2r+2}t+$$

$$+\sum_{l=1}^{k}\sum_{r=0}^{2l-2}(-1)^r 4^{r+1}\frac{(2l-1)^2\ldots[(2l-1)^2-r^2]}{(2r+2)!}a^{2r+2}\sum_{s=0}^{m-1}(-1)^s 4^{s+1}$$

$$\frac{m^2(m^2-1^2)\ldots m^2-s^2)}{(2s+2)!}\sin^{2(r+s+2)}t)\,dt=$$

$$=2\Big(-\sum_{l=1}^{k}\sum_{r=0}^{2l-2}(-1)^r\frac{(2l-1)^2\ldots((2l-1)^2-r^2)}{(r+1)!\,(r+1)!}a^{2r+2}+ \tag{1.10}$$

$$+\sum_{l=1}^{k}\sum_{r=0}^{2l-2}(-1)^r\frac{(2l-1)^2\ldots((2l-1)^2-r^2)}{(2r+2)!}a^{2r+2}\sum_{s=0}^{m-1}\varphi(r,\ s)$$

где

$$\varphi(r,\ s)=(-1)^r\frac{m^2(m^2-1^2)\ldots(m^2-s^2)(2r+2s+4)!}{(2s+2)!\,(r+s+2)!\,(r+s+2)!}\qquad (m\neq 0)$$

Аналогично при помощи (1.7) и (1.9) получим

$$u_{m,2k+1}=\frac{1}{\pi}\int_0^{\alpha}\frac{\sin(2k+1)(\varphi)}{\sin\varphi}\,\frac{\cos(2mY(\varphi)\cos{}^1/_2\varphi)}{\sqrt{a^2-\sin^2{}^1/_2\varphi}}\,d\varphi=$$

$$=2\Big(-\sum_{l=1}^{k}\sum_{r=0}^{2l-1}(-1)^r\frac{(2l)^2\ldots((2l)^2-r^2)}{(r+1)!\,(r+1)!}a^{2r+2}+$$

$$+\sum_{l=1}^{k}\sum_{r=0}^{2l-1}(-1)^r\frac{(2l)^2\ldots((2l)^2-r^2)}{(2r+2)!}a^{2r+2}\sum_{s=0}^{m}\varphi(r,\ s)\Big) \tag{1.11}$$

Напомним, что $Y(\varphi)$ — согласно (1.6).

Можно несколько упростить полученные выражения (1.9) и (1.10). Непосредственным подсчетом из уравнения (0.2), используя начальные условия (0.3), легко вывести, что $u_{2k,\ 2k+1}=a^{4k}$ при любом a. Подставляя это значение в левую часть (1.10) и собирая члены с a^{4k}, получаем

$$\sum_{s=0}^{2k-1}(-1)^s\frac{(2k)^2\ldots((2k)^2-s^2)}{(2s+2)!\,[(2k+s+1)!]^2}(4k+2s+2s)!=\frac{(4k)!}{(2k)!\,(2k)!}-1$$

Собирая члены с a^{2r+2} при $2r+2<4k$, получаем

$$\sum_{s=0}^{2k-1}(-1)^s\frac{(2k)!\ldots((2k)^2-s^2)(2r+2r+4)!}{(2s+2)!\,[(r+s+2)!]^2}=\frac{(2r+r)!}{(r+1)!\,(r+1)!}$$

Используя $u_{2k-12k}=a^{4k-2}$ из (1.9), получаем

$$\sum_{s=0}^{m-1}(-1)^s\frac{m^2(m^2-1^2)\ldots(m^2-s^2)(2r+2r+4)!}{(2s+2)!\,(r+s+2)!\,(r+s+2)!}=\begin{cases}\dfrac{(2r+2)!}{(r+1)!\,(r+1)!} & \text{при } 0\leqslant r\leqslant m-2\\[2mm] \dfrac{(2m)!}{m!\ m!}-1 & \text{при } r=m-1\end{cases}$$

Окончательно для $u_{m,2k}$, $u_{m,\,2k+1}$ получаем

$$u_{m,2k} = a^{4k-2} - 2 \sum_{l=\left[\frac{|m|}{2}\right]+1}^{k} \sum_{r=|m|}^{2l-2} (-1)^r (2l-1)^2 \ldots ((2l-1)^2 - r^2)\, a^{2r+2} \psi(r)$$

$$u_{m,\,2k+1} = a^{4k} - 2 \sum_{l=\left[\frac{|m|+1}{2}\right]}^{k} \sum_{r=|m|}^{2l-1} (-1)^r (2l)^2 \ldots ((2l)^2 - r^2)\, a^{2r+2} \psi(r)$$

$$\psi(r) = \frac{1}{(r+1)!\,(r+1)!} - \frac{1}{(2r+2)!} \sum_{s=0}^{|m|-1} (-1)^s \frac{m^2(m^2-1^2)\ldots(m^2-s^2)(2r+2s-4)!}{(2s+2)!\,(r+s+2)!\,(r+s+2)!} \qquad (m \neq 0)$$

Очевидно, $u_{mn} = 0$ при $|m| \geqslant |n|$.

2. Рассмотрим асимптотическое поведение конечно-разностного аналога волнового уравнения. Докажем следующую теорему.

Теорема 2. Если u_{mn} есть решение (0.2), удовлетворяющее начальным условиям (0.3), то

$$u_{qn,\,n} = \begin{cases} 0 + O(n^{-2/3}) & \text{при } a<q<1 \\ (6a)^{-1} + O(n^{-2/5}) & \text{при } q=a \\ (2a)^{-1} + O(n^{-2/5}) & \text{при } 0 \leqslant q < a \end{cases} \qquad (2.1)$$

$$u_{mn} = (2a)^{-1} + O(n^{-2/3}) \qquad \text{при } m \text{ фиксированном} \qquad (2.2)$$

Доказательство. Представим выражение

$$u_{qn,\,n} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\alpha} \frac{\sin n\varphi}{\sin\varphi} \frac{\cos[qn\,2\,Y(\varphi)]}{\sqrt{a^2 - \sin^2 {}^1/_2\varphi}} \cos {}^1/_2\varphi\, d\varphi \qquad (2.3)$$

в виде суммы

$$u_{qn,\,n} = J^*_{qn,\,n} + J^{**}_{qn,\,n} \qquad (2.4)$$

$$J^*_{qn,\,n} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\alpha} \frac{\sin[n(\varphi + 2q\,Y(\varphi))]\,[\varphi + 2q\,Y(\varphi)]\cos {}^1/_2\varphi\, d\varphi}{[\varphi + 2q\,Y(\varphi)]\sin\varphi \sqrt{a^2 - \sin^2 {}^1/_2\varphi}} \qquad (2.5)$$

$$J^{**}_{qn,\,n} = \int_0^{\alpha} \frac{1}{2\pi} \frac{\sin[n(\varphi - 2q\,Y(\varphi)]\,[\varphi - 2q\,Y(\varphi)]\cos {}^1/_2\varphi\, d\varphi}{[\varphi - 2q\,Y(\varphi)]\sin\varphi \sqrt{a^2 - \sin^2 {}^1/_2\varphi}} \qquad (2.6)$$

Изучим поведение при $n \to +\infty$ интеграла $J^*_{qn,\,n}$. Сделаем замену переменных:

$$z = \varphi + 2q\,Y(\varphi) = \varphi + 2q \arcsin(a^{-1} \sin {}^1/_2\varphi) \qquad (2.7)$$

Очевидно, $z(\varphi)$ — монотонно возрастающая функция от φ. Теперь

$$J^*_{qnn} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\beta} \frac{\sin nz}{z} \frac{z\,dz}{2\sin {}^1/_2\varphi\,(\sqrt{a^2 - \sin^2 {}^1/_2\varphi} + q\cos\varphi)} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\beta} \frac{\sin nz}{z} \varphi_1(z)\, dz \qquad (2.8)$$

где

$$\varphi_1(z) = [y_1(\varphi) + y_2(\varphi)] \frac{1}{\sqrt{a^2 - \sin^2 {}^1/_2\varphi} + q\cos {}^1/_2\varphi} \qquad (2.9)$$

$$y_1(\varphi) = \frac{\varphi}{2\sin {}^1/_2\varphi}, \qquad y_2(\varphi) = \frac{qY(\varphi)}{\sin {}^1/_2\varphi} = \frac{q \arcsin(a^{-1}\sin {}^1/_2 q)}{\sin {}^1/_2\varphi}, \qquad \beta = 2\arcsin a + q\pi \qquad (2.10)$$

Известно, что функция $y_1(\varphi)$ монотонно возрастает от единицы до $a^{-1}\arcsin a$, когда φ растет от 0 до α. Докажем, что функция $y_2(\varphi)$ монотонно возрастающая. Действительно,

$$y_2'(\varphi)=\frac{q\cos{}^1/_2\varphi}{2\sin^2{}^1/_2\varphi}\left[\frac{\sin{}^1/_2\varphi}{\sqrt{a^2-\sin^2{}^1/_2\varphi}}-\arcsin\left(\frac{\sin{}^1/_2\varphi}{a}\right)\right]$$

где

$$y_3(\varphi)=\frac{\sin{}^1/_2\varphi}{\sqrt{a^2-\sin^2{}^1/_2\varphi}}, \qquad Y(\varphi)=\arcsin\frac{\sin{}^1/_2\varphi}{a}$$

очевидно, $y_3(0)=Y(0)=0$

$$y_3'(\varphi)=\frac{a^2\cos{}^1/_2\varphi}{2(a^2-\sin^1/_2\varphi)^{3/2}}\geqslant Y'(\varphi)=\frac{\cos{}^1/_2\varphi}{2\sqrt{a^2-\sin^2{}^1/_2\varphi}}$$

Поэтому $y_3(\varphi)\geqslant Y(\varphi)$, откуда $y_2'(y)\geqslant 0$, т. е. $y_2(\varphi)$ монотонно возрастает от q/a до $\pi q/2a$, если φ изменяется от нуля до α.

Таким образом, когда φ изменяется от нуля до α (т. е. когда z изменяется от нуля до β), функция $\varphi_1(z)$ монотонно возрастает

$$\text{от } a^{-1} \qquad \text{до } \frac{\beta}{2aq\sqrt{1-q^2}}$$

Теперь можно оценить $J^*_{qn,\,n}$;

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^\beta\frac{\sin nz}{z}\varphi_1(z)\,dz=\frac{1}{2}\left\{\varphi_1(+0)\frac{\pi}{2}-\int_{n\beta}^{+\infty}\frac{\sin t}{t}\varphi_1(+0)\,dt+\int_0^\beta[\varphi_1(z)-\varphi_1(+0)]\frac{\sin nz}{z}\,dz\right\}$$

$$\left|\varphi_1(+0)\int_{n\beta}^{+\infty}\frac{\sin z}{z}\,dz\right|\leqslant\varphi_1(+0)\frac{3\pi}{n\beta}$$

Пусть $\delta>0$ — произвольное пока число (выбор его будет уточнен позже). Применяя вторую теорему о среднем, что возможно ввиду монотонного возрастания $\varphi_1(z)$, получаем

$$\int_0^\beta[\varphi_1(z)-\varphi_1(+0)]\frac{\sin nz}{z}\,dz=\int_0^\delta[\varphi_1(z)-\varphi_1(+0)]\frac{\sin nz}{z}\,dz+$$
$$+\int_\delta^\beta[\varphi_1(z)-\varphi_1(+0)]\frac{\sin nz}{z}\,dz=[\varphi_1(\delta)-\varphi_1(+0)]\int_{\eta_1}^\delta\frac{\sin nz}{z}\,dz+$$
$$+[\varphi_1(\beta)-\varphi_1(+0)]\int_{\eta_2}^\beta\frac{\sin nz}{z}\,dz$$

где η_1 и η_2 — некоторые числа $0<\eta_1<\delta$, $\delta<\eta_2<\beta$. Дальнейшие выкладки дают

$$\left|[\varphi_1(\delta)-\varphi_1(+0)]\int_{\eta_1}^\delta\frac{\sin nz}{z}\,dz\right|\leqslant|\varphi_1(\delta)-\varphi_1(+0)|\,3\pi$$

$$\left|[\varphi_1(\beta)-\varphi_1(+0)]\int_{\eta_2}^\beta\frac{\sin nz}{z}\,dz\right|\leqslant\frac{|\varphi_1(\beta)-\varphi_1(+0)|}{\delta n}3\pi$$

Таким образом,

$$\frac{1}{2\pi}\left|\int_{\eta_1}^\beta\frac{\sin nz}{z}\varphi_1(z)\,dz-\frac{\pi}{2}\varphi_1(+0)\right|\leqslant\frac{1}{2\pi}\left\{\frac{3\pi\varphi_1(+0)}{n\beta}+\right.$$
$$\left.+3\pi\,|\varphi_1(\delta)-\varphi_1(+0)|+|\varphi_1(\beta)-\varphi_1(+0)|\frac{3\pi}{n\delta}\right\}$$

Разлагая $\varphi_1(z)$ по степеням φ, получаем

$$\varphi_1(z) = \frac{\varphi + 2qY(\varphi)}{2\sin{}^1/_2\varphi(\sqrt{a^2-\sin^2{}^1/_2\varphi}+q\cos{}^1/_2\varphi)} =$$

$$= \frac{1}{a} + \varphi^2\left[\frac{q(1-2a^2)}{24a^3(a+q)} + \frac{1}{a}\left(1+\frac{2+aq}{16a(a+q)}\right)\right] + o(\varphi^2)$$

Но в виду (2.7)

$$\varphi = \frac{za}{a+q} + o(z)$$

поэтому

$$\varphi_1(z) = \frac{1}{a} + \frac{a^2z^2}{(a+q)^2}\left[\frac{q(1-2a^2)}{24a^3(a+q)} + \frac{1}{a}\left(1+\frac{2+aq}{16a(a+q)}\right)\right] + o(z^2)$$

Следовательно,

$$|\varphi_1(\delta) - \varphi_1(+0)| \leqslant \frac{a^2}{(a+q)^2}\left[\frac{q(1-2a^2)}{24a^3(a+q)} + \frac{1}{a}\left(1+\frac{2+aq}{16a(a+q)}\right)\right]\delta^2 + o(\delta^2) \leqslant A\delta^2$$

Итак, замечая, что $\varphi_1(+0) = a^{-1}$, получаем

$$\frac{1}{2\pi}\left|\int_0^\beta \frac{\sin nz}{z}\varphi_1(z)\,dz - \frac{\pi}{2a}\right| \leqslant \frac{1}{2a}\left\{\frac{3\pi}{an\beta} + A\delta^2 + \left|\frac{\beta}{2aq\sqrt{1-a^2}} - \frac{1}{a}\right|\frac{3\pi}{n\delta}\right\}$$

Если выбрать теперь $\delta^2 = \dfrac{1}{n\delta}$, т. е. $\delta = n^{-1/3}$, то

$$\frac{1}{2\pi}\left|\int_0^\beta \frac{\sin nz}{z}\varphi_1(z)\,dz - \frac{\pi}{2a}\right| \leqslant \frac{3}{2an\beta} + \frac{3}{2}\left|\varphi_1(n^{-1/3}) - \frac{1}{a}\right| +$$

$$+ \left|\frac{\beta}{2aq\sqrt{1-a^2}} - \frac{1}{a}\right|\frac{3}{2}n^{-2/3} = O(n^{-2/3})$$

Изучим поведение при $n \to +\infty$ интеграла $J^{**}_{qn,\,n}$. Сделаем замену переменных:

$$z = \varphi - 2qY(\varphi) = \varphi - 2q\arcsin a^{-1}\sin{}^1/_2\varphi \tag{2.11}$$

Тогда

$$J^{**}{}_{qn,n} = \frac{1}{2\pi}\int_0^\gamma \frac{\sin nz}{z}\psi_1(z)\,dz$$

где

$$\psi_1(z) = \frac{\varphi - 2qY(\varphi)}{2\sin{}^1/_2\varphi}\,\frac{1}{y_4(\varphi)}$$

$$y_4(\varphi) = \sqrt{a_2 - \sin^2{}^1/_2\varphi} - q\cos{}^1/_2\varphi, \qquad \gamma = 2\arcsin a - q\pi$$

Покажем, что функция $y_4(\varphi)$ убывает от $a-q$ до $-q\sqrt{1-a^2}$, когда φ изменяется от нуля до α. Действительно,

$$y_4'(\varphi) = \frac{1}{2}\sin\frac{\varphi}{2}\left(q - \frac{\cos{}^1/_2\varphi}{\sqrt{a^2-\sin^2{}^1/_2\varphi}}\right) < 0$$

так как $a < 1$, $q \leqslant 1$ и, следовательно,

$$1 - q^2a^2 > (1-q^2)\sin^2{}^1/_2\varphi \quad \text{или} \quad \frac{\cos{}^1/_2\varphi}{\sqrt{a^2-\sin^2{}^1/_2\varphi}} > q$$

Таким образом, $1/y_4(\varphi)$ монотонно возрастает от $1/(a-q)$ до $+\infty$, если φ изменяется от нуля до $\bar\varphi$, и затем от $-\infty$ до $-1/q\sqrt{1-a^2}$, когда φ изменяется от $\bar\varphi$ до α; величина $\bar\varphi$ определяется равенством

$$\cos{}^1/_2\bar\varphi = \frac{\sqrt{a^2-\sin^2{}^1/_2\bar\varphi}}{q}$$

(Заметим, что $z = z(\varphi)$ возрастает на $[0, \bar\varphi]$ и убывает на $[\bar\varphi, \gamma]$.) Вспоминая, что $y_1(\varphi)$ и $y_2(\varphi)$ согласно (2.10) — монотонно возрастающие функции, видим, что $\psi_1(z)$ есть разность двух монотонно возрастающих функций $y_1(\varphi) / y_4(\varphi) - y_2(\varphi) / y_4(\varphi)$, причем для $\varphi = \bar\varphi$, т. е. для $z = z(\bar\varphi)$, функция $\psi_1(z)$ имеет особенность. Выясним порядок этой особенности. Полагая $\varphi = \bar\varphi + \varepsilon$, видим, что

$$\sqrt{a^2 - \sin^2 \frac{\bar\varphi + \varepsilon}{2}} - q \cos \frac{\bar\varphi + \varepsilon}{2} = \frac{\sqrt{(a^2 - q^2)(1 - q^2)}}{2q} \varepsilon + o(\varepsilon) \qquad (2.12)$$

Из (2.11) следует, что

$$z(\bar\varphi + \varepsilon) - z(\bar\varphi) = \varepsilon - 2q \left[\arcsin\left(\frac{1}{a} \sin \frac{\bar\varphi + \varepsilon}{2}\right) - \arcsin\left(\frac{1}{a} \sin \frac{\bar\varphi}{2}\right)\right]$$

Но

$$\arcsin\left(\frac{1}{a} \sin \frac{\bar\varphi + \varepsilon}{2}\right) = \arcsin \frac{\sqrt{a^2 - q^2}}{a\sqrt{1 - q^2}} + \frac{\varepsilon}{2q} + \varepsilon^2 \frac{(1 - q^2)\sqrt{a^2 - q^2}}{8q^3\sqrt{1 - a^2}} + o(\varepsilon^2)$$

Таким образом,

$$z(\bar\varphi + \varepsilon) - z(\bar\varphi) = -\frac{\varepsilon^2 (1 - q^2)\sqrt{a^2 - q^2}}{4q^2\sqrt{1 - a^2}} + o(\varepsilon^2)$$

т. е. из (2.12)

$$\sqrt{a^2 - \sin^2 \frac{\bar\varphi + \varepsilon}{2}} - q \cos \frac{\bar\varphi + \varepsilon}{2} = \sqrt[4]{(a^2 - q^2)(1 - a^2)} \sqrt{|z(\bar\varphi + \varepsilon) - z(\bar\varphi)|} + $$
$$+ o\left(\sqrt{|z(\bar\varphi + \varepsilon) - z(\bar\varphi)|}\right)$$

Итак, для $\varphi = \bar\varphi$, $z = z(\bar\varphi)$ функция $\psi_1(z)$ имеет слабую особенность, порядка не выше $1/2$, т. е. существуют постоянные δ_0 и A_{δ_0} такие, что при

$$|z - \bar z| < \delta < \delta_0, \qquad |\psi_1(z)| \leqslant \frac{A_{\delta_0}}{\sqrt{|z - \bar z|}} \qquad (2.13)$$

Отметим, что из равенства $\sin^2 {}^1/_2 \bar\varphi = (a^2 - q^2) / (1 - q^2)$ следует, что $\bar\varphi$ существует только при $0 \leqslant q \leqslant a$. В случае $1 > q > a$ функция $z(\varphi)$ монотонно убывает при изменении φ от нуля до α и функция $\psi_1(x)$ особенностей не имеет.

Поэтому ввиду возможности представить $\psi_1(z)$ в виде разности двух монотонно возрастающих функций, рассуждениями, аналогичными проведенным для $J^{**}_{qn,n}$, легко показать, что

$$|J^{**}_{qn,n} + 1 / 4a| = O(n^{-2/3})$$

Осталось рассмотреть случай $0 \leqslant q \leqslant a$. Рассмотрим сначала $0 \leqslant q < a$. Изолируя особенности в 0 и в $\bar\varphi$, рассмотрим равенство

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^\gamma \frac{\sin nz}{z} \psi_1(z)\, dz = \frac{1}{2\pi}\left[\int_0^\lambda \frac{\sin nz}{z} \psi_1(z)\, dz + \int_\lambda^{z(\bar\varphi)} \frac{\sin nz}{z} \psi_1(z)\, dz + \right.$$
$$\left. + \int_{z(\bar\varphi)}^\mu \frac{\sin nz}{z} \psi_1(z)\, dz + \int_\mu^\gamma \frac{\sin nz}{z} \psi_1(z)\, dz\right] \qquad (\lambda = z(\bar\varphi) - \delta_1,\ \mu = z(\bar\varphi) + \delta_2) \qquad (2.14)$$

Проведем оценку двух первых интегралов правой части равенства (2.14) (для остальных интегралов оценки проходят аналогично).

$$\int_0^\lambda \frac{\sin nz}{z} \psi_1(z)\, dz = \frac{\pi}{2} \psi_1(+0) - \int_{n\lambda}^{+\infty} \frac{\sin z}{z} \psi_1(+0)\, dz + \int_0^\lambda [\psi_1(z) - \psi_1(+0)] \frac{\sin nz}{z}\, dz$$

Поскольку $\psi_1(z)$ можно представить в виде ризности двух монотонно возрастающих функций, то, применяя вторую теорему о среднем, легко получить оценки:

$$\left|\psi_1(+0)\int\limits_{n\lambda}^{+\infty}\frac{\sin z}{z}\,dz\right| = \frac{3\pi\psi_1(+0)}{n\lambda}$$

$$\left|\int\limits_0^{\lambda}[\psi_1(z)-\psi_1(+0)]\frac{\sin nz}{z}\,dz\right| \leqslant \left|\int\limits_0^{\delta_3}[\psi_1(z)-\psi_1(+0)]\frac{\sin nz}{z}\,dz\right| +$$

$$+\left|\int\limits_{\delta_3}^{\lambda}[\psi_1(z)-\psi_1(+0)]\frac{\sin nz}{z}\,dz\right| \leqslant 3\pi\left|\psi_1(\delta_3)-\psi_1(+0)\right| +$$

$$+\frac{3\pi}{n\delta_3}\,|\psi_1(\lambda)-\psi_1(+0)| \leqslant \frac{B_{\delta_0}}{n\delta_3\sqrt{\delta_1}} + 3\pi\,|\psi_1(\delta_3)-\psi_1(+0)|$$

Из (2.4) следует

$$\left|\int\limits_{\lambda}^{z(\overline{\varphi})}\frac{\sin nz}{z}\psi_1(z)dz\right| \leqslant A_{\delta_0}\sqrt{\delta_1}$$

Поэтому окончательно

$$\left|\int\limits_0^{z(\overline{\varphi})}\frac{\sin nz}{z}\psi(z)\,dz - \frac{\pi}{2}\psi_1(+0)\right| \leqslant \frac{3\pi\psi_1(+0)}{n\lambda} + \frac{B_{\delta_0}}{n\delta_3\sqrt{\delta_1}} +$$
$$+A_{\delta_0}\sqrt{\delta_1} + 3\pi\left|\psi_1(\delta_3)-\psi_1(+0)\right|$$

Из разложения функции $\psi_1(z)$ по степеням z в окрестности 0 следует, что

$$\left|\psi_1(\delta_3)-\psi_1(+0)\right| \leqslant A_4\delta_3^2$$

Поэтому

$$\left|\int\limits_0^{z(\overline{\varphi})}\psi_1(z)\frac{\sin nz}{z}\,dz - \frac{\pi}{2}\psi_1(z)\right| \leqslant \frac{A_2}{n} + \frac{A_2}{n\delta_3\sqrt{\delta_1}} + A_3\sqrt{\delta_1} + A_4\delta_3^2$$

Теперь выберем δ_1 и δ_3 так, чтобы

$$\frac{1}{n\delta_3\sqrt{\delta_1}} = \delta_3^2 = \sqrt{\delta_1}, \qquad \delta_3 = n^{-1/5}, \qquad \delta_3 = n^{-4/5}$$

Тогда

$$\frac{1}{2\pi}\left|\int\limits_0^{z(\overline{\varphi})}\psi_1(z)\frac{\sin nz}{z}\,dz - \frac{\pi}{2}\psi_1(+o)\right| = O(n^{-2/5})$$

Аналогично показывается, что если $\gamma > 0$ или $\gamma < 0$ и если $\delta_1 = n^{-1}$, то

$$\frac{1}{2\pi}\left|\int\limits_{z(\overline{\varphi})}^{\gamma}\psi_1(z)\frac{\sin nz}{z}\,dz\right| \leqslant \frac{1}{2\pi}\left\{\left|\int\limits_{\mu}^{\gamma}\psi_1(z)\frac{\sin nz}{z}\,dz\right.\right. +$$

$$\left.\left.+\left|\int\limits_{z(\overline{\varphi})}^{\mu}\psi_1(z)\frac{\sin nz}{z}\,dz\right|\right\} \leqslant A_{\delta_0}\sqrt{\delta_1} + \frac{B_{\delta_0}}{n\sqrt{\delta_1}\mu} = O(n^{-1/2})$$

В случае $q < a$ имеем $\psi(+0) = a^{-1}$. Предположим теперь $q = a$. В этом случае

$$J^{**}_{an,n} = -\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\gamma_1}^{0}\frac{\sin nz}{z}\psi_2(z)\,dz, \qquad \psi_2(z) = \frac{z(\sqrt{a^2-\sin^2{}^1/_2\varphi}+a\cos{}^1/_2\varphi)}{2\sin^3{}^1/_2\varphi\,(1-a^2)} \tag{2.15}$$

$$\gamma_1 = 2\arcsin a - \pi a$$

Если z изменяется от γ_1 до нуля, то φ убывает от α до $\overline{\varphi}=0$, при этом $\psi_2(z)$ представима в виде суммы двух возрастающих функций. Поэтому к интегралу в правой части выражения (2.15) для $J^{**}_{an,n}$ можно применить вторую теорему о среднем. Оценивая, как и прежде, получим

$$\left| J^{**}_{an,n} - \frac{1}{4}\psi_2(-0) \right| \leqslant \frac{A_1}{n} + \frac{A_2}{n\delta} + A \left| \psi_1(-\delta) - \psi_2(-0) \right|$$

Разлагая $\psi_2(z)$ по φ в окрестности 0, получим ввиду (2.2)

$$\psi_2(z) = -\frac{1}{3a} + \frac{1-a^2}{48a^3}\varphi^2 + o(\varphi^2)$$

Но так как $z = -\frac{\varphi^3(1-a^2)}{24a^2} + o(\varphi^3)$, или $\varphi = -\frac{24a^2}{1-a^2} z^{1/3} + o(z^{1/3})$, то

$$\psi_2(z) = -\frac{1}{3a} + \frac{12a}{1-a^2} z^{2/3} + o(z^{2/3})$$

Отсюда

$$\left| \psi_2(-\delta) - \psi_2(-0) \right| = \frac{12a}{1-a^2}\delta^{2/3} + o(\delta^{2/3}) \leqslant A_3\delta^{2/3}$$

т. е.

$$\left| J^{**}_{an,n} - \frac{1}{4}\psi_2(-0) \right| \leqslant \frac{A_1}{n} + \frac{A_2}{n\delta} + A_3\delta^{2/3}$$

Примем $\frac{1}{n\delta} = \delta^{2/3}$, т. е. $\delta = n^{-3/5}$, тогда

$$\frac{1}{n\delta} = n^{-2/5}, \qquad \left| J_{an,n}{}^{**} - \frac{1}{4}\psi_2(-0) \right| = 0\,(n^{-2/5})$$

Окончательно имеем

$$\begin{aligned}
J^{**}_{an,n} &= \frac{1}{4}a + O(n^{-2/3}) & & \\
J^{**}_{qn,n} &= -(4a)^{-1} + O(n^{-2/3}) & &\text{при } a < q < 1 \\
J^{**}_{qn,n} &= (4a)^{-1} + O(n^{-2/5}) & &\text{при } 0 \leqslant q < a \\
J^{**}_{an,n} &= -(12a)^{-1} + O(n^{-2/5}) & &\text{при } q = a
\end{aligned}$$

Теперь на основании полученных результатов, составляя сумму (2.11), получим (2.1). Докажем соотношение (2.2), где m фиксированно. Для этого рассмотрим

$$u_{mn} = \frac{1}{\pi}\int_0^\alpha \frac{\sin n\varphi}{\varphi} F_m(\varphi)d\varphi, \qquad F_m(\varphi) = \frac{\varphi}{\sin\varphi}\,\frac{\cos[2m \arcsin(a^{-1}\sin{}^1/_2\,\varphi)]\cos{}^1/_2\,\varphi}{\sqrt{a^2 - \sin^2{}^1/_2\,\varphi}}$$

При достаточно малом δ имеем $F_m(\varphi) = \frac{1}{a} - \frac{\delta^2}{8a^3}(1-a)^2 + o(\delta^2)$. Поэтому

$$\left| \frac{1}{\pi}\int_0^\delta \frac{\sin n\varphi}{\varphi} F_m(\varphi)\,d\varphi - \frac{1}{2a} \right| \leqslant A_1\delta^2$$

Переходя к новой переменной $t = \arcsin(a^{-1}\sin{}^1/_2\,\varphi)$, разбивая промежуток интегрирования на участки монотонного изменения $\cos 2mt$, имеем

$$\frac{1}{\pi}\int_\delta^\alpha \frac{\sin n\varphi}{\varphi} F_m(\varphi)\,d\varphi = \frac{2}{\pi}\int_\nu^{{}^1/_2\pi} \frac{\sin n\,[2\arcsin(a\sin t)]\cos 2mt}{\sin[2\arcsin(a\sin t)]}\,dt +$$

$$+ \sum_{k=1}^{m-1} \int_{\pi k/2m}^{\pi(k+1)/2m} \frac{\sin n\,[2\arcsin(a\sin t)]}{\sin[2\arcsin(a\sin t)]}\cos 2mt\,dt \qquad \left(\nu = \arcsin\,(a^{-1}\sin\frac{1}{2}\,\delta)\right)$$

Легко получаем оценку

$$\left| \frac{1}{\pi}\int_\delta^\alpha \frac{\sin n\varphi}{\varphi} F_m(\varphi)\,d\varphi \right| \leqslant \frac{mA_2}{n\delta}$$

Выбирая $\delta = n^{-1/3}$, получим искомое соотношение. Теорема 2 доказана.

Поступила 3 XII 1954