Прикладная математика и механика. Том XIX, 1955
Институт механики Академии наук Союза ССР

О ПОСТРОЕНИИ ПРИБЛИЖЕННОГО РЕШЕНИЯ В ЛИНЕЙНЫХ ЗАДАЧАХ

М. Г. Слободянский

(Москва)

§ 1. Некоторые оценки для несамосопряженных задач. Пусть

$$Au = f, \qquad A^*v = \psi \tag{1.1}$$

где A — оператор с областью определения A_D в гильбертовом пространстве H, а A^* — сопряженный оператор с областью определения A_{D^*}, причем u, f, а также v, ψ — элементы H (по поводу основных определений см. например [1]).

Во многих линейных задачах, самосопряженных и несамосопряженных, определение искомой величины u или некоторого линейного оператора $L(u)$ можно свести к определению скалярного произведения $(f, v) = (u, \psi)$ либо путем введения специальных элементов ψ, либо путем введения специальным образом построенных главных частей функции Грина [2, 3].

Пусть u_n и v_n — приближенные решения первого и второго уравнений (1.1) соответственно:

$$Au_n = f_n, \qquad A^*v_n = \psi_n \tag{1.2}$$

Тогда аналогично работе [3] [см. формулы (1.3) — (1.5)]

$$(u, \psi) = (u_n, \psi) + (u - u_n, \psi_n) + (u - u_n, \psi - \psi_n) \tag{1.3}$$

или, так как

$$(u - u_n, \psi_n) = (u - u_n, A^*v_n) = (A(u - u_n), v_n) = (f - f_n, v_n)$$

то из (1.3) найдем

$$(u, \psi) = b_n + (u - u_n, \psi - \psi_n), \qquad b_n = (u_n, \psi) + (f - f_n, v_n) \tag{1.4}$$

Введем обозначения

$$u - u_n = u', \qquad v - v_n = v'; \qquad f - f_n = \varphi, \qquad \psi - \psi_n = \chi \tag{1.5}$$

Тогда из (1.1) — (1.2) и (1.4) следует

$$(u, \psi) = b_n + (u', \chi) \tag{1.6}$$

$$Au' = \varphi, \qquad A^*v' = \chi, \qquad (u', \chi) = (\varphi, v') \tag{1.7}$$

Таким образом, для определения величины (u, ψ) надо найти приближенное значение скалярного произведения (u', χ) и оценку погрешности. Рассмотрим различные способы определения значения $(u', \chi) = (\varphi, v')$.

1°. Пусть найдено неравенство

$$\| A^{-1} - \mu_0 E \| < \rho \tag{1.8}$$

где μ_0 — точка комплексной плоскости, E — тождественный оператор, ρ — положительное число.

Если все элементы, входящие в (1.1) — (1.2), вещественные, то будем предполагать, что μ_0 лежит на действительной оси.

Вопрос об определении неравенства (1.8), т. е. вопрос об определении μ_0 и ρ, должен быть рассмотрен отдельно. Заметим только, что если положить $\mu_0 = 0$, то

$$\| A^{-1} \| = \| A^{*-1} A^{-1} \|^{1/2} = \| B^{-1} \|^{1/2} \tag{1.9}$$

Здесь B — самосопряженный оператор. Если далее оператор B положительно-определенный, то задача об определении $\|A^{-1}\|$ сводится к задаче об определении нижней грани наименьшего собственного значения λ_1 оператора $B = A^*A$.

Далее если известен «близкий» оператор A_1^{-1} и $\| A_1^{-1} - \mu_0 E\| \leqslant \rho_1$, то

$$\| A^{-1} - \mu_0 E \| < \| A^{-1} - A_1^{-1} \| + \| A_1^{-1} - \mu_0 E \| =$$
$$= \| A^{-1} (A A_1^{-1} - E) \| + \| A_1^{-1} - \mu_0 E \| < \| A^{-1} \| \| A A_1^{-1} - E \| + \rho_1$$

Значение μ_0 следует выбрать так, чтобы ρ_1 было как можно меньше.

Из (1.7), принимая во внимание (1.8), имеем

$$|(u', \chi) - \mu_0 (\varphi, \chi)| = |(A^{-1}\varphi - \mu_0 \varphi, \chi)| < \| A^{-1}\varphi - \mu_0 \varphi \| \| \chi \| < \rho \| \varphi \| \| \chi \| \tag{1.10}$$

Отсюда, используя (1.6), найдем окончательно

$$|(u, \psi) - [b_n + \mu_0 (\varphi, \chi)]| < \rho \| \varphi \| \| \chi \| \tag{1.11}$$

Применим неравенство (1.11) к некоторым частным случаям.

Пусть оператор A — самосопряженный. Пусть собственные значения оператора A лежат вне интервала $m \leqslant \lambda \leqslant M$, где $M > 0$, $m < 0$. Тогда собственные значения оператора A^{-1} лежат в интервале $m^{-1} \leqslant \mu \leqslant M^{-1}$ или, иначе, внутри круга с центром в точке $(1/2\,(M^{-1} + m^{-1}),\ 0)$ и радиуса $1/2\,(M^{-1} - m^{-1})$. Следовательно,

$$\| A^{-1} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{M} + \frac{1}{m}\right) E \| \leqslant \rho = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{M} - \frac{1}{m}\right)$$

и из (1.11) найдем

$$\left|(u, \psi) - \left[b_n + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{M} + \frac{1}{m}\right)(\varphi, \chi)\right]\right| < \frac{1}{2}\left(\frac{1}{M} - \frac{1}{m}\right) \| \varphi \| \| \chi \| \tag{1.12}$$

В частности, если оператор A самосопряженный и положительно-определенный, т. е. $m = -\infty$, то

$$\left|(u, \psi) - \left[b_n + \frac{1}{2M}(\varphi, \chi)\right]\right| < \frac{1}{2M} \| \varphi \| \| \chi \| \tag{1.13}$$

где M — нижняя грань первого собственного значения оператора A. Неравенство (1.13) может быть получено также другим путем [7].

Рассмотрим теперь случай, когда собственные значения самосопряженного оператора A лежат в интервале $m \leqslant \lambda \leqslant M$, где $m > 0$, $M > 0$.

Тогда собственные значения оператора A^{-1} лежат в интервале $M^{-1} \leqslant \leqslant \mu \leqslant m^{-1}$ и в этом случае можно положить $\mu_0 = 1/2\,(M^{-1} + m^{-1})$,

$\rho = {}^1/_2(m^{-1} - M^{-1})$ и, следовательно,

$$\left|(u, \varphi) - \left[b_n + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{M} + \frac{1}{m}\right)(\varphi, \chi)\right]\right| < \frac{1}{2}\left(\frac{1}{m} - \frac{1}{M}\right)\|\varphi\|\|\chi\| \qquad (1.14)$$

2°. Другой способ определения величины (u', χ) заключается в следующем. Если первое уравнение (1.7) имеет решение u' и если φ принадлежит области определения A_{D^*}, то u' есть решение уравнения

$$Bu' = A^*Au' = A^*\varphi = \varphi' \qquad (1.15)$$

Полагая, что оператор B положительно-определенный, для оценки величины (u', χ) можно применить различные оценки для самосопряженного положительно-определенного оператора, полученные в работах [3, 4].

Для этого, наряду с уравнением (1.15), рассмотрим уравнение $Bv' = \chi$. При этом будем считать элементы u' и v', а также φ и χ вещественными.

Пусть имеем неравенство

$$(B_1u', u') < (Bu', u') < (B_2u', u') \qquad (1.16)$$

при любых u, принадлежащих области определения B_D оператора B, и где B_1 и B_2 — самосопряженные положительнно-определенные операторы с областью определения B_D.

На основании оценки (1.20), полученной в работе [4] (см. формулы (1.11) — (1.20) в [4]), имеем

$$|(u', \chi) - \tfrac{1}{2}(B_1^{-1}\varphi' + B_2^{-1}\varphi', \chi)| < \delta \qquad (1.17)$$

$$\delta = \tfrac{1}{2}(\varphi, B_1^{-1}\varphi' - B_2^{-1}\varphi')^{1/2}(\chi, B_1^{-1}\chi - B_2^{-1}\chi)^{1/2} \qquad (1.18)$$

или, если используем более точное неравенство (1.10) работы [4], то получим вместо (1.17) — (1.18)

$$|(u', \chi) - \frac{1}{2}[(B^{-1}\varphi', BB_1^{-1}\chi) + (2B_1^{-1}\varphi' + B_2^{-1}\varphi', \chi)]| < \delta_1 \qquad (1.19)$$

$$\delta_1 = \frac{1}{2}[(BB_1^{-1}\varphi' - 2\varphi', B_1^{-1}\varphi') - (\varphi', B_2^{-1}\varphi')]^{1/2} \times$$
$$\times [(BB_1^{-1}\chi - 2\chi, B_1^{-1}\chi) - (\chi, B_2^{-1}\chi)]^{1/2}$$

Можно показать, что $\delta_1 < \delta$, т. е. последние формулы, дают меньшую оценку погрешности, чем формулы (1.17) — (1.18).

В частности, если

$$\lambda_1(u', u') \leqslant (Bu', u') \leqslant \lambda_2(u', u') \qquad (1.20)$$

где λ_1 и λ_2 — наибольшее и наименьшее собственные значения оператора B, т. е. если

$$(B_1u', u') \leqslant \lambda_1(u', u'), \qquad (B_2u', u') \geqslant \lambda_2(u', u') \qquad (1.21)$$

и, следовательно,

$$(B_1^{-1}\varphi', \varphi') \geqslant \frac{1}{\lambda_1}(\varphi', \varphi'), \qquad (B_2^{-1}\varphi', \varphi') \leqslant \frac{1}{\lambda_2}(\varphi', \varphi')$$

то из (1.17) — (1.18) получим

$$|(u', \chi) - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2}\right)(\varphi', \chi)| < \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_2}\right)\|\varphi'\|\|\chi\|. \qquad (1.22)$$

Оценка (1.22) может быть получена также из (1.12) или (1.14), если вместо φ подставить $\varphi' = A^*\varphi$.

Рассмотрим частный случай, когда оператор A — самосопряженный, но не положительно-определенный, тогда $A^* = A$,

$$B = A^*A = A^2, \qquad \varphi' = A\varphi, \qquad \lambda_1 = \min\{m^2, M^2\}$$

где m и M имеют прежние значения ($m < 0$, $M > 0$). Для определенности положим, что $M < |m|$. Полагая, что оператор A полуограниченный снизу, т. е. $\lambda_2 = \infty$, получим из (1.22)

$$|(u', \chi) - \frac{1}{2M^2}(A\varphi, \chi)| < \frac{1}{2M^2}\|A\varphi\|\|\chi\| \tag{1.23}$$

Существенным отличием оценки (1.23) от оценки (1.13) является то, что в правой части (1.23) входит величина $\|\varphi'\| = \|A^*\varphi\|$, а в правой части (1.13) входит величина $\|\varphi\|$, причем в рассматриваемом случае $\|\varphi\| < M^{-1}\|A\varphi\| = M^{-1}\|\varphi'\|$.

В этом также отличие остальных оценок, полученных в 2°, от оценок, полученных в 1°.

В заключение отметим, что для оценки величины (u', χ) могут быть применены также другие оценки, полученные в [4].

§ 2. О построении приближенных решений u_n, v_n. 1°. Приближенные решения u_n и v_n уравнения (1.1) можно построить различными способами. Положим

$$u_n = \alpha_1\varphi_1 + \ldots + \alpha_n\varphi_n, \qquad v_n = \beta_1\chi_1 + \ldots + \beta_n\chi_n \tag{2.1}$$

где φ_k и χ_k — элементы, принадлежащие A_D и A_{D^*} соответственно (мы считаем в данном случае, что A_D и A_{D^*} — линеалы).

Величины α_k, β_k могут быть найдены каким-либо приближенным методом (методом Ритца в случае самосопряженного положительно-определенного оператора, методом Галеркина, методом наименьших квадратов, методом ортогонализации и т. д.).

Однако для того, чтобы погрешность δ, входящая в (1.11) — (1.24), была наименьшей, следует, очевидно, найти α_k и β_k из условия минимума величины $\delta(\alpha_1, \ldots, \beta_1, \ldots)$. Отсюда получим следующую систему линейных уравнений для определения $\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \beta_1, \ldots, \beta_n$:

$$\frac{\partial\delta}{\partial\alpha_k} = 0, \qquad \frac{\partial\delta}{\partial\beta_k} = 0 \qquad (k = 1, \ldots, n) \tag{2.2}$$

Из оценок (1.11) — (1.14) и на основании (1.5) и (1.7) следует, что для определения u_n, v_n надо применить метод наименьших квадратов [5], т. е. определить минимум выражений $\|Au_n - f\|$ и $\|A^*v_n - \psi\|$.

Из оценки (1.18) следует, что надо определить величины β_k из условия минимума выражения

$$(\chi, (B_1^{-1} - B_2^{-1})\chi) \qquad \left(\psi = \chi - \psi_n = \psi - \sum_{k=1}^{n}\beta_k A^*\chi_k\right) \tag{2.3}$$

Аналогичные условия можно получить, исходя из других оценок, полученных выше.

Таким образом, выбор метода определения постоянных α_k, β_k существенно зависит от выбора вида оценки погрешности.

2°. Как было отмечено в работе [3], при использовании некоторых из полученных там оценок наиболее целесообразно при данном выборе системы координатных функций воспользоваться методом Ритца-Галеркина, при использовании других оценок [7] целесообразно воспользоваться методом наименьших квадратов.

Как будет выяснено ниже, при использовании оценок, полученных в работе [6], целесообразно искать приближенные значения u_n, v_n изложенным ниже способом.

Пусть A — самосопряженный положительно-определенный оператор, определенный на линеале M в некотором гильбертовом пространстве H, причем u, v — элементы M, а f и ψ — заданные элементы из H. Пусть

$$\begin{aligned} Au &= f, & Av &= \psi \\ u_n &= \alpha_1\varphi_1 + \ldots + \alpha_n\varphi_n, & v_n &= \beta_1\varphi_1 + \ldots + \beta_n\varphi_n \\ Au_n &= f_n, & Av_n &= \psi_n \end{aligned} \tag{2.4}$$

где α_k, β_k — постоянные, φ_k — элементы, принадлежащие M.

Обозначим

$$u - u_n = u', \quad v - v_n = v', \quad Au' = f - f_n = \varphi, \quad Av' = \psi - \psi_n = \chi \tag{2.5}$$

В частности, если в разложении для u_n ограничимся s членами, где $(s < n)$, то будем считать, что $\alpha_{s+1} = \ldots = \alpha_n = 0$.

Допустим, что можно построить функционал $H(\sigma'_m + \lambda\tau_m')$ так, что при любом вещественном λ

$$\begin{aligned} &H_{\varphi+\lambda\chi}(\sigma_m' + \lambda\tau_m') \geqslant - F_{\varphi+\lambda\chi}(u' + \lambda v') = \\ &= -(A(u' + \lambda v'), u' + \lambda v') + 2(\varphi + \lambda\chi, u' + \lambda v') \end{aligned} \tag{2.6}$$

где $\{\sigma_m' + \lambda\tau_m'\}$ — совокупность допустимых элементов в вариационной задаче о минимуме функционала H. Тогда на основании [6] имеем

$$|(f, v) - b_{nm}^*| < \delta = \tfrac{1}{2}[H_\varphi(\sigma_m')\, H_\chi(\tau_m')]^{1/2} \tag{2.7}$$

$$b_{nm}^* = (f, v_n) + (\psi - \psi_n, u_n) + \tfrac{1}{2} H(\sigma_m', \tau_m') \tag{2.8}$$

где $H(\sigma_m', \tau_m')$ — коэффициент при λ в первой степени в выражении для $H_{\varphi+\lambda\chi}(\sigma_m' + \lambda\tau_m')$, т. е.

$$H_{\varphi+\lambda\chi}(\sigma_m' + \lambda\tau_m') = H_\varphi(\sigma_m') + 2\lambda H(\sigma_m', \tau_m') + \lambda^2 H_\chi(\tau_m') \tag{2.9}$$

Примечание. Более грубую оценку можно получить при меньшем объеме вычислений, полагая $v_n = 0$, $\psi_n = 0$. В этом случае получим [6]

$$|(f, v) - b_{mn}^*| < \delta = \tfrac{1}{2}[H_\varphi(\sigma_m')\, H_\psi(\tau_m)]^{1/2} \tag{2.10}$$

$$b_{nm}^* = (\psi, u_n) + \tfrac{1}{2} H(\sigma_m', \tau_m) \tag{2.11}$$

где

$$H_{\varphi+\lambda\psi}(\sigma_m' + \lambda\tau_m) = H_\varphi(\sigma_m') + 2\lambda H(\sigma_m', \tau_m) + \lambda^2 H_\psi(\tau_m)$$

Допустим теперь, что элементы $\{\sigma_m'\}$, $\{\tau_m'\}$ могут быть выражены через φ и χ, иначе говоря, допустимые элементы $\{\sigma_m'\}$, $\{\tau_m'\}$ суть линейные функции коэффициентов $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, $\beta_1, \ldots, \beta_n$, входящих в (2.4), и некоторых коэффициентов $\alpha_1', \ldots, \alpha_r'$, $\beta_1', \ldots, \beta_r'$. Тогда для нахождения наилучшего приближения для (f, v) надо, очевидно, найти $\alpha_1, \ldots, \beta_r'$ из условия минимума выражения $\delta(\alpha_1, \ldots, \beta_r')$.

Откуда получим

$$\begin{array}{cccc} \dfrac{\partial\delta}{\partial\alpha_k} = 0, & \dfrac{\partial\delta}{\partial\beta_k} = 0, & \dfrac{\partial\delta}{\partial\alpha_j'} = 0, & \dfrac{\partial\delta}{\partial\beta_j'} = 0 \\ \dfrac{\partial H_\varphi}{\partial\alpha_k} = 0, & \dfrac{\partial H_\varphi}{\partial\alpha_j'} = 0, & \dfrac{\partial H_\chi}{\partial\beta_k} = 0, & \dfrac{\partial H_\chi}{\partial\beta_j'} = 0 \end{array} \quad \begin{pmatrix} k = 1, \ldots, n \\ j = 1, \ldots, r \end{pmatrix} \tag{2.12}$$

Система (2.1) служит для определения значений $\alpha_1, \ldots, \beta_1, \ldots$, т. е. построения приближенных значений u_n, v_n. Функционал $H(\sigma)$, входящий в (2.6) — (2.11), можно построить для многих линейных задач (принцип Кастильяно в теории упругости [8], метод Треффтца для первой граничной задачи теории потенциала [5,9], преобразование Фридрихса [10,11]).

В работах [4,12] рассмотрена задача о построении функционала H для операторов общего вида.

Оказывается весьма целесообразным во многих случаях (см. § 5 настоящей работы) расширение класса допустимых функций при построении функционалов $\boldsymbol{H}$, рассмотренных в [4,12], путем введения обобщенных производных в смысле С. Л. Соболева.

Этому вопросу посвящен § 3, в котором дано обобщение некоторых теорем, доказанных в [4,12].

§ 3. О построении функционала H. 1°. Положим, что линейная задача приводится к нахождению минимума функционала:

$$F_f^A(u) = (Au, u) - 2(f, u) = \int_\Omega F(u)\, d\Omega - 2\int_\Omega f u \, d\Omega \tag{3.1}$$

Здесь $F(u) = F(u, u_1, \ldots, u_m, \ldots, u_{11}, \ldots, u_{1m}, \ldots)$ — квадратичная форма относительно указанных переменных, Ω — область изменения переменных $x_1, \ldots, x_m$,

$$u_k = \frac{\partial u}{\partial x_k}, \ldots, u_{kj} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_k \partial x_j}, \ldots, \qquad \begin{pmatrix} k = 1, \ldots, m \\ j = 1, \ldots, m \end{pmatrix} \tag{3.2}$$

Далее положим, что существует допустимый элемент u^0 сообщающий минимум выражению (3.1). Введем новые переменные:

$$F_{u_k} = \frac{\partial F}{\partial u_k}, \ldots, F_{u_{jk}} = \frac{\partial F}{\partial u_{jk}}, \ldots, \tag{3.3}$$

Тогда

$$F(u) = \Phi(F_u, F_{u_1}, \ldots) \tag{3.4}$$

Положим, что Φ — положительная [1] квадратичная форма от перемен-

[1] Здесь мы ослабляем условие, наложенное на Φ в [4], где предполагалось, что Φ — положительно-определенная форма от указанных переменных.

ных F_u, F_{u1}, ... Обозначим через $F_u{}^\circ$, $F_{u_1}{}^\circ$, ... значения функции (3.3) при $u = u^\circ$.

Так как Φ — положительная форма, то имеем

$$\int_\Omega \Phi(F_u - F_u{}^\circ,\ F_{u_1} - F_{u_1}{}^\circ, \ldots)\, d\Omega \geqslant 0 \tag{3.5}$$

Откуда найдем

$$\int_\Omega \Phi(F_u, F_{u_1}, \ldots)\, d\Omega \geqslant -\int_\Omega \Phi(F_u{}^\circ, F_{u_1}{}^0, \ldots,)\, d\Omega +$$
$$+ \int_\Omega (u^\circ F_u + u_1{}^\circ F_{u1} + \ldots)\, d\Omega \tag{3.6}$$

Принимая во внимание (3.1) и (3.4), найдем (3.7)

$$\int_\Omega \Phi(F_u, F_{u_1}, \ldots)\, d\Omega \geqslant -F_f{}^A(u_0) + \int_\Omega (u^\circ F_u + u_1{}^\circ F_{u_1} + \ldots)\, d\Omega - 2\int_\Omega f u^\circ d\Omega$$

Если функции F_u, F_{u_1}, ... имеют достаточное число производных, то по формуле Эйлера-Остроградского

$$\int_\Omega (u^\circ F_u + u_1{}^\circ F_{u_1} + \ldots)\, d\Omega = \int_\Omega u^\circ [F]_u\, d\Omega + \int_S \psi(u^\circ, F_u, F_{u_1}, \ldots)\, dS \tag{3.8}$$

где $[F]_u$ — дифференциальное выражение Эйлера

$$[F]_u = F_u - \frac{\partial}{\partial x_1} F_{u_1} - \ldots + \frac{\partial^2}{\partial x_1\, \partial x_1} F_{u_{11}} + \ldots = 2f \tag{3.9}$$

$\psi(u^\circ, F_u, F_{u_1}, \ldots)$ — некоторая функция, S — граница области Ω.

Если поверхностный интеграл в (3.8) равен нулю, вследствие граничных условий, наложенных на u°, или вследствие условий, наложенных на F_u, F_{u_1}, ..., то из (3.8) — (3.9) найдем

$$\int_\Omega (u^\circ F_u + u_1{}^\circ F_{u_1} + \ldots)\, d\Omega = \int_\Omega u^\circ [F]_u\, d\Omega = 2\int_\Omega f u^\circ\, d\Omega$$

Положим теперь, что некоторые из F_u, F_{u_1}, ... не обладают обычными производными во всей области Ω, и поступим так же, как С. Л. Соболев [13] при введении им обобщенных производных, а именно положим, что система функций F_u, F_{u_1}, ... такова, что равенство

$$\int_\Omega (u^\circ F_u + u_1{}^\circ F_{u_1} + \ldots)\, d\Omega = 2\int_\Omega u^\circ f\, d\Omega = \int_\Omega u^\circ [F]_u\, d\Omega \tag{3.10}$$

имеет место при любой функции u°, непрерывной вместе с достаточным числом производных по всей области Ω и допустимой в задаче о минимуме функционала (3.1).

Очевидно, что при заданном f можно различным образом построить систему функции F_u, F_{u_1}, ... Из (3.7) при выполнении условия (3.10) найдем искомый функционал $H(\sigma)$:

$$H(\sigma) = \int\limits_{\Omega} \Phi(F_u, F_{u_1}, \ldots)\, d\Omega \geqslant - F_f^A(u^\circ) \tag{3.11}$$

где через $\{\sigma\}$ обозначена совокупность функции F_u, $F_{u_1}, \ldots$.

Построение функций F_u, $F_{u_1}, \ldots$, удовлетворяющих (3.10) в указанном выше смысле, мы рассмотрим ниже для конкретных задач.

Примечание 1. Во многих задачах для построения функции F_u, $F_{u_1}, \ldots$ может оказаться полезным перейти от декартовых коордпат к другим координатам (полярным, сферическим и т. д.)

2°. Пусть, как и выше, A — самосопряженный положительно-определенный оператор на линеале M, u_0 — элемент, сообщающий минимальное значение функционалу

$$F_f^A(u_0) = (Au_0, u_0) - 2(f, u_0) \tag{3.12}$$

Пусть оператор A представим в виде

$$A = B_1C_1 + \ldots + B_m C_m$$

и (3.12) можно преобразовать к виду

$$F_f^A(u_0) = \sum_{i=1}^{m} (C_i u_0, B_i^* u_0) - 2(f, u_0) \tag{3.13}$$

так, что при любых $u_i - u_0 \in D_i$

$$\sum_{i=1}^{m} (C_i(u_i - u_0), B_i^*(u_i - u_0)) \geqslant 0 \tag{3.14}$$

где D_i включает в себя линеал M. Тогда (3.15)

$$\sum_{i=1}^{m} (C_i u_i, B_i^* u_i) \geqslant - \sum_{i=1}^{m} (C_i u_0, B_i^* u_0) + \sum_{i=1}^{m} [(C_i u_0, B_i^* u_i) + (C_i u_i, B_i^* u_0)]$$

Прибавляя к правой части (3.15) и вычитая из нее величину $2(f; u_0)$, получим, принимая во внимание (3.13): (3.16)

$$\sum_{i=1}^{m} (C_i u_i, B^*_i u_i) \geqslant - F_f^A(u_0) + \sum_{i=1}^{m} [(C_i u_0, B_i^* u_i) + (C_i u_i, B_i^* u_0)] - 2(f, u_0)$$

Выберем теперь элементы u_i так, чтобы при любом $u_0 \in M$ имело место равенство

$$\sum_{i=1}^{m} [(C_i u_0, B_i^* u_i) + (C_i u_i, B_i^* u_0)] = 2(f, u_0) \tag{3.17}$$

аналогичное соотношению (3.10).

Тогда из (3.16) найдем искомый функционал $H(\sigma)$:

$$H(\sigma) = \sum_{i=1}^{m} (C_i u_i, B_i^* u_i) \geqslant -F_f{}^A(u_0) \tag{3.18}$$

Здесь через $\{\sigma\}$ обозначена совокупность элементом $\{u_i\}$ удовлетворяющих (3.17) при любом $u_0 \in M$.

Примечание 2. В частности, если B_i — тождественный оператор, C_i — самосопряженные положительные операторы и $A = B_1C_1 + \ldots + B_m C_m$, найдем выражение для функционала H, полученное в [12]:

$$H(\sigma) = \sum_{i=1}^{m} (C_i u_i, u_i) \geqslant -F_f{}^A(u_0) \tag{3.19}$$

при дополнительном условии, вытекающем из (3.17):

$$\sum_{i=1}^{m} (C_i u_i - f, u_0) = 0 \tag{3.20}$$

Если положим, в частности, $u_i = 0$, $i \neq s$, получим из (3.19)—(3.20)

$$H(\sigma) = (A_s u_s, u_s), \qquad A_s u_s = f \tag{3.21}$$

Полагая, что A_s—самосопряженный положительно-определенный оператор, имеем из (3.21)

$$u_s = A_s^{-1} f, \quad H(\sigma) = (f, A_s^{-1} f) \tag{3.22}$$

Принимая во внимание (2.4)—(2.5), найдем, что функционалы $H_\varphi(\sigma_m')$ и $H_\chi(\tau_m')$, входящие в (2.7) в рассматриваемом случае, будут

$$H_\varphi(\sigma_m') = \left(f - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k A\varphi_k, A_s^{-1}\left[f - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k A\varphi_k\right]\right) \tag{3.23}$$

$$H_\chi(\tau_m') = \left(\psi - \sum_{k=1}^{n} \beta_k A\varphi_k, A_s^{-1}\left[\psi - \sum_{k=1}^{n} \beta_k A\varphi_k\right]\right)$$

Подставляя (3.23) в (2.7) и (2.12), найдем уравнения для определения коэффициентов α_k, β_k: (3.24)

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_k (A_s^{-1} A\varphi_k, A\varphi_i) = (A_s^{-1} f, A\varphi_i) = c_i \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

Аналогичные уравнения получим для определения β_k, если в (3.24) заменим f на ψ и α_k на β_k. Из (3.23) далее следует (3.25)

$$H_\varphi(\sigma_m') = (A_s^{-1} f, f) - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i c_i, \qquad H_\chi(\tau_m') = (A_s^{-1}\psi, \psi) - \sum_{i=1}^{n} \beta_i c_i'$$

где c_i — правые части уравнения (3.24), c_i' — правые части аналогичных уравнений, служащих для определения β_k.

Примечание 3. Если, в частности, в (3.18) положим $B_i^* = C_i$, то из (3.17)—(3.18) получим

$$H(\sigma) = \sum_{i=1}^{m} \| C_i u_i \|^2 = \sum_{i=1}^{m} \| u' \|^2 \geqslant -F_f{}^A(u_0) \tag{3.26}$$

при условии, что для любого $u_0 \in M$ имеет место равенство

$$\sum_{i=1}^{m} (C_i u_0, C_i u_i) = \sum_{i=1}^{m} (C_i u_0, u_i') = (u_0, f) \tag{3.27}$$

Если еще положим, что

$$\sum_{i=1}^{m} (C_i u_0, u_i') = \sum_{i=1}^{m} (u_0, C_i^* u_i')$$

то из (3.27) найдем

$$\sum_{i=1}^{m} (C_i^* u_i' - f, u_0) = 0$$

§ 4. Краевая задача для обыкновенного дифференциального уравнения. 1°. Пусть имеем краевую задачу

$$Au = \sum_{i=0}^{\nu} A_i u = f(x), \qquad \left(A_i u = (-1)^i \frac{d^i}{dx^i}\left(p_i \frac{d^i u}{dx^i}\right)\right) \tag{4.1}$$

$$u(a) = \ldots = u^{(\nu-1)}(a) = 0, \qquad u(b) = \ldots = u^{(\nu-1)}(b) = 0 \tag{4.2}$$

При этом полагаем, что $p_\nu > 0$, $p_i \geqslant 0$ при $a \leqslant x \leqslant b$. Пусть u_n и v_n определяются по формулам (2.4):

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \varphi_k, \qquad v_n = \sum_{k=1}^{n} \beta_k \varphi_k \tag{4.3}$$

где φ_k — функции, удолетворяющие краевым условиям (4.2). Функционалы $H_\varphi(\sigma_m')$ и $H_\chi(\tau_m')$, входящие в (2.7), можно в данном случае взять либо в виде (3.19), либо, в частности, в виде (3.21), если ввести скалярное произведение по формуле

$$(u, v) = \int_a^b uv\, dx \tag{4.4}$$

Заметим, что оператор A_i — положительный на линеале функций $u_i(x)$, удовлетворяющих условиям

$$u_i(a) = \ldots = u_i^{(i-1)}(a) = 0, \qquad u_i(b) = \ldots = u_i^{(i-1)}(b) = 0 \tag{4.5}$$

ибо на указанном линеале функции имеем

$$(A_i u_i, u_i) = \int_a^b [A_i u_i] u_i dx = \int_a^b p_i(x) \left(\frac{d^i u_i}{dx^i}\right)^2 dx > 0$$

Если еще положим, что $p_s > 0$ при $a \leqslant x \leqslant b$, то оператор A_s положительно-определенный и на основании (3.21) — (3.22) получим

$$H_\varphi(\sigma_m') = (A_s u_s, u_s) = \int_a^b p_s(x) \left(\frac{d^s u_s}{dx^s}\right)^2 dx \tag{4.6}$$

$$A_s u_s = (-1)^s \frac{d^s}{dx^s}\left[p_s(x) \frac{d^s u_s}{dx^s}\right] = \varphi(x) = f(x) - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k A[\varphi_k(x)] \tag{4.7}$$

и аналогичные формулы для $H_\chi(\tau_m')$. Далее имеем из (4.7)

$$u_s = A_s^{-1}\varphi = \int_a^b G_s(x, y)\left\{f(y) - \sum_{k=1}^n \alpha_k A\left[\varphi_k(y)\right]\right\} dy \tag{4.8}$$

где $G_s(x, y)$ — функция Грина оператора A_s при граничных условиях (4.5), если вместо i подставить s.

Из (3.24) и (3.25) найдем в рассматриваемом случае

$$\sum_{k=1}^n \alpha_k a_{ik} = c_i, \qquad H_\varphi(\sigma_m') = d - \sum_{i=1}^n \alpha_i c_i \qquad (i = 1, \ldots, n) \tag{4.9}$$

где

$$a_{ik} = \int_a^b\int_a^b G_s(x, y)\, A\left[\varphi_k(x)\right] A\left[\varphi_i(y)\right] dx\, dy, \tag{4.10}$$

$$c_i = \int_a^b\int_a^b G_s(x, y)\, A\left[\varphi_i(x)\right] f(y)\, dx\, dy, \qquad d = \int_a^b\int_a^b G_s(x, y)\, f(x)\, f(y)\, dx\, dy$$

Аналогичные выражения получим для $H_\chi(\tau_m')$, если в (4.9)—(4.10) вместо f подставим ψ и β_k вместо α_k.

Примечание. Если положим в (4.6)—(4.10) $s = 0$, т. е. возьмем оператор $A_0 u_0 = p_0 u_0$, то уравнения для определения искомых α_k будут совпадать с уравнениями, которые доставляет метод наименьших квадратов с весом $[p_0(x)]^{-1}$.

2°. Функционалы $H_\varphi(\sigma_m')$ и $H_\chi(\tau_m')$ могут быть построены также при помощи (3.10), (3.11) или при помощи (3.17), (3.18), если операторы A_i представить в виде

$$A_i = B_i C_i, \qquad B_i = \frac{\partial^i}{\partial x^i}, \qquad C_i = p_i \frac{\partial^i}{\partial x^i}$$

Имеем [4]

$$H_\varphi(\sigma_m') = \int_a^b \sum_{i=0}^{\nu} p_i' F_{u^{(i)}}^2\, dx, \qquad p_i' = \frac{1}{p_i} \tag{4.11}$$

$$\sum_{i=0}^{\nu} (-1)^i \frac{d^i}{dx^i} F_{u^{(i)}} = \varphi = f - \sum_{k=1}^n \alpha_k A\varphi_k \tag{4.12}$$

где на функции $F_u, F_{u^{(1)}}, \ldots, F_{u^{(\nu)}}$ не наложено никаких граничных условий.

Аналогичные выражения получим для $H_\chi(\tau_m')$, если подставить в (4.11) ψ вместо f и β_k вместо α_k. В частности, если $p_s > 0$, то можно положить в (4.11) $F_{u^{(i)}} = 0$ при $i \neq s$. Получим из (4.11)

$$H_\varphi(\sigma_m') = \int_a^b \frac{1}{p_s} F_{u^{(s)}}^2\, dx, \qquad (-1)^s \frac{d^s}{dx^s} F_{u^{(s)}} = \varphi = f - \sum_{k=1}^n \alpha_k A\varphi_k \tag{4.13}$$

Из второго равенства (4.13) далее найдем

$$F_{u^{(s)}}=\int_a^x\Big[f-\sum_{k=1}^n \alpha_k A\varphi_k\Big]dx+\alpha_1'+\alpha_2'x+\ldots+\alpha_s'x^{s-1} \qquad (4.14)$$

где $\alpha_1', \ldots, \alpha_s'$ — постоянные. При использовании (4.11)—(4.12) вместо (4.13) надо к частному решению (4.14) уравнения (4.13) добавить функции $F_u, \ldots, F_{u^{(s)}}$, удовлетворяющие однородному уравнению (4.12).

Далеее из (2.10) и (2.12) найдем уравнения для определения α_k, входящих в (4.13):

$$-\int_a^b\Big\{\frac{1}{p_s}F_{u^{(s)}}\int_a^x A\,[\varphi_k(y)]\,dy\Big\}\,dx=0, \qquad \int_a^b\frac{x^j}{p_s}F_{u^{(s)}}\,dx=0 \quad (j=0,1,\ldots,s-1) \qquad (4.15)$$

где $F_{u^{(s)}}$ определяется по (4.14).

Аналогичные уравнения найдем для определения β_k.

Примечание. Очевидно можно положить $\alpha_1'=\ldots=\alpha_{s-1}'=0$ и ограничиться первой системой уравнений (4.15), однако более точное решение получим, если возьмем $F_{u^{(s)}}$ в форме (4.15).

Далее отметим, что для вычисления $H_\varphi(\sigma_m')$ по формуле (4.13) удобно пользоваться следующим приемом. Обозначим свободные члены в уравнениях (4.15) через $b_1, b_2, \ldots, b_1', b_2', \ldots$ Далее обозначим через d значение правой части первого равенства (4.13) при $\alpha_1=\alpha_2=\ldots=\alpha_1'=\alpha_2'=\ldots=0$. Тогда

$$H_\varphi(\sigma_m')=d-(\alpha_1 b_1+\alpha_2 b_2+\ldots+\alpha_1' b_1'+\ldots) \qquad (4.16)$$

Последней формулой будем пользоваться ниже при решении конкретных задач.

3°. Рассмотрим численный пример. Пусть имеем краевую задачу

$$Au=-\frac{d}{dx}\frac{du}{dx}+u=f(x)=1, \qquad u(-0.5)=u(0.5)=0 \qquad (4.17)$$

Введя функцию Грина $G(x,\xi)=g_0(x,\xi)+v(x,\xi)$, где g_0 — главная часть функции Грина, получим

$$u(x)=\int_{-0.5}^{+0.5}f(\xi)\,g_0(x,\xi)\,d\xi+\int_{-0.5}^{+0.5}f(\xi)\,v(x,\xi)\,d\xi \qquad (4.18)$$

В качестве функции $g_0(x,\xi)$ возьмем функцию Грина оператора $L_1u=-d^2u/dx^2$ при краевых условиях (4.17), т. е.

$$g_0(x,\xi)=\begin{cases}(0.5+x)(0.5-\xi) & \text{при} \quad -0.5\leqslant x\leqslant\xi\\ (0.5-x)(0.5+\xi) & \text{при} \quad \xi<x\leqslant 0.5\end{cases} \qquad (4.19)$$

Из (4.19) и свойств функции Грина $G(x,\xi)$ найдем (4.20)

$$Av(x,\xi)=-\frac{d^2}{dx^2}v(x,\xi)+v(x,\xi)=\psi_1=\begin{cases}(0.5+x)(0.5-\xi) & \text{при} \quad -0.5\leqslant x\leqslant\xi\\ (0.5-x)(0.5+\xi) & \text{при} \quad \xi<x\leqslant 0.5\end{cases}$$

$$v(-0.5,\xi)=v(0.5,\xi)=0$$

Для оценки величины $u(x)$ надо теперь найти оценку для скалярного произведения

$$(f,v)=\int_{-0.5}^{+0.5}f(\xi)\,v(x,\xi)\,d\xi \qquad (4.21)$$

Для этого, наряду с краевой задачей (4.17), рассмотрим краевую задачу (4.20) и воспользуемся формулами (2.7)—(2.8). Положим

$$u(x) = (0.5^2 - x^2)(\alpha_1 + \alpha_2 x^2 + \ldots), \qquad v(x, \xi) = (0.5^2 - x^2)(\beta_1 + \beta_2 x^2 + \ldots) \tag{4.22}$$

где правые части (4.22) удовлетворяют граничным условиям (4.17) и (4.20), и ограничимся в каждом разложении (4.22) первым членом, т. е. положим

$$u_1(x) = \alpha_1\varphi_1, \qquad v_1(x, \xi) = \beta_1\varphi_1, \qquad \varphi_1 = 0.5^2 - x^2 \tag{4.23}$$

Положим $\xi = 0$, т. е. будем искать значение $u(0)$.

Полагая в (4.14) $s = 1$ (т. е. $A_s = -d^2/dx^2$, $p = 1$), найдем

$$F_{u^{(1)}} = \int_0^x \{f(y) - \alpha_1 A[\varphi_1(y)]\}\, dy = x - \alpha_1 (2.25 - \tfrac{1}{3}x^2)\, x \tag{4.24}$$

$$F_{u^{(2)}}' = \int_0^x \{\psi_1(y) - \beta_1 A[\varphi_1(y)]\}\, dy = -\beta_1 (2.25 - \tfrac{1}{3}x^2)\, x + \begin{cases} \frac{1}{4}\, x(1-x) & (-0.5 \leqslant x \leqslant 0) \\ \frac{1}{4}\, x(1+x) & (0 < x \leqslant 0.5) \end{cases}$$

$$A[\varphi_1(x)] = 2.25 - x^2$$

Подставляя (4.24) в (4.15), найдем

$$\frac{2033}{5040}\alpha_1 = \frac{11}{60}, \qquad \frac{2033}{5040}\beta_1 = \frac{661}{23040}, \qquad \alpha_1 = \frac{924}{2033}, \qquad \beta_1 = \frac{4627}{65056} \tag{4.25}$$

Из (4.13) далее найдем

$$H_\varphi(\sigma_m') = \frac{1}{121980}, \qquad H_\chi(\tau_m') = \frac{1}{1440}\,\frac{64241}{1040896} \tag{4.26}$$

Подставляя (4.26) в (2.7)—(2.8), найдем, принимая во внимание (4.18)—(4.19):

$$|u(0.5) - 0.113173| < \delta = \tfrac{1}{2}\sqrt{H_\varphi(\sigma_m')}\,\sqrt{H_\chi(\tau_m')} = 0.000009 \tag{4.27}$$

Погрешность δ составляет таким образом около 0.01% от точного значения $u(0) = 0.113181$.

Погрешность решения указанной краевой задачи, найденное в [4], где постоянные α_1 и β_1 были определены методом Галеркина, составляет около 1% ($\delta = 0.001153$).

Рассмотрим теперь решение этой же краевой задачи без введения главной части функции Грина.

Для этого, наряду с краевой задачей (4.17), рассмотрим краевую задачу

$$Av = -\frac{d^2v}{dx^2} + v = \psi, \qquad v(-0.5) = v(0.5) = 0 \tag{4.28}$$

$$\psi = 0 \quad \text{при} \quad -0.5 \leqslant x \leqslant \xi - \varepsilon \quad \text{и} \quad \xi + \varepsilon \leqslant x \leqslant 0.5$$

$$\lim \int_{\xi-\varepsilon}^{\xi+\varepsilon} \psi(x)\, dx = 1 \quad \text{при} \quad \varepsilon \to 0$$

Введем скалярное произведение

$$(u, v) = \int_{-0.5}^{0.5} uv\, dx \tag{4.29}$$

В рассматриваемом случае функция $v(x, \xi)$ является функцией Грина краевой задачи (4.17). Положим в (4.14)

$$F_{u^{(1)}}' = \int_0^x \psi\, dx + \alpha_1' = \psi_1 + \alpha_1', \qquad \psi_1(x, \xi) = \begin{cases} 0 & \text{при } -0.5 < x < \xi \\ 1 & \text{при } \quad \xi < x \leqslant 0.5 \end{cases}$$

Из (4.15) получим

$$\int_{-0.5}^{0.5} F_{u^{(2)}}\, dx = -\int_{-0.5}^{0.5} (\psi_1 + \alpha_1')\, dx = 0$$

Откуда найдем $\alpha_1' = 0.5 - \xi$ и из (4.13) получим $H_\chi(\tau_m') = 0.5^2 - \xi^2$.
Из (2.7)—(2.8), принимая во внимание (4.29) и первую формулу (4.20), найдем

$$\begin{gathered} | u(0.5) - b_{nm}^*| < \delta = \frac{1}{2} \sqrt{0.25 - \xi^2} \sqrt{\frac{1}{121980}} = 0.000716 \sqrt{1 - 4\xi^2} \\ b_{nm}^* = \frac{1}{4066} \{461 \tfrac{1}{16} - 1825\, \xi^2 + 77\, \xi^4\} \end{gathered} \qquad (4.30)$$

При $\xi = 0$ получим из (4.30)

$$| u(0.5) - 0.113395 | < \delta = 0.000716$$

Найденное приближенное значение $u(0.5)$ отличается от точного значения ($u(0.5) = 0.113181$) на величину, меньшую 0.7%.

§ 5. Изгиб защемленной пластины. Пусть w — прогиб пластины, защемленной по контуру l под действием нормальной нагрузки p.

Тогда, как известно,

$$\nabla^4 w = \frac{p}{B}, \qquad w = \frac{\partial w}{\partial \nu} = 0 \qquad \text{на } l \qquad (5.1)$$

где B — жесткость пластины, l — контур, ограничивающий область пластины S.

Построим сперва для краевой задачи (5.1) функционал H.

Как известно, краевая задача (5.1) эквивалентна задаче об определении минимума функционала

$$F_f{}^A(w) = \iint_S \left\{ \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 \right\} dx\, dy - 2 \iint_S \frac{p}{B} w\, dx\, dy \quad (5.2)$$

Здесь

$$f = \frac{p}{B}, \qquad Aw = \nabla^4 w, \qquad (Aw, w) = \iint_S (\nabla^4 w)\, w\, dx\, dy$$

В соответствии с (3.3)—(3.11) введем новые переменные

$$G_1 = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \qquad G_2 = \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \qquad H_1 = \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$$

Тогда квадратичная форма (5.3) положительная

$$\Phi(G_1, G_2, H_1) = G_1^2 + G_2^2 + 2H_1^2 \qquad (5.3)$$

и на основании (3.10)—(3.11) получим

$$H(\sigma) = \iint_S (G_1^2 + G_2^2 + 2H_1^2)\, dx\, dy = -F_f{}^A(w) \qquad (5.4)$$

при условии (3.10), которое в данном случае имеет вид:

$$\iint_S \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} G_1 + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} G_2 + 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} H_1 \right) dx dy = \iint_S w \frac{p}{B} dx\, dy \qquad (5.5)$$

Здесь функции G_1, G_2, H_1 должны быть подобраны так, чтобы имело место равенство (5.5) при любой функции w (имеющей производные до второго порядка включительно). Если функции G_1, G_2, H_1 имеют ограниченные производные до второго порядка включительно в области S, то, принимая во внимание, что $w|_l = \partial w / \partial \nu|_l = 0$, левую часть (5.5) можно преобразовать к виду

$$\iint_S \left\{\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} G_1 + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} G_2 + 2\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} H_1\right\} dx\, dy = \iint_S w\left(\frac{\partial^2 G_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 G_2}{\partial y^2} + 2\frac{\partial^2 H_1}{\partial x \partial y}\right) dx\, dy$$

Откуда в силу (5.5) найдем

$$\frac{\partial^2 G_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 G_2}{\partial y^2} + 2\frac{\partial^2 H_1}{\partial x \partial y} = \frac{p}{B} \tag{5.6}$$

Полагая, в частности,

$$G_1 = \frac{\partial^2 w^*}{\partial y^2}, \qquad G_2 = \frac{\partial^2 w^*}{\partial x^2}, \qquad H_2 = -\frac{\partial^2 w^*}{\partial x \partial y} \tag{5.7}$$

найдем, что w^* удовлетворяет уравнению

$$\nabla^4 w^* = \frac{p}{B}$$

Положим теперь, что функции G_1, G_2, H_1 не обладают во всей области обычными производными, однако условие (5.5) выполняется при любой функции w. Положим, например, $H_1 = H_0 + H''$, причем допустим, что функции G_1, G_2, H'' удовлетворяют однородному уравнению (5.6), а функция H_0 удовлетворяет уравнению (5.8), вытекающему из (5.5):

$$\iint_S 2\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} H_0\, dx\, dy = \iint_S w \frac{p}{B}\, dx\, dy \tag{5.8}$$

Если функция H_0 удовлетворяет (5.8) при любой функции w, удовлетворяющей граничным условиям (5.1), то p/B является обобщенной производной от функции в смысле С. Л. Соболева [13].

2°. В качестве примера рассмотрим задачу об изгибе защемленной квадратной пластины со стороной $a = 2$, находящейся под действием нормальной равномерно распределенной нагрузки p:

$$\nabla^4 w = \frac{p}{B}, \qquad w\Big|_{\substack{x=\pm1\\ y=\pm1}} = 0, \qquad \frac{\partial w}{\partial x}\Big|_{x=\pm1} = \frac{\partial w}{\partial y}\Big|_{y=\pm1} = 0 \tag{5.9}$$

Найдем прогиб w в центре пластины, т. е. w (0.0).

Для этого, наряду с краевой задачей (5.9), рассмотрим краевую задачу

$$\nabla^4 w' = \frac{p'}{B}, \qquad w'\Big|_{\substack{x=\pm1\\ y=\pm1}} = 0, \qquad \frac{\partial w'}{\partial x}\Big|_{x=\pm1} = \frac{\partial w'}{\partial y}\Big|_{y=\pm1} = 0 \tag{5.10}$$

где p' — нормальная нагрузка, состоящая из сосредоточенной в центре пластины единичной силы ($p' = 0$ при $x \neq 0$, $y \neq 0$). Тогда, очевидно,

$$w(0,0) = \iint_S p'(x, y)\, w(x, y)\, dx\, dy \tag{5.11}$$

Положим теперь

$$\begin{aligned} w(x, y) &= (x^2 - 1)^2 (y^2 - 1)^2 [\alpha_1 + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 y^2 + \ldots] \\ w'(x, y) &= (x^2 - 1)^2 (y^2 - 1)^2 [\beta_1 + \beta_2 x^2 + \beta_3 y^2 + \ldots] \end{aligned} \tag{5.12}$$

где правые части (5.12) удовлетворяют граничным условиям (5.9), и ограничимся первыми тремя коэффициентами, полагая в силу симметрии $\alpha_2 = \alpha_3$, $\beta_2 = \beta_3$.

Полагая далее в (5.4) $G_1 = G_2 = H'' = 0$, получим на основании (5.3)—(5.8)

$$
\begin{gathered}
H(\sigma_m') = 2\iint\limits_S H_0^2 dx\, dy, \qquad H(\tau_m') = 2\iint\limits_S H_0'^2 dx\, dy \\
\iint\limits_S \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} H_0' dx\, dy = \iint\limits_S w \left(\frac{p'}{B} - \nabla^4 w_1' \right) dx\, dy \\
2\frac{\partial^2 H_0}{\partial x \partial y} = \frac{p}{B} - \nabla^4 w_1
\end{gathered}
\tag{5.13}
$$

где

$$
\begin{aligned}
w_1 &= (x^2-1)^2 (y^2-1)^2 [\alpha_1 + \alpha_2 (x^2+y^2)] \\
w_1' &= (x^2-1)^2 (y^2-1)^2 [\beta_1 + \beta_2 (x^2+y^2)]
\end{aligned}
\tag{5.14}
$$

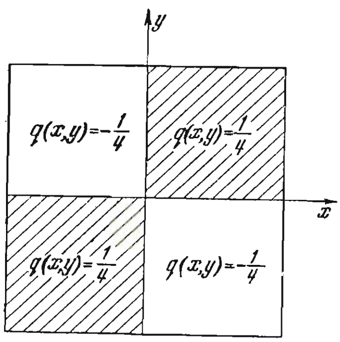
Из (5.13)—(5.14) найдем

$$
\begin{aligned}
H_1 &= \frac{1}{2} \int\limits_0^y \int\limits_0^x \left(\frac{p}{B} - \nabla^4 w_1 \right) dx\, dy \\
H_1' &= \frac{1}{2} \left\{ q(x, y) - \int\limits_0^y \int\limits_0^x \nabla^4 w_1\, dx dy \right\}
\end{aligned}
\tag{5.15}
$$

Здесь $q(x, y)$ — функция удовлетворяющая уравнению, вытекающему из (5.13):

$$
\iint\limits_S \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} q(x, y)\, dx dy = \iint\limits_S w \frac{p'}{B} dx dy
$$

$$
q(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{4} & \text{при } 0 < xy \leqslant 1 \\ -\frac{1}{4} & \text{при } -1 \leqslant xy < 0 \end{cases}
\tag{5.16}
$$



Фиг. 1

График функции $q(x, y)$ приведен на фиг. 1.

Нетрудно проверить, что функция $q(x, y)$ удовлетворяет уравнению (5.15), для чего достаточно разложить интеграл в левой части (5.15) на четыре интеграла по отдельным квадратам и воспользоваться формулой интегрирования по частям [1].

Из (5.12) — (5.15) на основании (2.12) получим следующие уравнения для определения коэффициентов α_1, α_2, β_1, β_2:

$$
\begin{aligned}
b_{11}\alpha_1 + b_{12}\alpha_2 = c_1 = \tfrac{1664}{4725}, \qquad b_{11}\beta_1 + b_{12}\beta_2 = d_1 = \tfrac{9}{40} \\
b_{21}\alpha_1 + b_{22}\alpha_2 = c_2 = \tfrac{1664}{4725}, \qquad b_{21}\beta_1 + b_{22}\beta_2 = d_2 = \tfrac{61}{560}
\end{aligned}
\tag{5.17}
$$

где

$$
b_{11} = \frac{1}{d} \times 6144 \times 2512, \qquad b_{21} = b_{12} = \frac{1}{d} \times 6144 \times 25342
$$

$$
b_{22} = \frac{1}{d} \times 6144 \times 44220, \qquad d = 11025 \times 1287
$$

[1] Можно дать другой способ построения функции $q(x, y)$ в рассматриваемой задаче. Положим, что p' — нагрузка, состоящая из четырех сосредоточенных сил в точках $(-\varepsilon, -\varepsilon)$, $(-\varepsilon, +\varepsilon)$, $(+\varepsilon, -\varepsilon)$, $(+\varepsilon, +\varepsilon)$ величиной $1/4$. Тогда

$$
q(x, y) = \lim \int\limits_0^x \int\limits_0^y p' dx dy \qquad \text{при } \varepsilon \to 0
$$

Из (5.17) найдем

$$\alpha_1 = 0.020122, \quad \beta_1 = 0.019894, \quad \alpha_2 = 0.006164, \quad \beta_2 = -0.005132$$

Из (5.13) далее получим

$$H_\varphi(\sigma_m') = 0.000052 \frac{p^2}{B}. \qquad H_\chi(\tau_m') = 0.030983 \frac{p^2}{B}$$

Воспользовавшись (2.7) и (2.8), принимая во внимание (5.11), окончательно найдем

$$\left| w(0.0) - 0.02028 \frac{p}{B} \right| < \delta = \frac{1}{2} \sqrt{0.000052} \sqrt{0.030983} \frac{p}{B} = 0.00063 \frac{p}{Б} \tag{5.18}$$

Найденная погрешность δ составляет около 3% от точного значения

Примечание. Изложенный способ построения функций G_1, G_2, H_1 не является единственным. Эти функции могут быть построены, например, если положить в (5.6) $H_1 = 0$, $G_1 = G_2 = G$; тогда получим

$$\nabla^2 G = \frac{p}{B} - \nabla^4 w_1, \qquad \nabla^2 G' = \frac{p'}{B} - \nabla^4 w_1' \tag{5.19}$$

Откуда

$$G = \iint\limits_S \ln r \left[\frac{p}{B} - \nabla^4 w_1' \right] d\xi\, d\eta + g_0, \qquad G' = \iint\limits_S \ln r \left[\frac{p'}{B} - \nabla^4 w_1' \right] d\xi\, d\eta + g_0' \tag{5.20}$$

где g_0, g_0' — гармонические функции, $r^2 = (\xi - x)^2 + (\eta - y)^2$. Функции G и G' могут быть построены также как решения краевых задач (5.19) при условии на границе

$$G|_l = G'|_l = 0.$$

Примечание. Во многих задачах, если не ввести главную часть функции Грина, может оказаться, что $H_\varphi(\tau_m') = \infty$.

Например, если речь идет о решении краевых задач

$$Au = \nabla^2 u = \frac{p}{B}, \quad u \Big|_l = 0; \qquad Av = \nabla^2 v = \frac{p'}{B}, \quad v \Big|_l = 0 \tag{5.21}$$

где u и v — прогибы мембраны, то в случае, когда p' — сосредоточенная сила, функционал $F_f{}^A(v)$ принимает бесконечное значение и, следовательно, оценка δ по формулам (2.10)—(2.11) для приближенного значения величины

$$u(x, y) = \iint\limits_S p' u(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta \tag{5.22}$$

также будет бесконечно большая, между тем как при ограниченном значении нагрузки p прогиб u принимает конечные значения.

Для того чтобы в этом случае найти прогиб u мембраны (без введения специальной главной части функции Грина), можно рекомендовать следующий способ. Пусть

$$Au = \varphi, \qquad Av = \chi \tag{5.23}$$

и требуется найти значение (u, χ), где все входящие буквы имеют те же значения, что и в § 2.

Пусть краевые задачи (5.23) эквивалентны краевым задачам

$$CAu = C\varphi, \qquad CAv' = \chi$$

где C — положительно-определенный оператор (в частности, можно положить $C = A$). При этом мы полагаем, что φ принадлежит области определения оператора C.

Если функционал F_{χ}^{CA} имеет конечное значение, то для определения величины $(u, \chi) = (u, CAv')$ применимы изложенные выше оценки. Например, в случае краевой задачи (5.21) для определения величины (5.22) можно перейти к краевым задачам

$$\nabla^4 u = \nabla^2 \frac{p}{B}, \qquad u = \nabla^2 u = 0 \qquad \text{на } l$$

$$\nabla^4 v' = \frac{p'}{B}, \qquad v' = \nabla^2 v' = 0 \qquad \text{на } l$$

(При этом мы полагаем, что на контуре l имеем $p = 0$.) В этом случае функционал $H_{\varphi}(\tau_m')$, соответствующий сосредоточенной силе p', будет иметь конечное значение.

Поступила 6 I 1955

ЛИТЕРАТУРА

1. Люстерник Л. А. и Соболев В. И. Элементы функционального анализа. ГИТТЛ, 1951.
2. Слободянский М. Г. Определение производных искомых функций методом конечных разностей. ПММ, т. XV, вып. 2, 1951.
3. Слободянский М. Г. Оценки погрешности приближенного решения в линейных задачах, сводящихся к вариационным, и их применение к определению двусторонних приближений в статических задачах теории упругости. ПММ, т. XVI, вып. 4, 1952.
4. Слободянский М. Г. Оценки погрешностей приближенных решений линейных задач. ПММ, т. XVII, вып. 2, 1953.
5. Михлин С. Г. Прямые методы в математической физике. ГТТИ, 1950.
6. Слободянский М. Г. О приближенном решении линейных задач, сводящихся к вариационным. ПММ, т. XVII, вып. 5, 1953.
7. Слободянский М. Г. Приближенное решение самосопряженной краевой задачи для обыкновенного дифференциального уравнения и определение областей расположения собственных значений. ПММ, т. XV, вып. 5, 1954.
8. Треффтц Е. Математическая теория упругости. ГТТИ, 1934.
9. Trefftz E. Ein Gegenstück zum Ritzschen Verfahren. Verhandl. d. 2. internat. Kongress f. technische Mechanik. Zürich, 1926.
10. Курант Р. и Гильберт Д. Методы математической физики, т. I. ГТТИ, 1953.
11. Friedrichs K. Ein Verfahren der Variationsrechnung das Minimum eines Integrals als das Maximum eines anderen Ausdrucks darzustellen. Nachrichten der Ges. d. Wissensch. zu Göttingen, S. 13—20, 1929.
12. Слободянский М. Г. О преобразовании проблемы минимума функционала к проблеме максимума. ДАН СССР, т. XCI, № 4, 1953.
13. Соболев С. Л. Некоторые применения функционального анализа в математической физике. Изд. Ленинград. гос. университета им А. А. Жданова, 1950.