Прикладная математика и механика. Том XIX, 1955
Институт механики Академии наук Союза ССР

О ВЫРОЖДЕНИИ ОДНОРОДНОЙ ИЗОТРОПНОЙ МАГНИТНОГИДРОДИНАМИЧЕСКОЙ ТУРБУЛЕНТНОСТИ В НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

А. Г. Куликовский

(Москва)

В работе к исследованию магнитногидродинамической турбулентности применен метод, предложенный Л. И. Седовым для обычной гидродинамической турбулентности [1].

§ 1. Будем исходить из двух уравнений, выведенных Чандрасекаром [2] для определяющих скаляров моментов корреляций величин, характеризующих магнитодинамическую турбулентность:

$$\frac{\partial Q}{\partial t} = 2\left(r\frac{\partial}{\partial r} + 5\right)(B - S) + 2\nu\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{4}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right)Q \tag{1.1}$$

$$\frac{\partial H}{\partial t} = 2P + 2\lambda\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{4}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right)H \qquad \left(\lambda = \frac{c^2}{4\pi\sigma}\right) \tag{1.2}$$

где c — скорость света, σ — электропроводность жидкости, Q, H, B, S и P — функции r и t, представляющие собой определяющие скаляры следующих тензоров моментов корреляций (штрихом будем обозначать производную по r):

$$\overline{h_i h_j^\circ} = \mathrm{rot}_j H \varepsilon_{ijl}\xi_l = \frac{H'}{r}\xi_i\xi_j - (rH' + 2H)\delta_{ij}, \qquad \overline{u_i u_j^\circ} = \mathrm{rot}_j\, Q\varepsilon_{ijl}\xi_l \tag{1.3}$$

$$\overline{u_i u_j u_k^\circ} = \mathrm{rot}_k\, B(\xi_i\varepsilon_{jkl}\xi_l + \xi_j\varepsilon_{ikl}\xi_l) = \frac{2}{r}B'\xi_i\xi_j\xi_k - (rB' + 3B)(\xi_i\delta_{jk} + \xi_j\delta_{ik}) + 2B\delta_{ij}\xi_k$$

$$\overline{h_i h_j u_k^\circ} = \mathrm{rot}_k S(\xi_i\varepsilon_{jkl}\xi_l + \xi_j\varepsilon_{ikl}\xi_l), \qquad \overline{(h_i u_j - u_i h_j)\, h_k^\circ} = P(\xi_i\delta_{jk} - \xi_j\delta_{ik})$$

Здесь u_i, u_i°, h_i, h_i° — скорости и напряженности магнитного соответственно поля в точках X_m и X_m°, ε_{ijk} — единичный тензор, антисимметричный по всем трем индексам, наконец, $\xi_m = X_m^\circ - X_m$, $r = \sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2}$.

Известно [2], что $P(0, t) = 5S(0, t)$. Величины Q, H, B, S, P разлагаются в ряды при малых r;

$$\begin{aligned}
Q(r, t) &= -Q_0(t) + Q_2(t)r^2 + Q_4(t)r^4 + \ldots \\
H(r, t) &= -H_0(t) + H_2(t)r^2 + H_4(t)r^4 + \ldots \\
B(r, t) &= B_2(t)r^2 + B_4(t)r^4 + \ldots \\
S(r, t) &= S_0(t) + S_2(t)r^2 + S_4(t)r^4 + \ldots \\
P(r, t) &= 5S_0(t) + P_2(t)r^2 + P_4(t)r^4 + \ldots
\end{aligned} \tag{1.4}$$

Кроме того, Q, H, B, S, P при $r \to \infty$ стремятся к нулю.

В этой работе мы будем предполагать, что все определяющие скаляры моментов корреляций имеют вид: $M(r, t) = M_0(t)\, m(r / l)$, где l — линейная величина, зависящая от времени. Это предположение аналогично предположению Кармана и Ховарта для обычной турбулентности.

Если рассматривать движение жидкости с бесконечной проводимостью и малыми числами Рейнольдса, то пропадут члены, содержащие λ и B.

§ 2. Рассмотрим вырождение однородной изотропной магнитногидродинамической турбулентности в несжимаемой жидкости с бесконечной проводимостью при малых числах Рейнольдса. В этом случае уравнение для определяющих скаляров моментов корреляций можно взять в виде

$$\frac{\partial Q}{\partial t} = -2\left(r\frac{\partial}{\partial r}+5\right)S + 2\nu\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{4}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right)Q, \qquad \frac{\partial H}{\partial t} = 2P \tag{2.1}$$

Рассматривая эти уравнения при $r=0$ и учитывая (1.4), получим

$$\frac{\partial Q_0}{\partial t} = 10\,S_0 - 10\,\nu Q_2, \qquad \frac{\partial H_0}{\partial t} = -10\,S_0 \tag{2.2}$$

Последние уравнения выражают баланс энергии в магнитногидродинамической турбулентности, так как $Q_0 = {}^1/_6\,\overline{u^2}$, $H_0 = {}^1/_6\,\overline{h^2}$.

Они показывают, что из магнитной компоненты в кинетическую переходит в единицу времени количество энергии, равное $10\,S_0$, в тепло же превращается за счет вязкости количество энергии, равное $10\nu Q_2$.

Магнитногидродинамическую турбулентность имеет смысл рассматривать, когда в правой части первого уравнения (2.1) первый член больше или сравним по величине со вторым. При малых числах Рейнольдса для этого необходимо, чтобы $S \gg B$ или $H_0 > Q_0$. Такие движения будут представлять заключительную стадию вырождения магнитногидродинамической турбулентности с любыми начальными данными. В самом деле, если $Q_0|_{t=0} > H_0|_{t=0}$, то $10\,\nu Q_2 \gg 10\,S_0$, и кинетическая энергия будет убывать по сравнению с магнитной до тех пор, пока $10\,S_0$ не будет сравнимо с $10\,\nu Q_2$, а это возможно при $H_0 > Q_0$.

Теперь воспользуемся предположением, сделанным во введении, что определяющие скаляры моментов корреляций имеют вид:

$$Q = -Q_0 q(r/l), \quad S = S_0 s(r/l), \quad H = -H_0 h(r/l), \quad P = 5S_0 p(r/l) \tag{2.3}$$

где Q_0, H_0, S_0 зависят только от времени, а q, h, s и p — функции $r/l = x$, равные единице при $x=0$ и равные нулю при $x=\infty$.

Подставляя эти выражения в уравнения (2.1), получим

$$-Q_0\frac{1}{l}\frac{dl}{dt}q'x + q\frac{dQ_0}{dt} = 2\left(x\frac{d}{dx}+5\right)S_0 s + \frac{2\nu Q_0}{l^2}\left(\frac{d^2}{dx^2}+\frac{4}{x}\frac{d}{dx}\right)q \tag{2.4}$$

$$-H_0\frac{1}{l}\frac{dl}{dt}h'x + h\frac{dH_0}{dt} = -10\,S_0 p \tag{2.5}$$

Разделив оба уравнения на $10\,S_0$ и дифференцируя по времени, оставляя x постоянным, получим

$$-q'x\frac{d}{dt}\left(\frac{Q_0}{10S_0 l}\frac{dl}{dt}\right) + q\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{10\,S_0}\frac{dQ_0}{dt}\right) = \left(\frac{d^2}{dx^2}+\frac{4}{x}\frac{d}{dx}\right)q\frac{d}{dt}\left(\frac{2\nu Q_0}{10\,S_0\,l^2}\right) \tag{2.6}$$

$$-h'x\frac{d}{dt}\left(\frac{H_0}{10\,S_0 l}\frac{dl}{dt}\right) + h\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{10\,S_0}\frac{dH_0}{dt}\right) = 0 \tag{2.7}$$

Последнее уравнение удовлетворяется, если коэффициенты при h и при $h'x$ одновременно обращаются в нуль.

В противном случае мы имели бы в качестве функции $h(x)$ нуль, константу или x^α. Ни одна из этих функций не согласуется с нашими предположениями о характере функции $h(x)$.

Следовательно, из уравнения (2.7) мы получаем

$$\frac{dl}{dt}=\frac{10\,S_0 l}{H_0}A, \qquad \frac{dH_0}{dt}=-10\,S_0 N \quad (A, N=\text{const}) \tag{2.8}$$

Но рассматривая уравнение (2.5) при $x=0$, получим $N=1$. Уравнение (2.6) удовлетворяется, если либо все коэффициенты уравнения равны нулю, либо между функциями

$$q'x, q, \left(\frac{d^2}{dx^2}+\frac{4}{x}\frac{d}{dx}\right)q$$

существует хотя бы одна линейная связь.

Можно показать, точно так же как в случае обычной гидродинамической турбулентности [1], что при ограничениях, наложенных на $q(x)$, линейная связь может существовать только одна.

Рассмотрим случай, когда все коэффициенты уравнения (2.6) равны нулю. Отсюда получим три уравнения:

$$\frac{dQ_0}{dt}=D\,10S_0, \qquad \frac{dl}{dt}=E\frac{10\,S_0 l}{Q_0}, \qquad \frac{2\nu Q_0}{l^2}=F \qquad (D, E, F=\text{const}) \tag{2.9}$$

Таким образом, для Q_0, H_0, $10S_0$ и l имеем систему (2.8), (2.9).

Из второго уравнения (2.9) и первого уравнения (2.8) находим $Q_0=H_0E/A$. Из уравнения (2.4) при $x=0$, принимая во внимание первое уравнение (2.9), получим

$$\frac{dQ_0}{dt}=10\,S_0+5Fq''(0) \qquad \text{или} \qquad 10\,S_0=\text{const}$$

так как

$$q''(0)\neq 0, \quad D\neq 1, \quad F\neq 0 \quad \text{при } d(H_0+Q_0)/dt\neq 0$$

Из последнего уравнения (2.9) получаем $l=\sqrt{2\nu Q_0/F}$. Функцию $H_0(t)$ определяем из второго уравнения (2.8).

Таким образом, мы получим решение, имеющее следующий вид:

$$10\,S_0=\text{const}, \qquad H_0(t)=H_0(0)-10S_0 t$$

$$\frac{H_0(t)}{Q_0(t)}=\frac{H_0(0)}{Q_0(0)}, \qquad l(t)=\sqrt{\frac{Q_0(t)\,l^2(0)}{Q_0(0)}} \tag{2.10}$$

Система уравнений оказалась совместной, так как из первого уравнения (2.8) и двух первых уравнений (2.9) следует второе уравнение (2.8) при некоторой зависимости между A, D и E. Решение зависит от начальных данных $H_0(0)$, $Q_0(0)$, $l(0)$ и от одной постоянной $10S_0$.

Пусть теперь между функциями от x существует одна линейная связь

$$\left(\frac{d^2}{dx^2}+\frac{4}{x}\frac{d}{dx}\right)q+\frac{a_1}{2}xq'+\frac{a_2}{2}q=0 \tag{2.11}$$

Тогда q будет конфлюэнтной гипергеометрической функцией x^2 так же, как в случае гидродинамической турбулентности [1].

В этом случае коэффициенты уравнения (2.6) должны быть пропорциональны тройке чисел $-{}^1/_2\,a_1$, ${}^1/_2\,a_2$, -1.

Исходя из этого, имеем

$$\frac{\partial Q_0}{\partial t} = -a_2\frac{\nu Q_0}{l^2} + L\,10\,S_0, \qquad \frac{dl}{dt} = a_1\frac{\nu}{l} - b\frac{10\,S_0\,l}{Q_0} \qquad (a_1, a_2, L, b = \mathrm{const}) \tag{2.12}$$

Рассматривая (2.4) при $x = 0$, получим $L = 1$.

Уравнения (2.8), (2.12) образуют замкнутую систему уравнений. Из последних уравнений (2.8) и (2.12) получаем

$$10\,S_0 = \frac{a_1\nu}{l^2}\frac{H_0Q_0}{AQ_0 + bH_0} \tag{2.13}$$

Разделив первое уравнение (2.12) на второе (2.8) и подставляя выражение для $10\,S_0$, получим

$$\frac{dQ_0}{dH_0} = \frac{a_2}{a_1}\frac{AQ_0 + bH_0}{H_0} - 1 \quad \text{или} \quad \frac{Q_0}{H_0} = C_1\,H_0^{\alpha_1 - 1} + \gamma \qquad (C_1 = \mathrm{const}) \tag{2.14}$$

Здесь, а также для дальнейшего введены обозначения:

$$-\frac{ba_2 - a_1}{Aa_2 - a_1} = \gamma, \quad A\frac{a_2}{a_1} = \alpha_1, \qquad b\frac{a_2}{a_1} = \alpha_2, \tag{2.15}$$

Так как по предположению Q_0 / H_0 ограничено при $H \to 0$, то $\alpha_1 \geqslant 1$, и так как $Q_0 / H_0 > 0$, то $\gamma \geqslant 0$, т. е. $\alpha_2 \leqslant 1$. Из (2.8) получим

$$l = C_2\,H_0^{-A} \tag{2.16}$$

При $\gamma = 0$ имеем

$$\frac{dH_0}{dt} = -\frac{a_1\nu}{C_2^2}\frac{H_0^{(2A+\alpha_1+1)}}{AH_0^{\alpha_1} + H_0\,b\,/\,C_1}$$

Интегрируя это уравнение, получим

$$t = \frac{C_2^2}{a_1\nu}\left(\frac{1}{2}H_0^{-2A} + \frac{b}{C_1(2A + \alpha_1 - 1)}H_0^{-(2A+\alpha_1-1)}\right) \tag{2.17}$$

Если $\gamma > 0$, то $Q_0 / H_0 \to \gamma$ при $t \to \infty$. Тогда при достаточно больших t будем иметь

$$\frac{dH_0}{dt} = \frac{a_1\,\nu\gamma}{C_2^2\,(A\gamma + b)}H_0^{2A+1} \qquad \text{или} \qquad t = \frac{C_2^2\,(A\gamma + b)}{2Aa_1\nu\gamma}H_0^{-2A} \tag{2.18}$$

Из (2.17) и (2.18) можно H_0 выразить через t, а из (2.19) можно выразить Q_0 в зависимости от H_0. Решение зависит от постоянных a_1, a_2, A, b, которые не определяются из начальных данных $H_0(0)$, $Q_0(0)$, $l(0)$.

Из последнего уравнения (2.8) и первого уравнения (2.12) получаем

$$\frac{d}{dt}(H_0 + Q_0) = -a_2\frac{\nu Q_0}{l^2} < 0$$

Отсюда $a_2 > 0$. Если предположить, что $l \to \infty$ при $t \to \infty$, т. е. при $H_0 \to 0$, то получим $A \geqslant 0$ и из равенства $Aa_2 / a_1 \geqslant 1$ имеем $a_1 > 0$.

Из физических соображений ясно, что $10\,S_0 > 0$ при малых Q_0. Отсюда $b > 0$. При этих условиях в обоих случаях $t > 0$ при $H_0 > 0$ и $H_0 \to 0$ и $Q_0 \to 0$ при $t \to \infty$, т. е. решение имеет физический смысл.

§ 3. Вместо предположения, что все определяющие скаляры моментов корреляций зависят от r / l, можно было бы сделать более слабое предположение:

$$Q = -Q_0q(r / l_1), \quad H = -H_0h(r / l_2), \quad S = S_0s(r / l_3), \quad P = 5\,S_0p(r / l_4) \tag{3.1}$$

и, исходя из уравнений, которые связывают Q, H, S и P, показать, что $l_1 = l_3$ и $l_2 = l_4$. Для того чтобы получить замкнутую систему уравнений относительно Q_0, H_0 и S_0, достаточно было бы предположить, что $l_1 = l_2$. В обычной турбулентности можно также предположить, что масштабы моментов корреляций второго и третьего порядков различны, и затем доказать, что они равны между собой.

Это доказательство проводится точно таким же способом, как и в случае магнитногидродинамической турбулентности, и поэтому проведем доказательство только для нее. Обозначим

$$\frac{r}{l_1} = x, \qquad \frac{r}{l_3} = k_1(t)\, x, \qquad \frac{r}{l_2} = z, \qquad \frac{r}{l_4} = k_2(t)\, z$$

Подставляя (3.1) в уравнения (2.1), получим

$$-Q_0 \frac{1}{l_1} \frac{dl_1}{dt} q'(x)\, x + \frac{dQ_0}{dt} q(x) =$$

$$= 2\left(k_1 x \frac{d}{dk_1 x} + 5\right) S_0 s(k_1 x) + \frac{2\nu Q_0}{l_1^2}\left(\frac{d^2}{dx^2} + \frac{4}{x}\frac{d}{dx}\right) q(x) \tag{3.2}$$

$$-H_0 \frac{1}{l_2} \frac{dl_2}{dt} h'(z)\, z + \frac{dH_0}{dt} h(z) = -10\, S_0 p(k_2 z) \tag{3.3}$$

Это значит, что $p(k_2 z)$ и $f(k_1 x) = k_1 x\, ds(k_1 x) / d(k_1 x) + 5 s(k_1 x)$ являются комбинациями функций от z и соответственно от x с коэффициентами, зависящими от времени, т. е.

$$f(k_1(t)\, x) = \varphi_1(x)\, a_1(t) + \ldots + \varphi_n(x)\, a_n(t) \tag{3.4}$$

Теперь предположим, что $k_1(t) \neq \mathrm{const}$ и найдется отрезок времени, где $k_1(t)$ монотонно. Тогда $t = t(k_1)$ и a_i можно считать функциями k_1.

Продифференцируем (34) $(n+1)$ раз по k_1. Получим

$$x f'(k_1 x) = \varphi_1(x) \frac{da_1}{dk_1} + \cdots + \varphi_n(x) \frac{da_n}{dk_1}$$

$$x^2 f''(k_1 x) = \varphi_1(x) \frac{d^2 a_1}{dk_1^2} + \cdots + \varphi_n(x) \frac{d^2 a_n}{dk_1^2}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$x^{n+1} f^{(n+1)}(k_1 x) = \varphi_1(x) \frac{d^{(n+1)} a_1}{dk_1^{(n+1)}} + \cdots + \varphi_n(x) \frac{d^{n(+1)} a_n}{dk_1^{n+1}}$$

Между правыми частями этих равенств должна существовать линейная зависимость. Обозначая $k_1 x = y$, можем написать

$$A y^{n+1} f^{(n+1)}(y) + B y^n f^{(n)}(y) + \cdots + F = 0 \qquad (A,\ B, \ldots,\ F \text{ не зависят от } y)$$

Это уравнение Эйлера. Его решение имеет вид:

$$f(y) = \sum_{i=1}^{n+1} b_i\, y^{\alpha_i} (\ln y)^{\delta_i} \qquad (\delta_i \text{ — целые числа})$$

Применим этот результат к рассматриваемому случаю:

$$\left(y \frac{d}{dy} + 5\right) s(y) = \sum_{i=1}^{N} b_i\, y^{\alpha_i} (\ln y)^{n_i} \tag{3.5}$$

$$p(u) = \sum_{i=1}^{M} c_i\, u^{\beta_i} (\ln u)^{m_i} \qquad (u = k_2(t)\, z, \text{ а } n_i \text{ и } m_i \text{ — целые числа}) \tag{3.6}$$

Уравнение (3.6) не соответствует нашим предположениям о характере функции p, так как правая часть либо постоянна, либо имеет особенность в нуле или в бесконечности.

Решая уравнение (3.5), получаем $s(y) = cy^{-5} + \Sigma l_i y^{\gamma_i} (\ln y)^{j_i}$, где j_i — целые числа, а сумма состоит из конечного числа слагаемых. Из тех же соображений и это равенство удовлетвориться не может. Следовательно, наше предположение, что $k_1 \neq \text{const}$ и $k_2 \neq \text{const}$, неверно и масштабы можно считать равными.

§ 4. В заключение сделаем одно замечание о выводах Кармана и Ховарта [3]. Карман и Ховарт рассматривали вопрос о вырождении обычной гидродинамической турбулентности при предположениях

$$\overline{u_1 u_1{}^0} = \overline{u^2} f(\psi), \qquad \overline{u_1 u_2{}^{0\,2}} = \left(\overline{u^2}\right)^{3/2} h(\psi)$$

где

$$\overline{u^2} = \overline{u_1{}^2} + \overline{u_2{}^2} + \overline{u_3{}^2} = \overline{3u_1{}^2}, \qquad \psi = \frac{r}{L}$$

где L — линейная величина, зависящая от времени. Ясно, что $f(0) = 1/3$.

На основе этих предположений и уравнения Навье-Стокса получаем

$$-\frac{df}{d\psi}\psi \frac{1}{\left(\overline{u^2}\right)^{1/2}} \frac{dL}{dt} + f \frac{L}{\left(\overline{u^2}\right)^{3/2}} \frac{d\overline{u^2}}{dt} + 2\left(\frac{dh}{d\psi} + \frac{4h}{\psi}\right) = \frac{\nu}{\left(\overline{u^2}\right)^{1/2} L} \left(\frac{d^2 f}{d\psi^2} + \frac{4}{\psi}\frac{df}{d\psi}\right)$$

Вводя число Рейнольдса $R = \sqrt{\overline{u^2}}\, L / \nu$ и считая, что оно велико, Карман и Ховарт пренебрегают правой частью равенства и получают

$$\psi \frac{df}{d\psi} \frac{\overline{u^2}}{L} \frac{dL}{dt} + f \frac{10\nu \overline{u^2}}{\lambda^2} - 2\left(\frac{dh}{d\psi} + \frac{4h}{\psi}\right) \frac{\left(\overline{u^2}\right)^{3/2}}{L} = 0 \qquad \left(\lambda^2 = -10\nu \frac{\overline{u^2}}{d\overline{u^2}/dt}\right) \tag{4.1}$$

Далее пишут: «чтобы это уравнение удовлетворялось, необходимо чтобы коэффициенты его были пропорциональны:

$$\sqrt{\overline{u^2}} \frac{\lambda^2}{L\nu} = A, \qquad \frac{dL}{dt} = B\sqrt{\overline{u^2}}$$

В связи с этим выводом Кармана и Ховарта заметим, что эти равенства вместе с уравнением (4.1) приводят к равенству $A^{-1} = 0$.

В самом деле, рассматривая уравнение (4.1) при $\psi = 0$, получим, что, $\nu / \lambda^2 = 0$ или $d\overline{u^2} / dt = 0$, так как

$$h = a_3 \psi^3 + a_5 \psi^5 + \cdots, \qquad [\psi df / d\psi]_{\psi=0} = 0$$

Таким образом, получается, что $\overline{u^2} = \text{const}$, т. е. средняя кинетическая энергия не изменяется. Так получилось потому, что были выброшены все диссипативные члены.

Поступила 1 июня 1955

ЛИТЕРАТУРА

1. Седов Л. И. Методы размерности и подобия в механике (стр. 127—153).
2. Chandrasekhar S. The Invariant Theory of Isotropic Turbulence in Magneto-Hydrodynamics. Proc. Roy. Soc., **204 A**, 435, 1951.
3. Karman and Howarth. On the Statistical Theory of Isotropic Turbulence. Proc. Roy. Soc., **A 164**, № 917, 1938.