Прикладная математика и механика. Том XIX, 1955
Институт механики Академии наук Союза ССР

К ТЕОРИИ НЕУСТАНОВИВШИХСЯ ДВИЖЕНИЙ ГАЗА С УЧЕТОМ СИЛ ТЯГОТЕНИЯ

М. Л. Лидов

(Москва)

§ 1. При наличии сферической симметрии, в случае, когда световым давлением можно пренебречь, система уравнений, описывающих распределение характеристик состояния внутри звезды при равновесии, может быть взята в виде [1]

$$\frac{1}{\rho_0}\frac{dp_0}{dr} + f\frac{m_0}{r^2} = 0, \qquad m_0 = 4\pi\int_0^r r^2\rho_0\,dr, \qquad \frac{R_0T_0}{\mu_0} = \frac{p_0}{\rho_0} \tag{1.1}$$

где ρ_0 — плотность, p_0 — давление, m_0 — масса, T_0 — абсолютная температура, R_0 — абсолютная газовая постоянная, μ_0 — молекулярный вес, а f — гравитационная постоянная.

При некоторых физически допустимых дополнительных предположениях для описания существенно неустановившихся одномерных движений тяготеющей массы газа можно принять следующую систему уравнений [1]:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{\partial\rho u}{\partial r} + \frac{2\rho u}{r} = 0, \qquad \frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r} + \frac{fm}{r^2} = 0$$

$$\frac{\partial m}{\partial r} - 4\pi r^2\rho = 0, \qquad \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{p}{\rho^\gamma}\right) + u\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{p}{\rho^\gamma}\right) = 0 \tag{1.2}$$

где u — скорость, t — время, γ — показатель адиабаты.

При изучении неустановившихся движений гравитирующей массы газа для установления ряда основных закономерностей существенную роль играют точные решения системы (1.2) с начальными условиями, определяемыми системой (1.1).

В настоящее время получение таких решений в основном опирается на автомодельную постановку задачи о равновесии и движении газа, предложенную Л. И. Седовым [1]. Основные допущения и результаты автомодельной постановки задач сводятся к следующему: если предположить, что начальное распределение характеристик зависит лишь от трех параметров r, A и f с независимыми размерностями вида

$$[r] = L, \qquad [f] = \frac{L^3}{MT^2}, \qquad [A] = ML^kT^s$$

то система (1.1) имеет следующее решение:

$$\rho_0 = \beta_0 A^{2/(2-s)} f^{s/(2-s)} r^{\alpha}, \qquad p_0 = -\frac{2\pi\beta_0^2}{(\alpha+1)(\alpha+3)} A^{4/(2-s)} f^{2+s/(2-s)} r^{2\alpha+2}$$

$$m_0 = \frac{4\pi\beta_0}{\alpha+3} A^{2/(2-s)} f^{s/(2-s)} r^{\alpha+3} \qquad \left(\alpha = -2\,\frac{k+3}{2-s}\right) \tag{1.3}$$

$$\frac{R_0 T_0}{\mu_0} = -\frac{2\pi\beta_0}{(\alpha+1)(\alpha+3)} (Af)^{2/(2-s)} r^{\alpha+2}$$

где β_0 — произвольная постоянная.

Введенные постоянные A и f посредством начальных условий будут определяющими и для неустановившихся движений, и, чтобы рассматриваемое движение было автомодельным, необходимо, чтобы константы, определяющие движение, имели размерность, зависимую от размерности A и f. При этом можно принять [1], что характеристики движения определяются размерными параметрами: постоянными A, f, A_1 и переменными t и r, причем $[A_1] = ML^k T^s$ и $[t] = T$. Кроме того, автомодельность задачи не нарушится, если движение будет зависеть еще от каких-либо безразмерных постоянных комбинаций других параметров.

Пусть движение возникает благодаря выделению энергии E в центре симметрии; задача будет автомодельной, если для закона выделения энергии справедлива формула [1]:

$$E = \delta f^{\frac{2-k}{3+k}} A_1^{\frac{5}{3+k}} t^{-\frac{5s+4k+2}{k+3}}$$

В частном случае мгновенного выделения энергии необходимо, чтобы $E = \delta A_1$, $k = 2$ и $s = -2$, где δ — безразмерная постоянная.

В автомодельном случае можно ввести в рассмотрение безразмерные функции [1] по формулам

$$u = \frac{r}{t} f(\lambda), \qquad \rho = \frac{1}{ft^2} g(\lambda), \qquad m = \frac{r^3}{ft^2} \mu(\lambda), \qquad p = \frac{r^2}{ft^4} h(\lambda) \tag{1.4}$$

где $f(\lambda)$, $g(\lambda)$, $h(\lambda)$ и $\mu(\lambda)$ — безразмерные величины, зависящие от одного переменного параметра

$$\lambda = r (A_1 f)^{-\frac{1}{k+3}} t^{-\frac{2-s}{k+3}} \tag{1.5}$$

Если подставить (1.4) в систему (1.2), то задача сводится к решению системы четырех нелинейных обыкновенных уравнений [1].

В общем случае при внезапном выделении энергии в центре звезды образуется ударная волна, которая распространяется по частицам газа. На ударной волне должны выполняться [1] следующие условия:

$$u_2 = \frac{2}{\gamma+1} D \left(1 - \frac{a_0^2}{D^2}\right)$$

$$\rho_2 = \frac{\gamma+1}{\gamma-1} \rho_0 \left(1 + \frac{2}{\gamma-1}\,\frac{a_0^2}{D^2}\right)^{-1} \qquad \left(a_0^2 = \frac{\gamma p_0}{\rho_0}\right) \tag{1.6}$$

$$m_2 = m_0, \qquad p_2 = \frac{2}{\gamma+1} \rho_0 D^2 \left(1 - \frac{\gamma-1}{2\gamma}\,\frac{a_0^2}{D^2}\right)$$

где D — скорость распространения скачка, a_0^2 — квадрат скорости звука в невозмущенном состоянии. Для радиуса ударной волны имеем[1]:

$$r_2(t) = \lambda^* (A_1 f)^{\frac{1}{k+3}} t^{\frac{2-s}{k+3}} \qquad (\lambda^* = \mathrm{const})$$

Для вычислений удобно включить λ^* в численное значение A_1 и считать, что на ударной волне $\lambda = 1$.

Если подставим (1.3) и (1.4) в (1.6), то получим граничные условия для безразмерной системы обыкновенных уравнений. Для этой системы всегда существуют два конечных соотношения: интеграл массы [1], интеграл адиабатичности [3], и задачу можно свести к решению двух обыкновенных уравнений. В случае, когда показатели в размерности A удовлетворяют [1] условию $5s + 4k + 2 = 0$, существует третий интеграл— интеграл энергии — и для получения решения необходимо проинтегрировать одно обыкновенное уравнение первого порядка.

Полная система четырех уравнений была численно проинтегрирована[2] для случая $\gamma = {}^5/_3$, $s = -2$, $k = 2$. В книге [1] приведены результаты исследования задачи о взрыве с учетом гравитации для случая $k = 2$, $s = -2$, $\gamma = {}^4/_3$ и $\gamma = {}^5/_3$. Причем при решении были использованы существующие интегралы системы.

При тех же значениях параметров ($s = -2$, $k = 2$, $\gamma = {}^4/_3$) для случая

$$q_0 = -\frac{2\pi\gamma (k+3)^2 \beta_0}{(2k+3s)(4+s+2k)} \left(\frac{A}{A_1}\right)^{\frac{2}{2-s}} = \frac{1}{36}$$

имеет место простое аналитическое решение системы (1.2) с граничными условиями (1.6) в виде

$$u = \frac{r}{t}\,\frac{2}{3}, \qquad \rho = \frac{1}{ft^2}\,\frac{3}{100\pi}, \qquad p = \frac{r^2}{ft^4}\,\frac{41}{150}\,\frac{1}{100\pi}, \qquad m = \frac{r^3}{ft^2}\,\frac{4}{100} \tag{1.7}$$

В приведенной постановке задачи о равновесии и движении гравитирующей сферической массы газа характеристики в определенных областях обладают рядом свойств, не реальных с физической точки зрения. Так, например, при равновесии имеет место бесконечное давление и плотность в центре симметрии, бесконечная энергия в любом шаре, описанном из центра при некоторых значениях s и k, неограниченность звезды, а также, желая получить конечное значение массы в произвольном ограниченном объеме и сохранить автомодельность задачи, мы приходим к бесконечному значению массы во всем пространстве. Однако, используя имеющиеся результаты, можно прокорректировать решения методом линеаризации исходных систем уравнений около известных автомодельных движений.

§ 2. Рассмотрим сформулированную задачу в линейной постановке, при этом будем считать, что конечная масса звезды распределена по шару от $r = 0$ до $r = r_0$.

а) *Равновесие конечной, ограниченной массы газа.* В общем случае равновесие тяготеющей массы газа со сферической симметрией определяется переменной величиной r и тремя существенными постоянными параметрами [1]. Примем за такие параметры величины A, f, r_0, где введенная нами величина r_0 имеет размерность длины и может трактоваться как радиус рассматриваемой звезды. В этом случае характеристики равновесия, входящие в систему (1.1), при прежних обозначениях можно представить в виде

$$\begin{aligned}\rho_0 &= A^{\frac{2}{2-s}} f^{\frac{s}{2-s}} r^{\alpha} R_0^{\circ}(\eta) \\ p_0 &= A^{\frac{4}{2-s}} f^{\frac{2+s}{2-s}} r^{2\alpha+2} P_0^{\circ}(\eta) \\ m_0 &= A^{\frac{2}{2-s}} f^{\frac{s}{2-s}} r^{\alpha+3} M_0^{\circ}(\eta)\end{aligned} \tag{2.1}$$

где $\eta = r / r_0$ — безразмерный параметр, а R_0°, P_0°, M_0°, T_0° — безразмерные функции, связанные уравнениями, получающимися при подстановке (2.1) в систему (1.1):

$$\eta^{\alpha+3}\left[2(\alpha+1) P_0^{\circ}(\eta) + \eta \frac{dP_0^{\circ}(\eta)}{d\eta}\right] + 4\pi R_0^{\circ}(\eta) \int_0^{\eta} \eta^{\alpha+2} R_0^{\circ}(\eta)\, d\eta = 0$$

$$\eta^{\alpha+3} M_0^{\circ}(\eta) = 4\pi \int_0^{\eta} \eta^{\alpha+2} R_0^{\circ}(\eta)\, d\eta \tag{2.2}$$

Будем полагать, что при $\eta = 0$ характеристики в положении равновесия будут определяться решением (1.3). Последняя предпосылка будет выполнена, если возьмем $R_0^{\circ}(\eta) = \beta_0 + \beta_1\eta + \beta_2\eta^2 + \ldots$.

В частности, для рассматриваемой в дальнейшем задачи можно положить $\beta_1 = \beta_0$, а $\beta_j = 0$ при $j > 1$. Это условие как следствие дает, что при $r = r_0$ плотность равна нулю и при $r > r_0$ ее можно считать везде равной нулю. В этом случае для $R_0^{\circ}(\eta)$, $P_0^{\circ}(\eta)$ и $M_0^{\circ}(\eta)$ имеем

$$\begin{aligned}&R_0^{\circ}(\eta) = \beta_0(1-\eta), \qquad M_0^{\circ}(\eta) = \frac{4\pi\beta_0}{\alpha+3}\left(1 - \frac{\alpha+3}{\alpha+4}\eta\right) \\ &P_0^{\circ}(\eta) = -\frac{2\pi\beta_0^2}{(\alpha+1)(\alpha+3)}\left[1 - 2\eta\frac{(\alpha+1)(2\alpha+7)}{(2\alpha+3)(\alpha+4)} + \right. \\ &\qquad\qquad \left. + \eta^2 \frac{(\alpha+1)(\alpha+3)}{(\alpha+2)(\alpha+4)}\right] + c\eta^{-2(\alpha+1)}\end{aligned} \tag{2.3}$$

Постоянную c можно определить из условия $P_0^{\circ}(1) = 0$. Условие $dp_0/dr = 0$ на границе выполняется автоматически в силу (1.1). Если A имеет размерность энергии ($k = 2, s = -2, \alpha = -2.5$), то на границе $p_0 = 0$ и $dp_0/dr = 0$ при $c = 0$.

б) *Линеаризированная система уравнений и ее интегралы.* Пусть некоторое неустановившееся движение, определяемое системой (1.2), кроме параметров A, f, r, t, A_1, существенных для автомодельных движений, зависит еще от введенного нами радиуса r_0.

В этом случае характеристики движения можно представить в следующем безразмерном виде:

$$u = \frac{r}{t} V^{\circ}(\lambda, \eta), \quad \rho = \frac{1}{ft^2} R^{\circ}(\lambda, \eta), \quad P = \frac{r^2}{ft^4} P^{\circ}(\lambda, \eta), \quad m = \frac{r^3}{ft^2} M^{\circ}(\lambda, \eta) \tag{2.4}$$

где безразмерный параметр λ согласно (1.5), а $\eta = r / r_0$; функции V°, R°, P°, M° при $\eta \to 0$ ($r_0 \to \infty$) стремятся к характеристикам соответствующего автомодельного движения.

Если подставить (2.4) в систему (1.2), получим систему уравнений для безразмерных функций в виде

$$\lambda\left\{\left(\frac{2-s}{k+3}-V^\circ\right)\frac{\partial V^\circ}{\partial\lambda}-\frac{1}{R^\circ}\frac{\partial P^\circ}{\partial\lambda}\right\}=M^\circ+V^{\circ 2}-V^\circ+\frac{2P^\circ}{R^\circ}+\eta V^\circ\frac{\partial V^\circ}{\partial\eta}+\frac{\eta}{R^\circ}\frac{\partial P^\circ}{\partial\eta}$$

$$\lambda\left\{\frac{\partial V^\circ}{\partial\lambda}-\left(\frac{2-s}{k+3}-V^\circ\right)\frac{\partial R^\circ}{\partial\lambda}\frac{1}{R^\circ}\right\}=2-3V^\circ-\frac{V^\circ}{R^\circ}\eta\frac{\partial R^\circ}{\partial\eta}-\eta\frac{\partial V^\circ}{\partial\eta} \tag{2.5}$$

$$\lambda\left\{\gamma\frac{\partial V^\circ}{\partial\lambda}-\left(\frac{2-s}{k+3}-V^\circ\right)\frac{\partial P^\circ}{\partial\lambda}\frac{1}{P^\circ}\right\}=4-(3\gamma+2)V^\circ-\frac{V^\circ}{P^\circ}\eta\frac{\partial P^\circ}{\partial\eta}-\gamma\eta\frac{\partial V^\circ}{\partial\eta}$$

$$\lambda\frac{\partial M^\circ}{\partial\lambda}+\eta\frac{\partial M^\circ}{\partial\eta}=4\pi R^\circ-3M^\circ$$

Соответствующую систему автомодельных уравнений можно получить из (2.5), если заменить частные производные по λ на обыкновенные, а производные по η положить равными нулю.

В области, где η мало, искомые функции можно представить в виде

$$V^\circ(\lambda,\eta)=f(\lambda)+\eta V(\lambda)+O(\eta^2)$$

$$R^\circ(\lambda,\eta)=g(\lambda)+\eta R(\lambda)+O(\eta^2) \tag{2.6}$$

$$P^\circ(\lambda,\eta)=h(\lambda)+\eta P(\lambda)+O(\eta^2)$$

$$M^\circ(\lambda,\eta)=\mu(\lambda)+\eta M(\lambda)+O(\eta^2)$$

Если подставить выражения (2.6) в уравнения (2.5), то, пренебрегая членами, содержащими квадрат величины η, и учитывая, что $f(\lambda)$, $g(\lambda)$, $h(\lambda)$ и $\mu(\lambda)$ суть решения соответствующей безразмерной системы автомодельных уравнений, приходим к следующим уравнениям, которым удовлетворяют функции $P(\lambda)$, $R(\lambda)$, $V(\lambda)$ и $M(\lambda)$:

$$\frac{dV}{d\lambda}\left[\lambda\left(\frac{2-s}{k+3}-f(\lambda)\right)\right]+\frac{dP}{d\lambda}\left[-\frac{\lambda}{g(\lambda)}\right]+V\left[1-3f(\lambda)-\lambda\frac{df(\lambda)}{d\lambda}\right]+$$
$$+P\left[-\frac{3}{g(\lambda)}\right]+R\left[\frac{\lambda(dh(\lambda)/d\lambda)+2h(\lambda)}{g^2(\lambda)}\right]-M=0$$

$$\frac{dV}{d\lambda}[\lambda g(\lambda)]-\frac{dR}{d\lambda}\left[\lambda\left(\frac{2-s}{k+3}-f(\lambda)\right)\right]+V\left[\lambda\frac{dg(\lambda)}{d\lambda}+4g(\lambda)\right]+$$
$$+R\left[4f(\lambda)+\lambda\frac{df(\lambda)}{d\lambda}-2\right]=0 \tag{2.7}$$

$$\frac{dV}{d\lambda}[\gamma\lambda h(\lambda)]-\frac{dP}{d\lambda}\left[\lambda\left(\frac{2-s}{k+3}-f(\lambda)\right)\right]+V\left[h(\lambda)(2+4\gamma)+\lambda\frac{dh(\lambda)}{d\lambda}\right]+$$
$$+P\left[\gamma\lambda\frac{df(\lambda)}{d\lambda}+3(1+\gamma)f(\lambda)-4\right]=0$$

$$4M+\lambda\frac{dM}{d\lambda}=4\pi R$$

Ниже указываются конечные соотношения между искомыми функциями P, R, V и M, которые позволят понизить порядок системы (2.7).

1. Так как рассматриваемое движение является адиабатическим и система (2.7) есть система уравнений, линеаризированных около автомодельного движения, то P, R и V должны удовлетворять [4] соотношению адиабатичности, которое в принятых здесь обозначениях можно написать в следующем виде:

$$\lambda^{2z^*+4}\left(\frac{h(\lambda)}{g^{\gamma}(\lambda)}\right)^{z^*}\left\{g(\lambda)V - z^*\left(\frac{2-s}{k+3} - f(\lambda)\right)\frac{g(\lambda)}{h(\lambda)}P - \right.$$
$$\left. - \left[(1-\gamma z^*)\left(\frac{2-s}{k+3} - f(\lambda)\right)\right]R\right\} = c_1 \tag{2.8}$$

где c_1 — постоянная, определяемая из граничных условий, а

$$z^* = \frac{1-2(2-s)/(k+3)}{\gamma-2+(2-s)/(k+3)}$$

2. Рассмотрим интеграл

$$m' = \int_0^{r'(t)} 4\pi r^2\rho\, dr = \frac{r'^3}{ft^2}M^{\circ}(\lambda', \eta') \tag{2.9}$$

где

$$r'(t) = (A_1 f)^{\frac{1}{k+3}} t^{\frac{2-s}{k+3}}\lambda', \qquad \eta' = \frac{r'(t)}{r_0}$$

а λ' — произвольное фиксированное значение параметра. Если продифференцировать (2.9) по времени, то, принимая во внимание закон сохранения массы, получим

$$4\pi r'^2\rho'\left(\frac{dr'}{dt} - u'\right) = \left(3\,\frac{2-s}{k+3} - 2\right)M^{\circ}(\lambda', \eta')\frac{r'^3}{ft^3} + \frac{r'^3}{ft^2}\,\frac{\partial M^{\circ}(\lambda', \eta')}{\partial\eta}\,\frac{dr'}{dt}\,\frac{1}{r_0}$$

Используя (2.4) и (2.6) и пренебрегая членами порядка η^2, напишем последнее равенство в безразмерном виде:

$$4\pi(g(\lambda') + \eta' R(\lambda'))\left(\frac{2-s}{k+3} - f(\lambda') - \eta' V(\lambda')\right) =$$
$$= \frac{2-s}{k+3}\eta' M(\lambda') - \frac{?s+2k}{k+3}(\mu(\lambda') + \eta' M(\lambda'))$$

Если продифференцировать это равенство по η' и положить $\eta' = 0$, то в силу произвольности λ' получим искомое соотношение:

$$\frac{2-4s-2k}{k+3}M(\lambda) = 4\pi\left(\frac{2-s}{k+3} - f(\lambda)\right)R(\lambda) - 4\pi g(\lambda)V(\lambda) \tag{2.10}$$

3. Для величины полной энергии газа (кинетическая + внутренняя + + потенциальная), заключенного между двумя сферами:

$$r''(t) = (A_1 f)^{\frac{1}{k+3}} t^{\frac{2-s}{k+3}}\lambda'', \qquad r'(t) = (A_1 f)^{\frac{1}{k+3}} t^{\frac{2-s}{k+3}}\lambda'$$

где λ'' и λ' — произвольные фиксированные значения λ, можно написать следующее выражение [1]:

$$\varepsilon = \int_{r'(t)}^{r''(t)}\left(\frac{\rho u^2}{2} + \frac{p}{\gamma-1} - \frac{f\rho m}{r}\right)4\pi r^2 dr = K(\lambda', \lambda'', \nu)\, f^{\frac{2-k}{k+3}} A_1^{\frac{5}{k+3}}\, t^{-\frac{5s+4k+2}{k+3}}$$

Правая часть этого равенства написана из соображений размерности, причем $K(\lambda', \lambda'', \nu)$ некоторая функция,

$$\nu = \frac{1}{r_0}(A_1 f)^{\frac{1}{k+3}} t^{\frac{2-s}{k+3}}$$

Если продифференцировать последнее соотношение по времени, то с учетом закона изменения полной энергии получим:

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \left\{4\pi r^2\left[\frac{p}{\gamma-1} + \frac{\rho u^2}{2} - \frac{f\rho m}{r}\right)\left(\frac{dr}{dt} - u\right) - pu\right]\Big\}_{r=r'(i)}^{r=r''(t)} =$$
$$= A_1^{\frac{5}{k+3}} f^{\frac{2-k}{k+3}} t^{\frac{5s+4k+2}{k+3}-1}\left[-\frac{5s+4k+2}{k+3}K + \frac{2-s}{k+3}\nu\frac{\partial K}{\partial \nu}\right]$$

В безразмерных переменных (2.4) это соотношение имеет вид:

$$\Big\{4\pi\lambda^5\left[\left(\frac{R^\circ(\lambda,\lambda\nu)V^{\circ 2}(\lambda,\lambda\nu)}{2} + \frac{P^\circ(\lambda,\lambda\nu)}{\gamma-1} - R^\circ(\lambda,\lambda\nu)M^\circ(\lambda,\lambda\nu)\right)\left(\frac{2-s}{k+3} -\right.\right.$$
$$\left.\left. - V^\circ(\lambda,\lambda\nu)\right) - P^\circ(\lambda,\lambda\nu)V^\circ(\lambda,\lambda\nu)\right]\Big\}_{\lambda=\lambda'}^{\lambda=\lambda''} =$$
$$= -\frac{5s+4k+2}{k+3}K(\lambda',\lambda'',\nu) + \frac{2-s}{k+3}\nu\frac{\partial K(\lambda',\lambda'',\nu)}{\partial\nu}$$

Если продифференцировать последнее равенство по ν и положить $\nu = 0$, то после несложных преобразовании получим новое конечное соотношение между $P(\lambda)$, $V(\lambda)$, $R(\lambda)$ и $M(\lambda)$ в случае, если $3s + 4k = 0$, в следующем виде:

$$4\pi\lambda^6\Big\{P\left[f(\lambda) - \frac{1}{\gamma-1}\left(\frac{2-s}{k+3} - f(\lambda)\right)\right] - R\left[\left(\frac{2-s}{k+3} - f(\lambda)\right)\left(\frac{f^2(\lambda)}{2} - \mu(\lambda)\right)\right] +$$
$$+ V\left[\frac{\gamma}{\gamma-1}h(\lambda) - f(\lambda)g(\lambda)\frac{2-s}{k+3} + \frac{3}{2}f(\lambda)g^2(\lambda) - g(\lambda)\mu(\lambda)\right] +$$
$$+ M\left[g(\lambda)\left(\frac{2-s}{k+3} - f(\lambda)\right)\right]\Big\} = \mathrm{const} \tag{2.11}$$

Однако ограничение $3s + 2k = 0$ существенно, так как (2.11) не будет справедливо в случае мгновенного выделения энергии, т. е. в том случае, когда существует интеграл энергии для основного автомодельного решения. Равенство (2.11) будет справедливо, если энергия выделяется в центре по закону

$$E = \delta f^{\frac{2-k}{k+3}} A_1^{\frac{5}{k+2}} t^{-\frac{6-2k}{3(k+3)}}$$

Случай $k = 3$, $s = -2$ неприемлем, так как при этом согласно (2.1) в равновесном состоянии в центре имеется бесконечная масса.

Если воспользоваться соотношениями (2.8) и (2.10), то, заменяя $R(\lambda)$ и $M(\lambda)$ в первом уравнении системы (2.7), задачу можно свести к интегрированию следующих двух уравнений:

$$D_1(\lambda)\frac{dV}{d\lambda} + D_2(\lambda)\frac{dP}{d\lambda} + D_3(\lambda)V + D_4(\lambda)P + D_5(\lambda) = 0$$
$$B_1(\lambda)\frac{dV}{d\lambda} + B_2(\lambda)\frac{dP}{d\lambda} + B_3(\lambda)V + B_4(\lambda)P = 0$$

где

$$D_1(\lambda) = \lambda\left(\frac{2-s}{k+3} - f(\lambda)\right), \quad D_2(\lambda) = -\frac{\lambda}{g(\lambda)}$$

$$
\begin{gathered}
D_3(\lambda) = 1 - 3f(\lambda) - \lambda\frac{df(\lambda)}{d\lambda} + \frac{\varphi(\lambda)}{(1-\gamma z^*)\psi(\lambda)} - \frac{4\pi\gamma z^*}{(1-\gamma z^*)}\frac{k+3}{(2-4s-2k)}g(\lambda)\\
D_4(\lambda) = -\frac{3}{g(\lambda)} - \frac{z^*}{1-\gamma z^*}\frac{\varphi(\lambda)}{g(\lambda)\,h(\lambda)} + \frac{4\pi z^*(k+3)}{2-4s-2k}\frac{\psi(\lambda)}{(1-\gamma z^*)h(\lambda)}\\
D_5(\lambda) = \frac{c_1}{1-\gamma z^*}\left(\frac{h(\lambda)}{g^{\gamma}(\lambda)}\right)^{-z^*}\lambda^{-2z^*-4}\left[\frac{4\pi(k+3)}{2-4s-2k} - \frac{\varphi(\lambda)}{g(\lambda)\,\psi(\lambda)}\right] \qquad (2.12)\\
\varphi(\lambda) = \lambda\frac{dh(\lambda)}{d\lambda} + 2h(\lambda), \qquad \psi(\lambda) = g(\lambda)\left(\frac{2-s}{k+3} - f(\lambda)\right)\\
B_1(\lambda) = \gamma\lambda h(\lambda), \qquad B_3(\lambda) = h(\lambda)(2+4\gamma) + \lambda\frac{dh(\lambda)}{d\lambda}\\
B_2(\lambda) = -\lambda\left(\frac{2-s}{k+3} - f(\lambda)\right), \qquad B_4(\lambda) = \gamma\lambda\frac{df(\lambda)}{d\lambda} + 3(1+\gamma)f(\lambda) - 4
\end{gathered}
$$

в) *Граничные условия.* Если в центре симметрии мгновенно или по какому-либо закону выделится энергия, то по газу от центра будет распространяться ударная волна, отделяющая область возмущенной среды от среды, находящейся в равновесном состоянии. Из соображений размерности [1] для рассматриваемых задач закон распространения ударной волны можно представить в виде

$$
r_2(t) = (A_1 f)^{\frac{1}{k+3}} t^{\frac{2-s}{k+3}} \lambda^{\circ}(\nu), \qquad \nu = \frac{1}{r_0}(A_1 f)^{\frac{1}{k+3}} t^{\frac{2-s}{k+3}} \tag{2.13}
$$

где ν — безразмерная переменная, а $\lambda^{\circ}(\nu)$ — неизвестная функция.

Для линеаризированной задачи функцию $\lambda^{\circ}(\nu)$ можно представить $\lambda^{\circ}(\nu) = 1 + a\nu$, где a — константа, подлежащая определению.

Здесь мы так же, как это сделано в автомодельных задачах [1], включили некоторую постоянную λ^* в значения величины A_1. Из (2.13) для скорости распространения ударной волны D сразу получим формулу

$$
D = \frac{2-s}{k+3}(A_1 f)^{\frac{1}{k+3}} t^{-\frac{k+s+1}{k+3}}(1 + 2a\nu) \tag{2.14}
$$

Если теперь подставим в (1.6) значения начальных характеристик p_0, ρ_0, m_0 по формулам (2.1) и (2.3) выражения для искомых функций по формулам (2.4) и (2.6) при значениях $r = r_2(t)$ и выражение для скорости ударной волны (2.14), то после перехода к безразмерным переменным и учитывая, что $f(\lambda)$, $h(\lambda)$, $g(\lambda)$, $\mu(\lambda)$ удовлетворяют на ударной волне соответствующим соотношениям, получим следующие граничные условия:

$$
\begin{gathered}
V(1) = -\frac{df}{d\lambda}(1)\,a + \frac{2}{\gamma+1}\frac{2-s}{k+3}[a(1-q_0) - d_1 q_0]\\
M(1) = -\frac{d\mu}{d\lambda}(1)\,a + \mu(1)\left(\alpha a - \frac{\alpha+3}{\alpha+4}\right)\\
R(1) = -\frac{dg(1)}{d\lambda}a + g(1)\left(\alpha a - 1 - \frac{2q_0/(\gamma-1)}{1+2q_0/(\gamma-1)}\,d_1\right) \qquad (2.15)\\
P(1) = -\frac{dh(1)}{d\lambda}a + h(1)\left[(\alpha+2)\,a - 1 - \frac{(\gamma-1)\,q_0/2\gamma}{1-(\gamma-1)\,q_0/2\gamma}\,d_1\right]
\end{gathered}
$$

где

$$
q_0 = -\frac{2\pi\gamma(k+3)^2\beta_0}{(2k+3s)(2k+s+4)}\left(\frac{A}{A_1}\right)^{\frac{2}{2-s}}, \qquad d_1 = a(\alpha-2) - \frac{2\alpha^2+7\alpha+2}{(2\alpha+3)(\alpha+4)}
$$

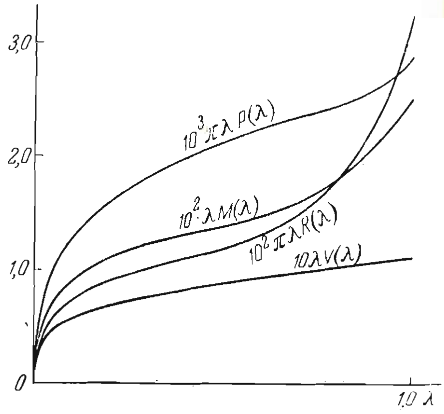
При выводе этих соотношений мы полагали, что $-2(\alpha+1)>1$, и последним членом в выражении $P_0^\circ(\eta)$ в (2.3) пренебрегали.

Постоянную a можно будет определить, если воспользоваться условием равенства нулю скорости в центре симметрии (если решение справедливо до центра) или условием на поверхности контактного разрыва (в случае, если вблизи центра образуется область расширяющейся пустоты) [1].

В общем случае искомые характеристики следует представить в виде

$$V(\lambda) = V^1(\lambda) + aV^2(\lambda),$$
$$P(\lambda) = P^1(\lambda) + aP^2(\lambda)$$
$$R(\lambda) = R^1(\lambda) + aR^2(\lambda),$$
$$M(\lambda) = M^1(\lambda) + aM^2(\lambda)$$

и интегрировать отдельно системы уравнений для функций с индексом 1 и 2 при соответствующем разделении граничных условий (2.15). Для каждой из систем мы имеем задачу Коши.



Фиг. 1

Из вывода видно, что все рассуждения этого раздела будут справедливыми при исследовании иных малых отклонений от автомодельных движений, не вызывающих нарушения сферической симметрии.

§ 3. Рассмотрим в качестве примера линеаризированную задачу о мгновенном точечном взрыве в среде с $\gamma = 4/3$, которая решается в замкнутом виде. В этом случае $s=-2$, $k=2$ и $\alpha=-2.5$. Если предположить, что параметры β_0, A, A_1 удовлетворяют условию $q_0 = 1/36$, то основным автомодельным решением для $r_0=\infty$ будет решение (1.7), и задачу можно довести до результата, не прибегая к численному интегрированию.

Для рассматриваемой задачи имеем

$$f(\lambda) = \frac{2}{3}, \quad g(\lambda) = \frac{3}{100\pi}, \quad h(\lambda) = \frac{41}{3\cdot 50}\,\frac{1}{100\pi}, \quad \mu(\lambda) = \frac{4}{100}$$

Если обозначим $100\pi P(\lambda) = P_1(\lambda)$ и $100\pi R(\lambda) = R_1(\lambda)$, то система (2.7) для данной задачи будет иметь вид:

$$\begin{gathered}
\frac{2}{15}\lambda\frac{dV}{d\lambda} - \frac{1}{3}\lambda\frac{dP_1}{d\lambda} - V - P_1 + \frac{41}{27\cdot 25}R_1 - M = 0 \\
\lambda\frac{dV}{d\lambda} - \frac{2}{45}\frac{dR_1}{d\lambda}\lambda + 4V + \frac{2}{9}R_1 = 0 \\
\frac{4}{3}\lambda\frac{dV}{d\lambda} - \frac{20}{41}\lambda\frac{dP_1}{d\lambda} + \frac{22}{3}V + \frac{100}{41}P_1 = 0 \\
\lambda\frac{dM}{d\lambda} - \frac{4}{100}R + 4M = 0
\end{gathered} \qquad (3.1)$$

Общее решение этой системы имеет вид:

$$P_1(\lambda) = \frac{19}{900} c_1 \lambda^5 + 0.1771 c_2 \lambda^{-0.73125} + c_3 \lambda^{-4} + 0.08901 c_4 \lambda^{-9.6116}$$

$$V(\lambda) = -0.07793 c_2 \lambda^{-0.73125} - \frac{90}{41} c_3 \lambda^{-4} + 0.11573 c_4 \lambda^{-9.6116}$$

$$R(\lambda) = c_1 \lambda^5 + c_2 \lambda^{-0.73125} + c_4 \lambda^{-9.6116}$$

$$M(\lambda) = \frac{4}{900} c_1 \lambda^5 + 0.01223 c_2 \lambda^{-0.73125} + \frac{455}{3.41} c_3 \lambda^{-4} - 0.00713 \lambda^{-9.6116}$$

Для данной задачи из (2.15) имеем следующие граничные условия:

$$V(1) = \frac{78}{105} a + \frac{2}{105}, \qquad R_1(1) = -\frac{39}{7} a - \frac{18}{7}$$

$$M(1) = -\frac{a}{10} - \frac{2}{105}, \qquad P_1(1) = -\frac{1}{150}\left(\frac{287}{7} a + \frac{286}{7}\right)$$

Если не производить вычисление иррациональных характеристических корней, то можно совершенно точно показать, что в силу условий на ударной волне $c_3 = 0$. Для остальных коэффициентов получаем значения после удовлетворения граничных условий:

$$c_1 = -7.1896\, a - 0.8340, \; c_2 = -2.91765\, a - 1.13662, \; c_4 = 4.5358\, a - 0.6008$$

Условие обращения в нуль скорости в центре симметрии в нашей задаче эквивалентно условию $c_4 = 0$, откуда имеем $a = 0.132459$.

Окончательно решение поставленной задачи имеет вид:

$$p = \frac{r^2}{ft^4}\left\{\frac{41}{150} - \frac{1}{r_0}(A_1 f)^{\frac{1}{5}} t^{\frac{4}{5}} \left(0.0377 \lambda^6 + 0.2520 \lambda^{0.26875}\right)\right\} \frac{1}{100\pi}$$

$$u = \frac{r}{t}\left\{\frac{2}{3} + \frac{1}{r_0}(A_1 f)^{\frac{1}{5}} t^{\frac{4}{5}} \left(0.1109 \lambda^{0.26875}\right)\right\}$$

$$\rho = \frac{1}{ft^2}\,\frac{1}{100\pi}\left\{3 - \frac{1}{r_0}(A_1 f)^{\frac{1}{5}} t^{\frac{4}{5}} \left(1.7863 \lambda^6 + 1.4231 \lambda^{0.26875}\right)\right\}$$

$$m = \frac{r^3}{ft^2}\left\{0.25 - \frac{1}{r_0}(A_1 f)^{\frac{1}{5}} t^{\frac{4}{5}} \left(0.00793 \lambda^6 + 0.01748 \lambda^{0.26875}\right)\right\}$$

где

$$\lambda = r (A_1 f)^{-\frac{1}{5}} t^{-\frac{4}{5}}$$

Графики функций, характеризующих отличие решения от автомодельного, приведены на фиг. 1.

Поступила 25 V 1955

ЛИТЕРАТУРА

1. Седов Л. И. Методы подобия и размерности в механике. Изд. III. Гос. изд. тех.-теор. литературы, 1954.
2. Carrus P. Fox P., Gaas F., Kopal Z. Propagation of shock waves in a stellar model with continuous density distribution. The astrophysical Journal, vol. 113, p. 496—519, 1951.
3. Лидов М. Л. Конечный интеграл уравнений одномерных автомодельных движений газа. ДАН СССР, т. 103, № 1.
4. Лидов М. Л. К теории линеализированных решений около одномерных автомодельных движений газа. ДАН СССР, т. 102, № 6.