Прикладная математика и механика. Том XIX, 1955
Институт механики Академии наук Союза ССР

О ВОЛНООБРАЗОВАНИИ И ВОЛНОВОМ СОПРОТИВЛЕНИИ СУДОВ В ОГРАНИЧЕННОМ ФАРВАТЕРЕ ЖИДКОСТИ

А. А. Костюков
(Одесса)

Рассматривается волнообразование и волновое сопротивление тел (судов), плавающих под свободной поверхностью жидкости конечной глубины и в канале прямоугольного сечения.

§ 1. Принимаем обычные допущения теории волн малой высоты. Оси x и y располагаем на свободной поверхности жидкости в состоянии ее покоя, а ось z направляем вверх. Систему координат считаем связанной с телом, движущимся равномерно со скоростью v в направлении оси x (в случае канала ось x направлена вдоль стенок канала).

Воспользуемся преобразованной формулой М. Д. Хаскинда [1,2] для потенциала скоростей $\varphi_0(x, y, z)$ изолированного источника единичной интенсивности, расположенного в точке (ξ, η, ζ) под поверхностью жидкости конечной глубины h. Тогда потенциальная функция $\varphi(x, y, z)$ для тела произвольной формы запишется так:

$$\varphi(x, y, z) = \int\limits_S \varphi_0(x, y, z, \xi, \eta, \zeta)\, q(\xi, \eta, \zeta)\, dS \tag{1.1}$$

Здесь (1.2)

$$\varphi_0(x, y, z) = -\frac{1}{4\pi}\left[L_0(x, y, z, \xi, \eta, \zeta) + M_0(x, \ldots \xi, \ldots) + N_0(x, \ldots \xi, \ldots)\right]$$

(1.3)

$$L_0 = \frac{1}{r} + \frac{1}{r_1} = \frac{1}{\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2}} + \frac{1}{\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z+\zeta+2h)^2}}$$

$$M_0 = \frac{2}{\pi}\operatorname{Re}\int\limits_{-1/2\pi}^{1/2\pi} d\theta \int\limits_0^\infty \chi(\lambda, \theta)\, e^{i\lambda\omega} d\lambda \tag{1.4}$$

$$N_0 = \operatorname{Re} 2\nu i \int\limits_{-1/2\pi}^{1/2\pi} \frac{\operatorname{ch}\lambda_0(z+h)\operatorname{ch}\lambda_0(\zeta+h)}{\operatorname{ch}^2\lambda_0 h\cos^2\theta - \nu h}\, e^{i\lambda_0\omega} d\theta \tag{1.5}$$

$$\chi(\lambda, \theta) = \frac{e^{-\lambda h}(\nu + \lambda\cos^2\theta)\operatorname{ch}\lambda(z+h)\operatorname{ch}\lambda(\zeta+h)}{(\nu\operatorname{th}\lambda h - \lambda\cos^2\theta)\operatorname{ch}\lambda h} \tag{1.6}$$

$$\omega = (x-\xi)\cos\theta + (y-\eta)\sin\theta, \qquad \lambda_0 = \frac{\nu\operatorname{th}\lambda_0 h}{\cos^2\theta} \tag{1.7}$$

S — поверхность тела, $q(\xi, \eta, \zeta)$ — плотность источников (и стоков), непрерывно распределенных по S, $\nu = g/v^2$, g — ускорение силы тяжести,

$|\theta_0| \leqslant \theta \leqslant |\frac{1}{2}\pi|$, где $\theta_0 = 0$ при $v < \sqrt{gh}$ и $\theta_0 = \arccos\sqrt{\nu h}$ при $v > \sqrt{gh}$; в формуле (1.4) под знаком интеграла подразумевается его главное значение в смысле Коши.

Заметим, что подинтегральное выражение (1.4) при $\lambda = 0$ имеет полюс. В исправленном виде функцию $M_0{}^*$ можно записать, например, так:

$$M_0{}^* = M_0 + C, \quad C = -\frac{2\nu}{\pi}\int\limits_{-1/2\pi}^{1/2\pi} d\theta \int\limits_0^\infty \frac{d\lambda}{(\nu\,\mathrm{th}\,\lambda h - \lambda\cos^2\theta)\,\mathrm{ch}\,\lambda h} \tag{1.8}$$

В дальнейшем, однако, мы будем пользоваться формулой (1.4) для функции M_0, так как указанный пробел этой формулы исчезаст, если рассматривать частные производные от φ по координатам x, y, z.

Функция q определяется как решение интегрального уравнения, составленного на основании граничного условия для потенциала φ на поверхности тела S:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial n} = v\cos(n, x) \quad \text{на } S \tag{1.9}$$

где n — внешняя нормаль к поверхности тела.

Для тонкого судна (т. е. судна, у которого поверхность весьма мало отходит от его диаметральной плоскости)

$$q(\xi, 0, \zeta) \approx -v\frac{\partial\eta}{\partial\xi} \tag{1.10}$$

где $\eta = \pm f(\xi, \zeta)$ — уравнение подводной поверхности судна. При $h = \infty$ (1.1) переходит в формулу Н. Е. Кочина [3]. Если при этом еще положить $\eta = 0$, а $q \approx -v\partial\eta/\partial\xi$, то получим формулу Мичелля [4] для потенциала скоростей тонкого судна на глубокой воде.

§ 2. Найдем ординаты волн ζ_w, образуемых кораблем на поверхности воды глубины h. Пользуясь известной формулой

$$\zeta_w = \frac{v}{g}\frac{\partial\varphi(x, y, 0)}{\partial x} \tag{2.1}$$

и равенством (1.1), получаем

$$\zeta_w(x, y) = -\frac{v}{4\pi g}\int\limits_S (A_1 + A_2)\, q(\xi, \eta, \zeta)\, dS \tag{2.2}$$

Здесь

$$A_1 = \mathrm{Re}\,\frac{i\nu}{\pi}\int\limits_{-1/2\pi}^{1/2\pi}\cos\theta\, d\theta \int\limits_0^\infty f(\lambda, \theta)\,(e^{i\lambda u} + e^{i\lambda w})\, d\lambda \tag{2.3}$$

$$A_2 = -2\nu^2\,\mathrm{Re}\int\limits_{-1/2\pi}^{1/2\pi}\frac{\mathrm{sh}\,\lambda_0 h\,\mathrm{ch}\,\lambda_0(\zeta + h)}{\mathrm{ch}^2\lambda_0 h\cos^2\theta - \nu h}\, e^{i\lambda_0\omega}\,\frac{d\theta}{\cos\theta} \tag{2.4}$$

$$f(\lambda, \theta) = \frac{(1 + \mathrm{th}\,\lambda h)\,\lambda}{\nu\,\mathrm{th}\,\lambda h - \lambda\cos^2\theta}, \qquad u = \omega - i\zeta, \quad w = \omega + i(\zeta + 2h) \tag{2.5}$$

Исследуем волновой профиль на больших расстояниях впереди и позади судна.

Беря сперва положительные значения x (впереди судна), можно записать для внутреннего интеграла формулы (2.3) равенство (схематически)

$$\text{v. p.} \int\limits_0^\infty = \int\limits_{0(l_1)}^\infty + \pi i R_1 \tag{2.6}$$

где l_1 — путь интегрирования, идущий от $\lambda = 0$ до $\lambda = \infty$ и обходящий особую точку λ_0 с верхней стороны, R_1 — вычет функции при обходе этой точки. Применяя далее к первому слагаемому правой части равенства (2.6) формулу интегрирования по частям и вычисляя вычет R_1, получаем для ζ_w при больших $+x$ асимптотический ряд

$$\zeta_w \approx -\frac{m}{4\pi^2 v}\int\limits_S q\,dS \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Re} \int\limits_{-\frac{1}{2}\pi}^{\frac{1}{2}\pi} (-1)^n \frac{\overset{(n-1)}{f}(0, \theta)}{i^{n-1}} \left(\frac{1}{u^n} + \frac{1}{w^n}\right) \cos\theta\, d\theta \tag{2.7}$$

где $m = 1$ при конечной глубине жидкости h и $m = 2$ при $h = \infty$. Итак, при $x \to +\infty$, $\zeta_w \to 0$, причем при h конечном $\zeta_w = 0(x^{-1})$ и при $h = \infty$

$$\zeta_w \approx -\frac{v}{2\pi g}\int\limits_S \frac{x-\xi}{[(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + \zeta^2]^{3/2}}\, q\, ds \qquad \left[\zeta_w = 0\left(\frac{1}{x^2}\right)\right] \tag{2.8}$$

Для случая больших отрицательных значений x (позади судна) необходимо путь интегрирования l_2 выбрать обходящим точку λ_0 с нижней стороны. Тогда найдем

$$\zeta_w \approx -\frac{v}{4\pi g}\int\limits_S q\,dS \left\{2A_2 + \frac{m\nu}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Re} \int\limits_{-\frac{1}{2}\pi}^{\frac{1}{2}\pi} (-1)^n \frac{\overset{(n-1)}{f}(0, \theta)}{i^{n-1}} \left(\frac{1}{u^n} + \frac{1}{w^n}\right) \cos\theta\, d\theta\right\} \tag{2.9}$$

Можно показать, что при больших $|x|$ порядок малости A_2 есть $x^{-1/2}$. В самом деле, возьмем тонкое судно и найдем значения A_2 в точках плоскости $y = 0$ при $v < \sqrt{gh}$. Пользуясь методом установившихся фаз, получим

$$A_2 \approx -2\nu^2 \frac{\operatorname{sh}\gamma_0 h \operatorname{ch}\gamma_0(\zeta + h)}{\operatorname{ch}^2\gamma_0 h - \nu h} \sqrt{2\pi|\psi|} \cos\left[(x-\xi)\,\nu \operatorname{th}\gamma_0 h \pm \frac{\pi}{4}\right] \tag{2.10}$$

где

$$\psi = \frac{\operatorname{ch}^2\gamma_0 h - \nu h}{(x-\xi)\,\nu \operatorname{th}\gamma_0 h(\operatorname{ch}^2\gamma_0 h + \nu h)} \tag{2.11}$$

γ_0 — наибольший корень уравнения $\gamma_0 = \nu \operatorname{th}\gamma_0 h$; верхний знак у $\frac{1}{4}\pi$ берется при $\psi > 0$ и нижний при $\psi < 0$.

Следовательно, при больших по абсолютной величине значениях $-x$

$$\zeta_w - \left[-\frac{v}{4\pi g}\int\limits_S 2A_2 q\, dS\right] = O\left(\frac{1}{x}\right) \tag{2.12}$$

и уравнение волновой поверхности на большом удалении за судном будет

$$\zeta_w \approx \frac{\nu}{\pi v}\int\limits_S q\,dS \int\limits_{-\frac{1}{2}\pi}^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\operatorname{sh}\lambda_0 h \operatorname{ch}\lambda_0(\zeta + h)}{\operatorname{ch}^2\lambda_0 h \cos^2\theta - \nu h} \cos(\lambda_0 \omega)\frac{d\theta}{\cos\theta} \tag{2.13}$$

т. е. $\lim \zeta_w = 0$ при $x \to -\infty$, причем $\zeta_w = O(1/\sqrt{x})$. При $h = \infty$

$$\zeta_w \approx \frac{\nu}{\pi v}\int\limits_S q\,dS \int\limits_{-1/2\pi}^{1/2\pi} \exp\left(\frac{\nu\zeta}{\cos^2\theta}\right)\cos\left(\frac{\nu\omega}{\cos^2\theta}\right)\frac{d\theta}{\cos^3\theta}, \quad \text{или} \quad \zeta_w = O\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right) \tag{2.14}$$

так как согласно (2.10)

$$A_2 \approx -2\nu e^{\nu\zeta}\sqrt{\frac{2\pi\nu}{|x-\xi|}}\cos\left[\nu(x-\xi) - \frac{1}{4}\pi\right] \tag{2.15}$$

Равенства (2.10) и (2.15) могут быть использованы для приближенного определения ординат ζ_w на большом удалении за тонким судном в точках плоскости $y = 0$.

Таким образом, как на глубокой воде, так и при конечной глубине жидкости ординаты волновой поверхности ζ_w убывают к нулю как при $x \to +\infty$, так и при $x \to -\infty$, причем впереди судна они убывают значительно быстрее, чем позади судна.

Заметим, что из (2.14) можно получить формулу Хогнера [5, 6] для потенциала скоростей $\varphi(x, y, z)$ потока, вызванного движущимся по поверхности неограниченной жидкости распределением давления. Действительно, пусть P есть общая величина давления, сосредоточенного в точке ($\xi = 0$, $\eta = 0$, $\zeta = 0$).

Тогда формулу Хогнера для значений функции φ на большом удалении за источником возбуждения можно будет представить в виде

$$\varphi(x, y, z) \approx \frac{P}{\rho}\frac{\nu}{\pi v}\int\limits_{-1/2\pi}^{1/2\pi} \exp\left(\frac{\nu z}{\cos^2\theta}\right)\cos\left(\frac{\nu\omega}{\cos^2\theta}\right)\frac{d\theta}{\cos^3\theta} \tag{2.16}$$

где ρ — массовая плотность жидкости, а интеграция распространяется на те значения θ, для которых $\omega < 0$.

Аналогично (2.16) можно записать формулу для φ импульса и для случая конечной глубины жидкости:

$$\varphi(x, y, z) \approx \frac{P}{\rho}\frac{\nu}{\pi v}\int\limits_{-1/2\pi}^{1/2\pi} \frac{\operatorname{sh}\lambda_0 h \operatorname{ch}\lambda_0(z+h)}{\operatorname{ch}^2\lambda_0 h\cos^2\theta - \nu h}\cos(\lambda_0\omega)\frac{d\theta}{\cos\theta} \tag{2.17}$$

Хавелок [7] дал решение этой задачи другим способом. Из его решения следует, что при $v < \sqrt{gh}$ за импульсом давления образуются две системы волн: расходящихся и поперечных. По мере приближения v к $\sqrt{gh}$ угол α системы расходящихся волн изменяется от $\alpha_0 = 19°28'$ до $\alpha = 90°$. При $v > \sqrt{gh}$ α постепенно убывает от 90° до нуля (при $v \to \infty$), достигая значения α_0 при $v/\sqrt{gh} \approx 3$. Когда v превысит $\sqrt{gh}$, поперечные волны исчезнут и останутся только расходящиеся волны. Такая картина волн в общих чертах согласуется с волнообразованием при движении судна на мелкой воде.

Найдем приближенное выражение для ординат волн $\zeta_w(x, y)$ при достаточно малых скоростях судна. Воспользуемся следующим приемом. Если устремить $v \to 0$ ($\nu \to \infty$), то на основании граничного условия на свободной поверхности жидкости при движении тела

$$\frac{\partial\varphi}{\partial z} = 0 \quad \text{при} \quad z = 0 \tag{2.18}$$

заключаем, что влияние свободной поверхности жидкости на тело получается такое же, как и влияние неподвижной твердой стенки, расположенной на уровне спокойной поверхности воды. Отсюда, пользуясь методом зеркального изображения, легко находим асимптотическое выражение для ζ_w при малых скоростях судна:

$$\zeta_w \approx \frac{v}{2\pi g}\int\limits_S\left\{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x-\xi}{[(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(n2h+\zeta)^2]^{3/2}}+\right. \tag{2.19}$$

$$\left.+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x-\xi}{[(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(n2h-\zeta)^2]^{3/2}}\right\} q\,dS$$

При достаточно больших h можно записать приближенно (2.20)

$$\zeta_w \approx \frac{v}{2\pi g}\int\limits_S\left\{\frac{x-\xi}{[(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+\zeta^2]^{3/2}}+\frac{x-\xi}{[(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(2h+\zeta)^2]^{3/2}}\right\} q\,dS$$

При $h\to\infty$ (2.20) переходит в известное выражение для ζ_w на глубокой воде [8]. К формуле (2.20) можно прийти также и из равенства (2.2), если в нем принять при достаточно больших значениях h приближенно

$$\frac{1+\operatorname{th}\lambda h}{\operatorname{th}\lambda h}\approx 2.$$

Исследуем еще профиль волн, образуемых кораблем при неограниченном возрастании его скорости ($v\to\infty$, $\nu\to 0$). Обозначим

$$L_1=\lim_{\nu\to 0}\left(\frac{1}{\nu}A_1\right),\qquad L_2=\lim_{\nu\to 0}\left(\frac{1}{\nu}A_2\right) \tag{2.21}$$

Согласно равенствам (2.3) и (2.4) получаем

$$L_1=-\operatorname{Re}\frac{i}{\pi}\int\limits_{-1/2\pi}^{1/2\pi}d\theta\int\limits_0^{\infty}\frac{1+\operatorname{th}\lambda h}{\cos\theta}\left(e^{i\lambda u}+e^{i\lambda w}\right)d\lambda,\quad L_2=0 \tag{2.22}$$

Примем аналогично предыдущему $1+\operatorname{th}\lambda h\approx 2$. Поместим начало координат по середине длины судна. Пусть L, B и T — соответственно длина, ширина и осадка корабля. Возьмем для простоты тонкое судно. Применяя к интегралу по длине судна формулу интегрирования по частям и принимая в оконечностях судна, т. е. при

$$\xi=\pm\tfrac{1}{2}L$$

ординаты $\eta\approx 0$, найдем (2.23)

$$\zeta_w\approx\frac{1}{\pi}\int\limits_{-T}^{0}\int\limits_{-1/2L}^{1/2L}\left\{-\frac{\zeta}{[(x-\xi)^2+y^2+\zeta^2]^{3/2}}+\frac{\zeta+2h}{[(x-\xi)^2+y^2+(\zeta+2h)^2]^{3/2}}\right\}\eta(\xi,\zeta)\,d\xi\,d\zeta$$

Отсюда видно, что волна целиком располагается над поверхностью невозмущенной воды ($\zeta<0$, $\eta>0$). Таким образом, при $v\to\infty$ корабль создает над поверхностью воды одиночную волну.

При безграничном удалении точки (x, y) $\zeta_w\to 0$, причем быстрота убывания ζ_w как R^{-3}, где

$$R=\sqrt{x^2+y^2}$$

При $h = \infty$ (2.23) переходит в формулу, найденную в работе [8].

Заметим, что для судов с большим отношением L/B при вычислении ординат волн у поверхности корабля можно приближенно считать $\zeta_w(x, y = \eta) \approx \zeta_w(x, y = 0)$, т. е. ординаты ζ_w в точках действующей ватерлинии принимать такими же, как и в проекциях этих точек на диаметральную плоскость судна. Полученные формулы для вычисления $\zeta_w(x, y)$ дают конечные значения ординат волн при всех скоростях движения судна, включая и критическую скорость $v_k = \sqrt{gh}$.

В случае движения изолированного источника (стока) при критической скорости интеграл волнового движения расходится.

§ 3. Найденные выражения для ζ_w позволяют определить также изменение уровня свободной поверхности жидкости при работе гребного винта (движителя) под поверхностью воды. В самом деле, действие гребного винта на поток вне струи движителя приближенно может быть заменено действием стоков, равномерно распределенных по площади его диска F_p с интенсивностью q_p. Тогда формулы для вычисления ζ_w при работе винта получатся непосредственно из выражений ζ_w при движении корабля. Величина q_p, если пользоваться приближенно выводами теории идеального движителя в безграничной среде, найдется из равенства

$$q_p \approx v\left(\sqrt{\sigma_p + 1} - 1\right), \qquad \sigma_p = \frac{2P}{\rho F_p v^2} \tag{3.1}$$

где σ_p — коэффициент нагрузки движителя, P — упор гребного винта.

Задача о волнообразовании при движении с постоянной скоростью v самоходного судна (судна совместно с работающим движителем) при принятых допущениях может быть приближенно решена следующим путем. Пусть $\varphi(x, y, z)$ — потенциал скоростей потока, вызванного самоходным судном. Представим φ в виде

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 \tag{3.2}$$

где φ_1 — потенциал скоростей от действия корпуса судна на поток, φ_2 — потенциальная функция, определяющая действие гребного винта на поток. Функции φ_1 и φ_2 можно представить аналогично равенству (1.1)

$$\varphi_1(x, y, z) = \int_S \varphi_0(x, y, z, \xi, \eta, \zeta)\, q^0(\xi, \eta, \zeta)\, dS \tag{3.3}$$

Для области жидкости вне струи движителя

$$\varphi_2(x, y, z) \approx -q^0{}_p \int_{F_p} \varphi_0(x, y, z, \xi_p, \eta_p, \zeta_p)\, dF \tag{3.4}$$

Здесь точка (ξ, η, ζ) принадлежит поверхности тела S, а (ξ_p, η_p, ζ_p) — площади диска гребного винта F_p, q^0 и $q^0{}_p$ — плотности источников непрерывно распределенных по S и F_p (принимаем $q^0{}_p(\eta_p, \zeta_p) \approx \mathrm{const}$).

В связи с взаимным влиянием судна и винта плотности q^0 и $q_p{}^0$ будут отличаться от соответствующих величин q и q_p для буксируемого судна и изолированного движителя. Величину $q_p{}^0$ можно приближенно определить по формуле (3.1) с учетом влияния попутного потока и изменения нагрузки движителя. Что же касается функции q^0, то она определится из уравнения, составленного на основании граничного условия (1.9) на поверхности судна:

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial n} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial n} = v \cos(n, x) \qquad \text{на } S \tag{3.5}$$

Отсюда, учитывая еще свойства нормальной производной потенциала простого слоя в точках поверхности тела, получаем для определения q^0:

$$q^0(x, y, z) = \int\limits_S K(x, y, z, \xi, \eta, \zeta)\, q^0(\xi, \eta, \zeta)\, dS + f(x, y, z) \tag{3.6}$$

Здесь

$$f(x, y, z) = f_1(x, y, z) + f_2(x, y, z) \tag{3.7}$$

$$f_1 = 2v\cos(n, x), \qquad f_2 = -q_p{}^0 \int\limits_{F_p} K_p(x, y, z, \xi_p, \eta_p, \zeta_p)\, dF \tag{3.8}$$

$$K = \frac{1}{2\pi}\left[-\frac{\cos(r, n)}{r^2} - \frac{\cos(r_1, n)}{r_1{}^2} + \frac{\partial M_0}{\partial n} + \frac{\partial N_0}{\partial n}\right], \quad K_p = K$$

$$\xi = \xi_p, \qquad \eta = \eta_p, \qquad \zeta = \zeta_p \tag{3.9}$$

K и K_p рассматриваются как функции двух точек $P(x, y, z)$ и $Q(\xi, \eta, \zeta)$, из которых P принадлежит поверхности судна S, а Q — поверхности S для функции K и — плоскости движителя F_p для функции K_p. Под n подразумевается направление нормали к поверхности S в точке P. Остальные обозначения прежние. В случае буксируемого судна $f = f_1$. Найдем выражения для ядра K при

$$\nu \to \infty \ (v \to 0) \text{ и } \nu \to 0 \ (v \to \infty):$$

$$\lim_{\nu\to\infty} \frac{\partial M_0}{\partial n} = \frac{2}{\pi} \operatorname{Re} \int\limits_{-{}^1\!/_2\pi}^{{}^1\!/_2\pi} d\theta \int\limits_0^\infty \frac{F(\lambda, \theta)}{\operatorname{sh} \lambda h}\, d\lambda, \qquad \lim_{\nu\to\infty} \frac{\partial N_0}{\partial n} = 0 \tag{3.10}$$

$$\lim_{\nu\to 0} \frac{\partial M_0}{\partial n} = -\frac{2}{\pi} \operatorname{Re} \int\limits_{-{}^1\!/_2\pi}^{{}^1\!/_2\pi} d\theta \int\limits_0^\infty \frac{F(\lambda, \theta)}{\operatorname{ch} \lambda h}\, d\lambda, \qquad \lim_{\nu\to 0} \frac{\partial N_0}{\partial n} = 0 \tag{3.11}$$

где

$$F(\lambda, \theta) = \lambda e^{-\lambda h} \operatorname{ch} \lambda(z + h) \operatorname{ch} \lambda(\zeta + h)\, e^{i\lambda\omega}\, [i\cos\theta\cos(n, x) + \\ + i\sin\theta\cos(n, y) + \operatorname{th}\lambda(z + h)\cos(n, z)] \tag{3.12}$$

Если принять достаточно большие значения h и воспользоваться интегральным представлением функции

$$\frac{1}{r'} = \frac{1}{\sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + (z + \zeta)^2}} \tag{3.13}$$

то приближенно найдем

$$\lim_{\nu\to\infty} \frac{\partial M_0}{\partial n} = -\lim_{\nu\to 0} \frac{\partial M_0}{\partial n} \approx \frac{\partial}{\partial n}\left[\frac{1}{r'}\right] = -\frac{\cos(r', n)}{r'^2} \tag{3.14}$$

Следовательно, при больших h приближенные выражения для ядра K будут (3.15)

$$\underset{\nu=\infty}{K} \approx -\frac{1}{2\pi}\left[\frac{\cos(r, n)}{r^2} + \frac{\cos(r', n)}{r'^2}\right], \qquad \underset{\nu=0}{K} \approx -\frac{1}{2\pi}\left[\frac{\cos(r, n)}{r^2} - \frac{\cos(r', n)}{r'^2}\right]$$

Решение интегрального уравнения (3.6) для значений ядра по формуле (3.15) известно [3, 9, 8] Представим q^0 в виде суммы:

$$q^0 = q + \Delta q \tag{3.16}$$

Тогда получим [8]

$$q = Q_0 + \tfrac{1}{2} Q_1 + \left(\tfrac{1}{2}\right)^2 Q_2 + \ldots \tag{3.17}$$

где

$$Q_0 = f_1, \qquad Q_1 = \int_S K_\nu Q_0 \, dS, \qquad Q_n = \int_S K_\nu Q_{n-1} \, dS + Q_{n-1} \qquad (n > 1) \tag{3.18}$$

Аналогичным рядом определится и Δq, причем здесь уже $Q_0 = f_2$.

Найденное решение для q^0 позволяет определить приближенно по формулам (3.2) — (3.4) потенциал скоростей для самоходного судна, а также ординаты волн, образуемых судном, при достаточно малых и больших значениях скорости движения.

§ 4. Определим потенциальную функцию для тела, движущегося под поверхностью воды в канале прямоугольного сечения. Обозначим через $2b$ ширину канала, а h — его глубину. Плоскость xz проведем через центр тяжести объема тела, расположенный соответственно на расстояниях b_1 и b_2 от стенок канала. Применяя метод зеркального изображения, найдем искомый потенциал как сумму потенциалов скоростей, взятых для отдельных тел, составляющих бесконечную «эскадру» тел (судов), причем суммарный потенциал движения будет удовлетворять всем граничным условиям задачи. Для получения слагаемых суммарного потенциала скоростей необходимо в формулу (1.1) вместо $(y - \eta)$ подставить $(\alpha - n2b)$, где $\alpha = (b_2 - b_1) + (y + \eta)$, при n нечетном и $\alpha = y - \eta$ при n четном, причем $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ В результате искомый потенциал скоростей φ_b представится в виде бесконечных рядов. Суммирование этих рядов может быть выполнено на основании формулы Пуассона

$$\frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(t) e^{int} dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \psi(2\pi k) \tag{4.1}$$

Итак, находим

$$\varphi_b(x, y, z) = -\frac{1}{4\pi} \int_S [L_b + M_b + N_b] \, q(\xi, \eta, \zeta) \, dS \tag{4.2}$$

Здесь

$$L_b = \frac{2}{b} \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^{{}^1\!/_2\pi} a(k) \{ [e^{-2\lambda_k |z-\zeta|} + e^{-2\lambda_k (z+\zeta+2h)}] A(2\lambda_k, \theta) +$$
$$+ [e^{-\lambda_k' |z-\zeta|} + e^{-\lambda_k (z+\zeta+2h)}] B(\lambda_k, \theta) \} \frac{d\theta}{\sin\theta} \tag{4.3}$$

$\left(\frac{1}{r} \text{ и } \frac{1}{r_1} \text{ представлены в интегральной форме}\right)$

$$M_b = \frac{4}{b} \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^{{}^1\!/_2\pi} a(k) [\chi(2\lambda_k, \theta) A(2\lambda_k, \theta) + \chi(\lambda_k, \theta) B(\lambda_k, \theta)] \frac{d\theta}{\sin\theta} \tag{4.4}$$

В этих формулах $a(0) = \frac{1}{2}$, $a(k) = 1$ при $k > 0$,

$$A(2\lambda_k, \theta) = \cos[2\lambda_k(x - \xi)\cos\theta]\cos[2\lambda_k(b_2 - b_1 + y + \eta)\sin\theta] \tag{4.5}$$

$$B(\lambda_k, \theta) = \tag{4.6}$$

$$= \cos[\lambda_k(x - \xi)\cos\theta]\sin\left[\lambda_k\left(\frac{b_2 - b_1}{2} + y\right)\sin\theta\right]\sin\left[\lambda_k\left(\frac{b_2 - b_1}{2} + \eta\right)\sin\theta\right]$$

$$\lambda_k = \frac{\pi k}{2b\sin\theta} \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots) \tag{4.7}$$

Для функции N_b, если сделать еще замену переменной θ на переменную λ_0, определяемую (1.7), получаем выражение

$$N_b = -\frac{4\pi\nu}{b}\sum_{m=0}^{\infty} a(m)\left\{\Gamma(\gamma_m)\cos\left[\sqrt{\gamma_m^2 - \nu\gamma_m \operatorname{th}\gamma_m h}\;(b_2 - b_1 + y + \eta)\right] + \right.$$
$$+\Gamma(\mu_m)\sin\left[\sqrt{\mu_m^2 - \nu\mu_m \operatorname{th}\mu_m h}\left(\frac{b_2 - b_1}{2} + \right.\right.$$
$$\left.\left.\left. + y\right)\right]\sin\left[\sqrt{\mu_m^2 - \nu\mu_m \operatorname{th}\mu_m h}\left(\frac{b_2 - b_1}{2} + \eta\right)\right]\right\} \tag{4.8}$$

где $a(m)$ то же, что и $a(k)$,

$$\Gamma(\lambda) = \frac{\lambda \operatorname{ch}\lambda(z + h)\operatorname{ch}\lambda(\zeta + h)\sin[\sqrt{\nu\lambda \operatorname{th}\lambda h}\,(x - \xi)]}{\operatorname{ch}^2\lambda h\sqrt{\nu\lambda\operatorname{th}\lambda h}\,(2\lambda - \nu\operatorname{th}\lambda h - \nu h\lambda/\operatorname{ch}^2\lambda h)} \tag{4.9}$$

γ_m и μ_m — корни уравнений

$$pb\sqrt{\lambda^2 - \nu\lambda\operatorname{th}\lambda h} = 2\pi m \qquad (m = 0, 1, 2, \ldots) \tag{4.10}$$

причем γ_m — при $p = 2$, μ_m — при $p = 4$. Если представить уравнение (4.10) в форме

$$\operatorname{th}\lambda h = \frac{\lambda h}{\nu h} - \frac{4\pi^2 m^2 h}{\nu p^2 b^2 \lambda h} \tag{4.11}$$

то видно, что оно имеет при всяком m только один корень, причем

$$\gamma_0, \mu_0, < \gamma_1, \mu_1 < \gamma_2, \mu_2 < \ldots < \infty$$

При $v < \sqrt{gh}$ $\gamma_0 = \mu_0$ наибольшему корню уравнения $\lambda = \nu\operatorname{th}\lambda h$; при $v \geqslant \sqrt{gh}$ нижний предел суммы в (4.8) следует брать $m = 1$, так как корни γ_0, μ_0 действительны только при $v < \sqrt{gh}$.

Ряды формул (4.3), (4.4) и (4.8) сходятся. С неограниченным возрастанием λ_k и $\lambda_m(\gamma_m, \mu_m)$ порядок убывания $\chi(\lambda_k)$ такой, как $e^{\lambda_k(z+\zeta)}$, а $\Gamma(\lambda_m)$, как $e^{\lambda_m(z+\zeta)}/\sqrt{\lambda_m}$ $(z + \zeta < 0)$.

Сопоставим равенство (4.2) с существующими формулами [10, 11] для потенциала скоростей тонкого судна, движущегося в канале прямоугольного сечения в средней его плоскости. В работе Л. Н. Сретенского [10] получено только одно слагаемое потенциала, содержащее нечетную функцию от аргумента $x - \xi$ (по этому слагаемому вычисляется волновое сопротивление судна). Это слагаемое, если в нем просуммировать бесконечный ряд, совпадает с функцией N_b, записанной для тонкого судна при $b_1 = b_2$ и $y = 0$. В работе М. В. Келдыша и Л. И. Седова [11] сперва устанавливаются формулы для потенциала скоростей потока, вызванного движущимся с постоянной скоростью распределением давления на свободной поверхности жидкости в канале, а затем указывается применение их к вычислению волнового сопротивления тонкого корабля. Применительно к кораблю функцию φ, полученную авторами, можно будет записать в следующем виде:

$$\varphi(x, y, z) = \varphi_1(x, y, z) + \varphi_2(x, y, z) + \varepsilon(x, y, z) \tag{4.12}$$

Здесь

$$\varphi_1 = -\frac{2v}{\pi\nu b}\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^{\infty}[\Gamma_1(n, \beta)\cos\beta x + \Gamma_2(n, \beta)\sin\beta x]\cos\frac{n\pi}{2b}(y + b)\frac{\operatorname{ch}\lambda(z+h)\,d\beta}{(\nu\lambda\operatorname{th}\lambda h - \beta^2)\operatorname{ch}\lambda h} \tag{4.13}$$

$$\varphi_2 = \frac{2v}{\nu b}\sum_{n=n_0}^{\infty}[\Gamma_1(n, \beta_n)\sin\beta_n x - \Gamma_2(n, \beta_n)\cos\beta_n x]\cos\frac{n\pi}{2b}(y + b)\frac{\operatorname{ch}\lambda_n(z+h)}{\omega_n\operatorname{ch}\lambda_n h} \tag{4.14}$$

ε обозначена авторами величина, стремящаяся к нулю при $|x| \to \infty$.

В формулах (4.13) и (4.14)

$$\left.\begin{matrix}\Gamma_1(2n, \beta_{2n})\\ \Gamma_2(2n, \beta_{2n})\end{matrix}\right\} = (-1)^{n+1}\frac{\nu^2 a(n)}{\operatorname{ch}\lambda_{2n} h}\iint\limits_{(S_0)}\frac{\partial\eta}{\partial\xi}\operatorname{ch}\lambda_{2n}(\zeta + h)\left\{\begin{matrix}\cos\beta_{2n}\xi\\ \sin\beta_{2n}\xi\end{matrix}\right\}d\xi\,d\zeta \tag{4.15}$$

$$\Gamma_{12}(2n+1, \beta_{2n+1}) = 0, \qquad \omega_n = \left[\frac{d}{d\beta}(\beta^2 - \nu\lambda\operatorname{th}\lambda h)\right]_{\beta=\beta_n}$$

λ_n и β_n — корни системы уравнений

$$\lambda^2 - \beta^2 = \left(\frac{n\pi}{2b}\right)^2 \quad (n = 0, 1, 2, \ldots); \qquad \nu\lambda\operatorname{th}\lambda h = \beta^2 \tag{4.16}$$

$$n_0 = 0 \quad \text{при} \quad v < \sqrt{gh}; \qquad n_0 = 1 \quad \text{при} \quad v \geqslant \sqrt{gh}$$

так как корни $\lambda_0 = \beta_0$ действительны только при $v < \sqrt{gh}$ и определяются из уравнения $\nu\operatorname{th}\lambda h = \lambda$; в (4.13) интеграл подразумевается в смысле его главного значения; S_0 — диаметральная плоскость корабля, $2b$ — ширина канала; остальные обозначения прежние.

Путем несложных преобразований можно показать, что

$$\varphi_1 = -\frac{1}{4\pi}\int_S (M_b)_1 q\,dS, \qquad \varphi_2 = -\frac{1}{4\pi}\int_S N_b q\,dS \tag{4.17}$$

где

$$(M_b)_1 = \frac{4\nu}{b}\sum_{k=0}^{\infty}\int_0^{1/2\pi}\frac{a(k)\operatorname{ch}[2\lambda_k(z+h)]\operatorname{ch}[2\lambda_k(\zeta+h)]}{\operatorname{ch}^2 2\lambda_k h(\nu th\,2\lambda_k h - 2\lambda_k\cos^2\theta)} \times \cos[2\lambda_k(x-\xi)\cos\theta]\cos[2\lambda_k y\sin\theta]\frac{d\theta}{\sin\theta} \tag{4.18}$$

представляет собой слагаемое функции M_b, определяемой (4.4) в предположении, что судно тонкое и движется в средней плоскости канала; N_b определяется по формуле (4.8) при тех же предположениях о судне.

Теперь нетрудно отыскать и выражение для функции ε. Запишем ее для тонкого судна при $b_1 = b_2$:

$$\varepsilon = \frac{v}{\pi b} \iint\limits_{(S_0)} \frac{\partial \eta}{\partial \xi} \, d\xi \, d\zeta \sum_{k=0}^{\infty} a(k) \int_0^{1/2\pi} \Big[\left(e^{-2\lambda_k |z-\zeta|} + e^{-2\lambda_k (z+\zeta+2h)} \right) -$$

$$- \frac{2e^{-2\lambda_k h} \operatorname{ch} [2\lambda_k (z+h)] \operatorname{ch} [2\lambda_k (\zeta + h)]}{\operatorname{ch} 2\lambda_k h} \Big] \cos [2\lambda_k (x -$$

$$- \xi) \cos \theta] \cos (2\lambda_k y \sin \theta) \frac{d\theta}{\sin \theta} \tag{4.19}$$

где λ_k находится по формуле (4.7).

На основании приведенного сопоставления решений можно получить разные формы выражений для потенциальной функции тела (судна) в канале.

Если в приведенных формулах положить $h = \infty$, то найдем функцию φ_b для случая движения тела в канале бесконечной глубины. Не составляет затруднений получение потенциальной функции и для движения тела вблизи одной вертикальной стенки.

§ 5. Полученное выражение для потенциала скоростей $\varphi_b(x, y, z)$ позволяет вычислить ординаты взволнованной поверхности жидкости [по формуле (2.1)], а также силы, действующие на тело (волновое сопротивление, подъемную силу, силу бокового сопротивления), и моменты этих сил. Так, например, уравнение волнового профиля на большом расстоянии за телом, движущимся в канале, согласно (2.12) будет

$$\zeta_w \approx \frac{2}{bv} \int\limits_S q(\xi, \eta, \zeta) dS \sum_{m=0}^{\infty} a(m) \{ H(\gamma_m) \cos [\sqrt{\gamma_m^2 - \nu\gamma_m \operatorname{th} \gamma_m h} \times$$

$$\times (b_2 - b_1 + y + \eta)] + H(\mu_m) \sin \left[\sqrt{\mu_m^2 - \nu\mu_m \operatorname{th} \mu_m h} \left(\frac{b_2 - b_1}{2} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + y \right) \right] \sin \left[\sqrt{\mu_m^2 - \nu\mu_m \operatorname{th} \mu_m h} \left(\frac{b_2 - b_1}{2} + \eta \right) \right] \Big\} \tag{5.1}$$

где

$$H(\lambda) = \frac{\lambda \operatorname{ch} \lambda(\zeta + h) \cos [\sqrt{\nu\lambda \operatorname{th} \lambda h} \, (x - \xi)]}{\operatorname{ch} \lambda h [2\lambda - \nu \operatorname{th} \lambda h - \nu h\lambda / \operatorname{ch}^2 \lambda h]} \tag{5.2}$$

Формула (5.1), записанная для тонкого судна при $b_1 = b_2$, полностью согласуется с найденным М. В. Келдышем и Л. И. Седовым асимптотическим выражением потенциальной функции при $x \to -\infty$, главный член которого представляет собой почти периодическую функцию x [11]. Определение сил и моментов сил может быть произведено на основании общих формул гидромеханики для сил воздействия жидкости на тело [2]. Волновое сопротивление R тела в канале можно вычислить также по формуле, установленной М. В. Келдышем и Л. И. Седовым [11] через асимптотическое выражение φ при $x \to -\infty$. Аналогичный метод определения R для случая мелководья и глубокой воды (без стенок канала) предложен Хавелоком [12].

Запишем полученную формулу для волнового сопротивления тела в канале:

$$R = -\frac{\rho\nu}{2b}\sum_{m=0}^{\infty} a(m)\{[J_1^2(\gamma_m) + J_2^2(\gamma_m) - J_3^2(\gamma_m) -$$

$$- J_4^2(\gamma_m)]\cos(4\pi md) - 2[J_1(\gamma_m)J_3(\gamma_m) + J_2(\gamma_m)J_4(\gamma_m)]\sin(4\pi md) +$$

$$+ [J_1^2(\mu_m) + J_2^2(\mu_m)]\sin^2(\pi md) + [J_3^2(\mu_m) + J_4^2(\mu_m)]\cos^2(\pi md) +$$

$$+ [J_1(\mu_m)J_3(\mu_m) + J_2(\mu_m)J_4(\mu_m)]\sin(2\pi md)\} \tag{5.3}$$

где

$$d = \frac{b_2 - b_1}{4b}, \qquad J_i(\lambda_m) = \frac{K_i(\lambda_m)}{\sqrt{\left(1 + \frac{4\pi^2 m^2}{p^2 b^2 \lambda^2_m}\right)\operatorname{ch}^2\lambda_m h - \nu h}} \qquad (i = 1, 2, 3, 4) \tag{5.4}$$

$$\left.\begin{matrix} K_1 \\ K_2 \end{matrix}\right\} = \int\limits_S q(\xi, \eta, \zeta)\operatorname{ch}\lambda_m(\zeta + h)\left\{\begin{matrix}\cos \\ \sin\end{matrix}\right.(\xi\sqrt{\nu\lambda_m \operatorname{th}\lambda_m h})\Bigg\}\cos\frac{2\pi m\eta}{pb}\,dS \tag{5.5}$$

$$\left.\begin{matrix} K_3 \\ K_4 \end{matrix}\right\} = \int\limits_S q(\xi, \eta, \zeta)\operatorname{ch}\lambda_m(\zeta + h)\left\{\begin{matrix}\cos \\ \sin\end{matrix}\right.(\xi\sqrt{\nu\lambda_m \operatorname{th}\lambda_m h})\Bigg\}\sin\frac{2\pi m\eta}{pb}\,dS \tag{5.6}$$

Если в (5.3) положить $d = 0$, то получим волновое сопротивление R^0 для случая движения тела в средней плоскости канала:

$$R^0 = -\frac{\rho\nu}{2b}\sum_{m=0}^{\infty} a(m)[J_1^2(\gamma_m) + J_2^2(\gamma_m) - \tag{5.7}$$

$$- J_3^2(\gamma_m) - J_4^2(\gamma_m) + J_3^2(\mu_m) + J_4^2(\mu_m)]$$

Из (5.7) путем перехода к пределу при $b \to \infty$ [и учитывая еще (4.10)] найдем сопротивление R_0 тела, плавающего на мелководье (без стенок канала):

$$R_0 = -\frac{\rho\nu}{2\pi}\int\limits_{\gamma_0}^{\infty}[K_1^2(\lambda) + K_2^2(\lambda) + K_3^2(\lambda) + K_4^2(\lambda)]\frac{\lambda d\lambda}{\sqrt{\lambda^2 - \nu\lambda\, th\lambda h}\operatorname{ch}^2\lambda h} \tag{5.8}$$

где $\gamma_0 = 0$ при $v \geqslant \sqrt{gh}$; при $v < \sqrt{gh}$ величина γ_0 имеет прежнее значение. Для тел, симметричных относительно плоскости xz (судов), K_3, K_4, J_3, J_4 обращаются в нуль. Если судно симметрично относительно плоскости мидельшпангоута, то и $K_1 = J_1 = 0$.

Если в (5.5) положить:

$$\cos\left[\frac{2\pi m\eta}{pb}\right] \approx 1, \qquad q = -v\frac{\partial\eta}{\partial\xi}$$

то (5.7) сведется к известным решениям задачи о движении тонкого судна в средней плоскости канала [10,11].

Запишем для судна формулу (5.3) в виде

$$R = R^0 + \Delta R \tag{5.9}$$

где R^0 определяется (5.7), а

$$\Delta R = -\frac{\rho\nu}{2b}\sum_{m=0}^{\infty} a(m)\{[J_1^2(\gamma_m) + J_2^2(\gamma_m)][\cos(4\pi md) - 1] + $$
$$+ [J_1^2(\mu_m) + J_2^2(\mu_m)]\sin^2(\pi md)\} \tag{5.10}$$

Возможные пределы изменения d:

$$0 \leqslant d < \frac{1}{2}$$

Для тонкого судна $d_{\max} = \frac{1}{2}$.

$$\Delta R = 0 \qquad \text{при } d = 0$$

$$\Delta R = -\frac{\rho\nu}{b}\sum_{n=1}^{\infty}[J_1^2(\mu_{2n-1}) + J_2^2(\mu_{2n-1})] \qquad \text{при } d = \frac{1}{2} \tag{5.11}$$

т. е.

$$|R| > |R^0|$$

Сопротивление тонкого судна, движущегося в непосредственной близости от одной вертикальной стенки, $R \to 2R_0$ [13].

Численные расчеты волнового сопротивления по формулам для тонкого судна [10, 14] показывают, что число слагаемых ряда (5.7), которое должно быть взято для обеспечения достаточной точности вычислений, зависит от величины ширины канала и скорости судна. При малых значениях этих параметров достаточно вычислять лишь несколько первых корней уравнения (4.10). Проведенное Я. И. Войткунским сравнение расчетных данных по формулам Л. Н. Сретенского с результатами модельных испытаний судов в каналах [14, 15] указывает на возможность оценки влияния ширины канала на волновое сопротивление теоретическим путем. Экспериментальные материалы для практического учета влияния канала на полное сопротивление судна можно найти в работах [16, 17].

Равенства (5.3) — (5.6) дают возможность также получить волновое сопротивление гребного винта, работающего в канале. Расположим ось винта горизонтально в плоскости xz на расстояниях b_1 и b_2 от стенок канала. Диск винта установим в плоскости $\xi = 0$. Тогда найдем

$$R = -\frac{\rho\nu q_p^2}{2b}\sum_{m=0}^{\infty} a(m)\{J_1^2(\gamma_m)\cos(4\pi md) + J_1^2(\mu_m)\sin^2(\pi md)\} \tag{5.12}$$

причем

$$K_1(\lambda_m) = \int\limits_{F_p} \operatorname{ch}\lambda_m(\zeta + h)\cos\left[\frac{2\pi m\eta}{pb}\right]dF \tag{5.13}$$

При $d = 0$ (5.12) переходит в формулу А. М. Басина для сопротивления движителя, расположенного по середине ширины канала [18].

Поступила 15 I 1955

ЛИТЕРАТУРА

1. Хаскинд М. Д. Общая теория волнового сопротивления при движении тела в жидкости конечной глубины. ПММ, т. IX, вып. 3, стр. 257—264, 1945.

2. Костюков А. А. О формулах для вычисления волнового сопротивления и подъемной силы тел, погруженных в жидкость. ПММ, т. XVIII, вып. 2, стр. 225—232, 1954.

3. Кочин Н. Е. О волновом сопротивлении и подъемной силе погруженных в жидкость тел. Собр. соч., т. II, стр. 105—182, 1949.
4. Michell J. H. The Wave-Resistance of a Ship. Philosophical Magazine, Ser. 5, vol. 45, N 272, p. 106—123, 1898.
5. Hogner E. A. Contribution to the Theory of Ship Waves. Arkiv för matematik, astronomi och fysik. Stockholm, bd. 17, N 12, p. 1—50, 1923.
6. Сретенский Л. Н. Теория волновых движений жидкости. Изд. ОНТИ, 1936, стр. 98—108.
7. Havelock T. H. The Propagation of Groups of Waves in Dispersive Media with Application to Waves on Water produced by a Travelling Disturbance. Proceedings of the Royal Society of London, Ser. A, vol. 81, N 549, p. 398—430, 1908.
8. Костюков А. А. К вопросу о волнообразовании при движении корабля. ПММ, т. XVII, вып. 3, стр. 275—284, 1953.
9. Басин А. М. Основы теории взаимодействия движителя с корпусом корабля. Труды ЦНИИ им. А. Н. Крылова, вып. 27, 1948.
10. Сретенский Л. Н. Теоретическое исследование о волновом сопротивлении. Труды ЦАГИ, вып. 319, стр. 47—52, 1937.
11. Келдыш М. В. и Седов Л. И. Теория волнового сопротивления в канале конечной глубины. Труды конференции по теории волнового сопротивления, стр. 143—152, 1937.
12. Havelock T. H. The Calculation of Wave Resistance. Proc. Roy. Soc. Lond. Ser. A, vol. 144, N 853, p. 514—521, 1934.
13. Костюков А. А. Сопротивление тел в жидкости при их движении вблизи вертикальной стенки. ДАН СССР, т. 99, № 3, стр. 349—352, 1954.
14. Апухтин П. А. и Войткунский Я. И. Сопротивление воды движению судов. Машгиз, 1953.
15. Войткунский Я. И. Особенности сопротивления судов в области критической скорости. Труды Ленинградского кораблестроительного института, вып. 11, стр. 3—6, 1953.
16. Костюков А. А. Сопротивление судов в каналах. Водный транспорт, № 9, стр. 15—19, 1939.
17. Войткунский Я. И. К вопросу о выборе оптимальных соотношений поперечных размеров судна и живого сечения канала. Труды Ленинградского кораблестроительного института, вып. 12, стр. 33—40, 1954.
18. Басин А. М. Работа движителя вблизи свободной поверхности. Труды ЦНИИ им. А. Н. Крылова, вып. 26, 1948.