Прикладная математика и механика. Том XIX, 1955
Институт механики Академии наук Союза ССР

ГИДРОДИНАМИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ СФЕРИЧЕСКОГО ПОДШИПНИКА

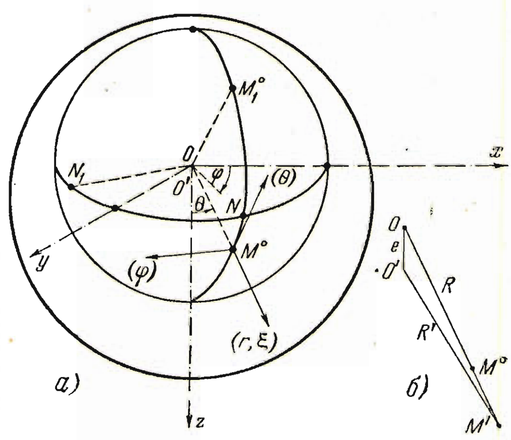
Л. Г. Лойцянский

(Ленинград)

В статье излагается приближенное решение задачи об определении давлений, силы и момента, приложенных к сферическому телу, совершающему общее движение внутри сферической полости, заполненной вязкой жидкостью. Скорость поступательного движения тела и угловая скорость его вращения предполагаются заданными постоянными, а движение рассматривается как квазистационарное. Исследование сводится к рассмотрению уравнения в частных производных, представляющего обобщение известного уравнения Рейнольдса-Митчеля на случай пространственного движения несжимаемой вязкой жидкости в полости между двумя эксцентрически расположенными сферами. Решение уравнения проводится методом Галеркина.

В статье Ванье [1] дано решение частного случая разбираемой нами задачи, когда ось вращения перпендикулярна линии центров и, кроме того, отсутствует поступательное движение внутренней сферы. В этом случае решение может быть получено в замкнутом виде.

§ 1. Вывод основных уравнений распределения скоростей и давлений. Рассмотрим движение вязкой несжимаемой жидкости в полости между двумя эксцентрически расположенными сферами с центрами O и O' (фиг. 1, a) и радиусами R и R', причем $R' > R$. Разность радиусов $\varepsilon = R' - R$ будем считать малой по сравнению с радиусами сфер, величину отношения ε/R примем за малую первого порядка и в дальнейшем все величины будем сравнивать с нею.



Фиг. 1

Используем сферическую систему координат r, θ, φ, приняв ось OZ, проведенную через центры сфер, за полярную ось, а плоскость XOZ начала отсчета долгот φ оставляя произвольной. Широте θ и долготе φ какой-нибудь точки M° на сфере соответствуют дуги ZM° и XN. Ширину полости в текущей точке M° обозначим через $h(\theta, \varphi)$ и определим как расстояние между точками M° и M' сфер, лежащими на одном и том же радиусе, проведенном из центра O. Легко видеть (фиг. 1, $б$), что с ошибкой порядка $(\varepsilon / R)^2$ будет справедливо приближенное равенство

$$h = \varepsilon + e \cos \theta \tag{1.1}$$

где под эксцентриситетом e понимается расстояние OO' между центрами сфер.

Рассматривая движение как стационарное, пренебрегая инерционными членами и учитывая преимущественное значение производных от скорости поперек полости (по r), приведем уравнения движения вязкой жидкости к виду

$$\begin{gathered}\frac{\partial p}{\partial r}=\mu\frac{\partial^2 v_r}{\partial r^2}, \qquad \frac{\partial p}{\partial \theta}=\mu r\frac{\partial^2 v_\theta}{\partial r^2}, \qquad \frac{\partial p}{\partial \varphi}=\mu r\sin\theta\frac{\partial^2 v_\varphi}{\partial r^2}\\ \frac{\partial v_r}{\partial r}+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(v_\theta\sin\theta)+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial v_\varphi}{\partial\varphi}=0\end{gathered} \tag{1.2}$$

Из уравнения неразрывности видно, что производная $\partial v_r / \partial r$ имеет порядок v_θ / R или, что все равно, v_φ / R. Обращаясь к первым трем равенствам предыдущей системы, заключим на основании этого, что

$$\frac{\partial p / \partial r}{\partial p / \partial\theta}\sim\frac{\varepsilon}{R}, \qquad \frac{\partial p / \partial r}{\partial p / \partial\varphi}\sim\frac{\varepsilon}{R} \tag{1.3}$$

т. е. производные $\partial p / \partial\theta$, $\partial p / \partial\varphi$ велики по сравнению с производной $\partial p / \partial r$ и в принятом дальнейшем приближении можно пренебречь величиной $\partial p / \partial r$ по сравнению с величинами $\partial p / \partial\theta$ и $\partial p / \partial\varphi$, т. е. считать давление p функцией только θ и φ.

С ошибкой порядка ε / R можно во втором, третьем и четвертом уравнениях системы (1.2) величину r там, где она не входит под знак дифференцирования, заменить на R.

Кроме того, введем в рассмотрение переменную $\zeta = r - R$, изменяющуюся поперек полости, заполненной жидкостью, в пределах от нуля до $h (0 \leqslant \zeta \leqslant h)$. Тогда вместо системы (1.2) получим

$$\begin{gathered}\frac{\partial^2 v_\theta}{\partial\zeta^2}=\frac{1}{\mu R}\frac{\partial p}{\partial\theta}, \qquad \frac{\partial^2 v_\varphi}{\partial\zeta^2}=\frac{1}{\mu R\sin\theta}\frac{\partial p}{\partial\varphi}\\ \frac{\partial v_r}{\partial\zeta}+\frac{1}{R\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(v_\theta\sin\theta)+\frac{1}{R\sin\theta}\frac{\partial v_\varphi}{\partial\varphi}=0\end{gathered} \tag{1.4}$$

Имея в виду в дальнейшем рассмотреть случаи общего движения внутренней сферы по отношению к неподвижной и непроницаемой внешней сфере, примем граничные условия (1.5)

$$v_r = v_r^\circ, \quad v_\theta = v_\theta^\circ, \quad v_\varphi = v_\varphi^\circ \quad \text{при } \zeta = 0; \qquad v_r = v_\theta = v_\varphi = 0 \quad \text{при } \zeta = h$$

Обозначим черточкой сверху скорости, осредненные по сечению полости, т. е. положим

$$\bar v_\theta = \frac{1}{h}\int_0^h v_\theta\, d\zeta, \qquad \bar v_\varphi = \frac{1}{h}\int_0^h v_\varphi\, d\zeta \tag{1.6}$$

Тогда интегрирование обеих частей уравнения неразрывности, являющегося последним уравнением системы (1.4), по ζ от нуля до h приведет к уравнению

$$\frac{\partial}{\partial\theta}(h\bar v_\theta\sin\theta)+\frac{\partial}{\partial\varphi}(h\bar v_\varphi)=v^\circ_r R\sin\theta \tag{1.7}$$

С другой стороны, непосредственное интегрирование первых двух уравнений системы (1.4) при граничных условиях (1.5) дает

$$
\begin{aligned}
v_\theta &= -\frac{h^2}{2\mu R}\frac{\partial p}{\partial \theta}\frac{\zeta}{h}\left(1-\frac{\zeta}{h}\right)+v_\theta{}^\circ\left(1-\frac{\zeta}{h}\right)\\
v_\varphi &= -\frac{h^2}{2\mu R\sin\theta}\frac{\partial p}{\partial \varphi}\frac{\zeta}{h}\left(1-\frac{\zeta}{h}\right)+v_\varphi{}^\circ\left(1-\frac{\zeta}{h}\right)
\end{aligned}
\qquad (1.8)
$$

или, переходя согласно (1.6) к средним величинам:

$$
\bar{v}_\theta = -\frac{h^2}{12\mu R}\frac{\partial p}{\partial \theta}+\frac{1}{2}v_\theta{}^\circ, \qquad \bar{v}_\varphi = -\frac{h^2}{12\mu R\sin\theta}\frac{\partial p}{\partial \varphi}+\frac{1}{2}v_\varphi{}^\circ \qquad (1.9)
$$

Подставляя эти выражения осредненных скоростей в уравнение (1.7), для определения давления получим уравнение:

$$
\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\left(h^3\frac{\partial p}{\partial\theta}\sin\theta\right)+h^3\frac{\partial^2 p}{\partial\varphi^2}=
$$

$$
=6\mu R\left[\frac{\partial}{\partial\theta}(hv_\theta{}^\circ\sin\theta)+h\frac{\partial v_\varphi{}^\circ}{\partial\varphi}\right]\sin\theta-12\mu R^2 v_r{}^\circ\sin^2\theta \qquad (1.10)
$$

Для вычисления величин $v_r{}^\circ$, $v_\theta{}^\circ$, $v_\varphi{}^\circ$ заметим, что

$$
\mathbf{v}^\circ=\mathbf{v}_0+\omega\times\mathbf{r}^\circ \qquad (1.11)
$$

где вектор $\mathbf{v}_0$ представляет общий для всех точек сферы вектор скорости поступательного движения, вектор ω — угловую скорость вращения сферы и $\mathbf{r}^\circ$ — вектор-радиус точки M° на поверхности сферы, проекции которого на оси сферических координат r, θ и φ (фиг. 1) будут

$$
r_r{}^\circ=R, \qquad r_\theta{}^\circ=r_\varphi{}^\circ=0 \qquad (1.12)
$$

Зададим вектор $\mathbf{v}_0$ (фиг. 2) его величиной v_0, углом α с осью Oz и углом β его проекции на плоскость xOy с осью Ox; аналогично зададим вектор ω (на фиг. 1 векторы $\mathbf{v}_0$ и ω не показаны) его величиной ω и углами γ и δ. Будем иметь по (1.11) и (1. 12)

$$
v_r{}^\circ=v_{0r}, \qquad v_\theta{}^\circ=v_{0\theta}+R\omega_\varphi, \qquad v_\varphi{}^\circ=v_{0\varphi}-R\omega_\theta \qquad (1.13)
$$

Легко заметить, что (фиг. 1, a)

$$
\begin{aligned}
v_{0r}&=v_0[\cos\alpha\cos\theta+\sin\alpha\sin\theta\cos(\varphi-\beta)]\\
v_{0\theta}&=v_0\cos(\mathbf{v}_0,OM_1{}^\circ)=v_0[-\cos\alpha\sin\theta+\sin\alpha\cos\theta\cos(\varphi-\beta)]\\
v_{0\varphi}&=v_0\cos(\mathbf{v}_0,ON_1)=-v_0\sin\alpha\sin(\varphi-\beta)
\end{aligned}
\qquad (1.14)
$$

Точно так же найдем

$$
\begin{aligned}
\omega_\theta&=\omega\cos(\omega,OM_1{}^\circ)=\omega[-\cos\gamma\sin\theta+\sin\gamma\cos\theta\cos(\varphi-\delta)]\\
\omega_\varphi&=\omega\cos(\omega,ON_1)=-\omega\sin\gamma\sin(\varphi-\delta)
\end{aligned}
\qquad (1.15)
$$

Таким образом, будем иметь

$$
\begin{aligned}
v_r{}^\circ&=v_0[\cos\alpha\cos\theta+\sin\alpha\sin\theta\cos(\varphi-\beta)]\\
v_\theta{}^\circ&=v_0[-\cos\alpha\sin\theta+\sin\alpha\cos\theta\cos(\varphi-\beta)]-\omega R\sin\gamma\sin(\varphi-\delta)\\
v_\varphi{}^\circ&=-v_0\sin\alpha\sin(\varphi-\beta)+\omega R[\cos\gamma\sin\theta-\sin\gamma\cos\theta\cos(\varphi-\delta)]
\end{aligned}
\qquad (1.16)
$$

Прежде чем подставить эти значения скоростей в правую часть уравнения (1.10), обратим внимание на то, что, наряду с членами порядка $\mu v_0 R^2$, каким является, например, последнее слагаемое, будут существовать и члены порядка $\mu v_0 hR$, относящиеся к предыдущим, как h к R, т. е. имеющие сравнительный порядок ε/R. Эти члены получатся, если во втором и третьем равенствах (1.16) при подстановке в правую часть (1.10) сохранять слагаемые, содержащие v_0. Опуская эти слагаемые, приведем уравнение (1.10) к виду

$$\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\left(h^3\frac{\partial p}{\partial\theta}\sin\theta\right)+h^3\frac{\partial^2 p}{\partial\varphi^2}=6\mu R^2\omega e\sin\gamma\sin^3\theta\sin(\varphi-\delta)-\\ -12\mu v_0R^2\sin^2\theta\,[\cos\alpha\cos\theta+\sin\alpha\sin\theta\cos(\varphi-\beta)] \tag{1.17}$$

§ 2. Решение основного уравнения; определение давления. Чтобы разыскать решение уравнения (1.17), удовлетворяющее условию конечности давления, а также связанных с давлением по (1.9) величин осредненных скоростей во всей области течения, представим искомое решение в форме

$$p(\theta,\varphi)=\Theta_0(\theta)+\Theta_1(\theta)\cos(\varphi-\beta)+\Theta_2(\theta)\sin(\varphi-\delta) \tag{2.1}$$

Тогда функции Θ_0, Θ_1, Θ_2 угла θ должны удовлетворять системе обыкновенных линейных дифференциальных уравнений:

$$\begin{gathered}\sin\theta\frac{d}{d\theta}\left(h^3\sin\theta\frac{d\Theta_0}{d\theta}\right)=-12\mu v_0R^2\cos\alpha\sin^2\theta\cos\theta\\ \sin\theta\frac{d}{d\theta}\left(h^3\sin\theta\frac{d\Theta_1}{d\theta_1}\right)-h^3\Theta_1=-12\mu v_0R^2\sin\alpha\sin^3\theta\\ \sin\theta\frac{d}{d\theta}\left(h^3\sin\theta\frac{d\Theta_2}{d\theta}\right)-h^3\Theta_2=6\mu R^2\omega e\sin\gamma\sin^3\theta\end{gathered} \tag{2.2}$$

Граничные условия для последних двух уравнений второго порядка айдем, заметив, что из условия конечности величины v_φ, определяемой по второму равенству системы (1.9), и согласно принятой форме решения (2.1) сразу следует

$$\Theta_1=0 \quad \text{при } \theta=0 \text{ и } \theta=\pi, \qquad \Theta_2=0 \quad \text{при } \theta=0 \text{ и } \theta=\pi \tag{2.3}$$

Сокращая первое уравнение (2.2) на $\sin\theta$ и интегрируя один раз, получим

$$h^3\frac{d\Theta_0}{d\theta}=-6\mu R^2v_0\cos\alpha\sin\theta+\frac{C_1}{\sin\theta}$$

Из условия конечности величины $\partial p/\partial\theta$ следует конечность $d\Theta_0/d\theta$, что приводит к обращению в нуль постоянной C_1. Производя повторное интегрирование, получим

$$\Theta_0(\theta)=-6\mu v_0R^2\cos\alpha\int_0^\theta\frac{\sin\theta\,d\theta}{h^3} \tag{2.4}$$

причем постоянная выбрана так, чтобы выполнялось условие $\Theta_0(0)=0$. Этим определяется отсчетный уровень давления в замкнутой полости сферического подшипника. Интеграл в правой части (2.4) легко вычисляется; будем иметь

$$\Theta_0(\theta)=-\frac{3\mu v_0R^2\cos\alpha}{\varepsilon^3(1+\lambda)^2}\,\frac{(2+\lambda+\lambda\cos\theta)(1-\cos\theta)}{(1+\lambda\cos\theta)^2} \tag{2.5}$$

где введено новое обозначение для существенной в дальнейшем постоянной:

$$\lambda=\frac{e}{\varepsilon}, \qquad 0\leqslant\lambda<1 \tag{2.6}$$

Для разыскания функций $\Theta_1(\theta)$ и $\Theta_2(\theta)$ обратимся к последним двум уравнениям системы (2.2) и граничным условиям (2.3). Уравнения отличаются лишь постоянным множителем в правой части; граничные условия для обеих функций одинаковы. Остановимся, например, на решении последнего уравнения и применим для этой цели метод Галеркина.

Удовлетворяя граничным условиям (2.3), будем искать $\Theta_2(\theta)$ в форме суммы двух синусоид:

$$\Theta_2 = A\sin\theta + B\sin 2\theta \tag{2.7}$$

где A и B — подлежащие определению функции параметров задачи.

Следуя методу Галеркина, совершим подстановку выражения $\Theta_2(\theta)$ из (2.7) в последнее уравнение системы (2.2) и приведем результат к виду тригонометрической суммы. Вычислим прежде всего h^3. Имеем

$$h^3 = (\varepsilon + e\cos\theta)^3 = a_0 + a_1\cos\theta + a_2\cos 2\theta + a_3\cos 3\theta \tag{2.8}$$

где

$$a_0 = \varepsilon^3 + \frac{3}{2}\varepsilon e^2, \quad a_1 = 3\varepsilon^2 e + \frac{3}{4}e^3, \quad a_2 = \frac{3}{2}\varepsilon e^2, \quad a_3 = \frac{1}{4}e^3 \tag{2.9}$$

Составляя $d\Theta_2/d\theta = A\cos\theta + 2B\cos 2\theta$ и перемножая с тригонометрической суммой (2.8), получим

$$\begin{gathered} h^3\sin\theta\frac{d\Theta_2}{d\theta} = (a_0 + a_1\cos\theta + a_2\cos 2\theta + a_3\cos 3\theta)\left(-B\sin\theta + \frac{1}{2}A\sin 2\theta +\right. \\ \left.+ B\sin 3\theta\right) = \left[\frac{1}{4}(a_1 - a_3)A + (a_2 - a_0)B\right]\sin\theta + \frac{1}{2}(a_0A + a_3B)\sin 2\theta + \\ + \left[\frac{1}{4}a_1A + \left(a_0 - \frac{1}{2}a_2\right)B\right]\sin 3\theta + \left[\frac{1}{4}a_2A + \frac{1}{2}(a_1 - a_3)B\right]\sin 4\theta + \\ + \left(\frac{1}{4}a_3A + \frac{1}{2}a_2B\right)\sin 5\theta + \frac{1}{2}a_3B\sin 6\theta \end{gathered}$$

Аналогично подсчитываются произведения

$$\begin{gathered} h^3\Theta_2 = \left[\left(a_0 - \frac{1}{2}a_2\right)A + \frac{1}{2}(a_1 - a_3)B\right]\sin\theta + \\ + \left[\frac{1}{2}(a_1 - a_3)A + a_0B\right]\sin 2\theta + \frac{1}{2}(a_2A + a_1B)\sin 3\theta + \\ + \frac{1}{2}(a_3A + a_2B)\sin 4\theta + \frac{1}{2}a_3B\sin 5\theta \end{gathered}$$

и правая часть третьего уравнения системы (2.2), равная

$$6\mu R^2\omega e\sin\gamma\sin^3\theta = \frac{9}{2}\mu R^2\omega e\sin\gamma\sin\theta - \frac{3}{2}\mu R^2\omega e\sin\gamma\sin 3\theta$$

Подставляя эти выражения в левую часть последнего уравнения системы (2.2), получим

$$C_1\sin\theta + C_2\sin 2\theta + C_3\sin 3\theta + \cdots + C_7\sin 7\theta \tag{2.10}$$

Замечая, что согласно методу Галеркина для определения величин A и B надлежит составить два уравнения, получаемые из (2.10) последовательным умножением на $\sin\theta$ и $\sin 2\theta$, интегрированием по θ от нуля до π и приравниванием нулю, выпишем только те два коэффициента C_1 и C_2, которые при этом сохранятся:

$$\begin{aligned} C_1 &= \frac{1}{2}(a_2 - 3a_0)A - \frac{1}{2}a_1B - \frac{9}{2}\mu R^2\omega e\sin\gamma \\ C_2 &= \frac{3}{8}(a_3 - 2a_1)A + \left(\frac{5}{4}a_2 - 3a_0\right)B \end{aligned} \tag{2.11}$$

Приравнивая их нулю, получим два уравнения метода Галеркина:

$$(a_2 - 3a_0)A - a_1 B = 9\mu R^2 \omega e \sin\gamma, \quad (a_3 - 2a_1)A + \frac{8}{3}\left(\frac{5}{4}a_2 - 3a_0\right)B = 0 \qquad (2.12)$$

Используя значения a_i, приведенные в (2.9), получим окончательно следующую систему уравнений для определения A и B:

$$\begin{gathered} \varepsilon(\varepsilon^2 + e^2)A + e\left(\varepsilon^2 + \frac{1}{4}e^2\right)B = -3\mu R^2 \omega e \sin\gamma \\ \frac{3}{4}e\left(\varepsilon^2 + \frac{5}{24}e^2\right)A + \varepsilon\left(\varepsilon^2 + \frac{7}{8}e^2\right)B = 0 \end{gathered} \qquad (2.13)$$

Решение ее имеет вид:

$$\begin{gathered} A = -3\mu R^2 \omega \sin\gamma \frac{\varepsilon e(\varepsilon^2 + {}^7/_8 e^2)}{\varepsilon^2(\varepsilon^2 + e^2)(\varepsilon^2 + {}^7/_8 e^2) - {}^3/_4 e^2(\varepsilon^2 + {}^1/_4 e^2)(\varepsilon^2 + {}^5/_{24} e^2)} \\ B = 3\mu R^2 \omega \sin\gamma \frac{{}^3/_4 e^2(\varepsilon^2 + {}^5/_{24} e^2)}{\varepsilon^2(\varepsilon^2 + e^2)(\varepsilon^2 + {}^7/_8 e^2) - {}^3/_4 e^2(\varepsilon^2 + {}^1/_4 e^2)(\varepsilon^2 + {}^5/_{24} e^2)} \end{gathered} \qquad (2.14)$$

и может быть еще переписано так ($\lambda = e/\varepsilon$):

$$A = -\frac{3\mu R^2 \omega e \sin\gamma}{\varepsilon^3}\varkappa_1(\lambda), \qquad B = \frac{3\mu R^2 \omega e \sin\gamma}{\varepsilon^3}\varkappa_2(\lambda) \qquad (2.15)$$

где

$$\begin{gathered} \varkappa_1(\lambda) = \frac{1 + {}^7/_8 \lambda^2}{(1 + \lambda^2)(1 + {}^7/_8 \lambda^2) - {}^3/_4 \lambda^2 (1 + {}^1/_4 \lambda^2)(1 + {}^5/_{24} \lambda^2)} \\ \varkappa_2(\lambda) = \frac{{}^3/_4 \lambda (1 + {}^5/_{24} \lambda^2)}{(1 + \lambda^2)(1 + {}^7/_8 \lambda^2) - {}^3/_4 \lambda^2 (1 + {}^1/_4 \lambda^2)(1 + {}^5/_{24} \lambda^2)} \end{gathered} \qquad (2.16)$$

Таким образом, имеем

$$\Theta_2(\theta) = -\frac{3\mu R^2 \omega e \sin\gamma}{\varepsilon^3}[\varkappa_1(\lambda)\sin\theta - \varkappa_2(\lambda)\sin 2\theta] \qquad (2.17)$$

Повторяя дословно те же вычисления, получим

$$\Theta_1(\theta) = \frac{6\mu R^2 v_0 \sin\alpha}{\varepsilon^3}[\varkappa_1(\lambda)\sin\theta - \varkappa_2(\lambda)\sin 2\theta] \qquad (2.18)$$

Совокупность равенств (2.1), (2.5), (2.17) и (2.18) представляет искомое выражение для распределения давления по поверхности сферы.

§ 3. Главный вектор реакций жидкости на внутреннюю сферу. При вычислении главного вектора **F** реакций жидкости на внутреннюю сферу можно пренебречь вязкими нормальными и касательными компонентами, имеющими порядок $\mu R^2 v_0/\varepsilon$ и $\mu R^2 v_\theta/\varepsilon$, по сравнению с компонентами давлений, имеющими порядок $\mu R^3 v_\theta/\varepsilon^2$. Таким образом, будем иметь

$$\mathbf{F} = -\int_\sigma p\mathbf{n}\,d\sigma = -R^2\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi p\mathbf{n}\sin\theta\,d\theta \qquad (3.1)$$

Отсюда следует, что

$$\begin{gathered} F_x = -R^2\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi p\sin\theta\cos(MOX)\,d\theta = -R^2\int_0^{2\pi}\cos\varphi\,d\varphi\int_0^\pi p\sin^2\theta\,d\theta \\ F_y = -R^2\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi p\sin\theta\cos(MOY)\,d\theta = -R^2\int_0^{2\pi}\sin\varphi\,d\varphi\int_0^\pi p\sin^2\theta\,d\theta \\ F_z = -R^2\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi p\sin\theta\cos(MOZ)\,d\theta = -R^2\int_0^{2\pi} d\varphi\int_0^\pi p\sin\theta\cos\theta\,d\theta \end{gathered}$$

Подставляя сюда выражение p из (2.1) и интегрируя по φ, получим

$$F_x = -\pi R^2 \cos\beta \int_0^\pi \Theta_1(\theta)\sin^2\theta\, d\theta + \pi R^2 \sin\delta \int_0^\pi \Theta_2(\theta)\sin^2\theta\, d\theta$$

$$F_y = -\pi R^2 \sin\beta \int_0^\pi \Theta_1(\theta)\sin^2\theta\, d\theta - \pi R^2 \cos\delta \int_0^\pi \Theta_2(\theta)\sin^2\theta\, d\theta \qquad (3.2)$$

$$F_z = -\pi R^2 \int_0^\pi \Theta_0(\theta)\sin 2\theta\, d\theta$$

Замечая, что согласно (2.18), (2.17) и (2.5)

$$\int_0^\pi \Theta_1 \sin^2\theta\, d\theta = \frac{6\mu R^2 v_0 \sin\alpha}{\varepsilon^3}\left[\varkappa_1(\lambda)\int_0^\pi \sin^3\theta\, d\theta - \varkappa_2(\lambda)\int_0^\pi \sin^2\theta \sin 2\theta\, d\theta\right] = \frac{8\mu R^2 v_0 \sin\alpha}{\varepsilon^3}\varkappa_1(\lambda)$$

$$\int_0^\pi \Theta_2 \sin^2\theta\, d\theta = -\frac{3\mu R^2 \omega e \sin\gamma}{\varepsilon^3}\left[\varkappa_1(\lambda)\int_0^\pi \sin^3\theta\, d\theta - \varkappa_2(\lambda)\int_0^\pi \sin^2\theta \sin 2\theta\, d\theta\right] = -\frac{4\mu R^2 \omega e \sin\gamma}{\varepsilon^3}\varkappa_1(\lambda)$$

$$\int_0^\pi \Theta_0 \sin 2\theta\, d\theta = -\frac{6\mu R^2 v_0 \cos\alpha}{\varepsilon^2(1+\lambda)^2}\int_0^\pi \frac{(2+\lambda+\lambda\cos\theta)(1-\cos\theta)}{(1+\lambda\cos\theta)^2}\sin\theta\cos\theta\, d\theta = \frac{8\mu R^2 v_0 \cos\alpha}{\varepsilon^3}\varkappa_3(\lambda)$$

В последней формуле положено

$$\varkappa_3(\lambda) = \frac{3}{4\lambda^3}\left(\frac{2\lambda}{1-\lambda^2} - \ln\frac{1+\lambda}{1-\lambda}\right) \qquad (3.3)$$

Возвращаясь к формулам (3.2) и подставляя в них полученные значения интегралов, найдем величины проекций главного вектора $\mathbf{F}$:

$$F_x = -\frac{8\pi\mu R^4 v_0 \sin\alpha\cos\beta}{\varepsilon^3}\varkappa_1(\lambda) - \frac{4\pi\mu R^4 \omega e \sin\gamma \sin\delta}{\varepsilon^3}\varkappa_1(\lambda)$$

$$F_y = -\frac{8\pi\mu R^4 v_0 \sin\alpha\sin\beta}{\varepsilon^3}\varkappa_1(\lambda) + \frac{4\pi\mu R^4 \omega e \sin\gamma \cos\delta}{\varepsilon^3}\varkappa_1(\lambda) \qquad (3.4)$$

$$F_z = -\frac{8\pi\mu R^4 v_0 \cos\alpha}{\varepsilon^3}\varkappa_3(\lambda)$$

Дадим векторную формулу $\mathbf{F}$, не зависящую от выбора осей координат. С этой целью введем в рассмотрение вектор смещения центра O внутренней сферы по отношению к центру O' внешней сферы $\mathbf{e} = \overrightarrow{OO'}$.

Переписывая F_z в тождественной форме

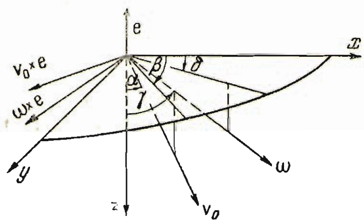
$$F_z = -\frac{8\pi\mu R^4 v_0 \cos\alpha}{\varepsilon^3}\varkappa_1(\lambda) - \frac{8\pi\mu R^4 v_0 \cos\alpha}{\varepsilon^3}[\varkappa_3(\lambda) - \varkappa_1(\lambda)]$$

можем заменить совокупность равенств (3.4) одним векторным

$$\mathbf{F} = -\frac{8\pi\mu R^4}{\varepsilon^3}\varkappa_1(\lambda)\,\mathbf{v}_0 - \frac{8\pi\mu R^4}{\varepsilon^5}\frac{\varkappa_1(\lambda) - \varkappa_3(\lambda)}{\lambda^2}(\mathbf{v}_0\cdot\mathbf{e})\,\mathbf{e} + \frac{4\pi\mu R^4}{\varepsilon^3}\varkappa_1(\lambda)\,\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{e} \qquad (3.5)$$

Фиг. 2 поясняет взаимное расположение векторов $\mathbf{v}_0$, $\boldsymbol{\omega}$ и $\mathbf{e}$, причем последний вектор показан приложенным в точке O.

Первые два слагаемых в правой части (3.5) представляют силу сопротивления поступательному движению сферы, последнее слагаемое — силу реакции жидкости, соответствующую вращательному движению сферы.



Фиг. 2

При концентрическом расположении сфер ($e = 0$, $\lambda = 0$), как легко заключить по первому из равенств (2.16), реакция жидкости определится простой формулой

$$\mathbf{F} = -\frac{8\pi\mu R^4}{\varepsilon^3}\mathbf{v}_0 \tag{3.6}$$

Установим еще выражение для $\mathbf{F}$ при малых по сравнению с шириной полости ε смещениях e центра сферы. Замечая, что при малых e или λ

$$\varkappa_1(\lambda) = 1 - \tfrac{1}{4}\lambda^2 + \ldots, \qquad \varkappa_3(\lambda) = 1 + \tfrac{6}{5}\lambda^2 + \ldots \tag{3.7}$$

найдем, сохраняя малые первого порядка:

$$\mathbf{F} = -\frac{8\pi\mu R^4}{\varepsilon^3}\mathbf{v}_0 + \frac{4\pi\mu R^4}{\varepsilon^3}\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{e} \tag{3.8}$$

Точно так же, сохраняя малые второго порядка, будем иметь

$$\mathbf{F} = -\frac{8\pi\mu R^4}{\varepsilon^3}\left(1 - \frac{1}{4}\lambda^2\right)\mathbf{v}_0 + \frac{58}{5}\frac{\pi\mu R^4}{\varepsilon^5}(\mathbf{v}_0\cdot\mathbf{e})\,\mathbf{e} + \frac{4\pi\mu R^4}{\varepsilon^3}\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{e} \tag{3.9}$$

§ 4. Главный момент реакций жидкости. Для составления главного момента реакций жидкости определим прежде всего касательные напряжения $\tau_{r\theta}$, $\tau_{r\varphi}$, связанные с величинами касательных сил dF^θ и dF^φ формулами

$$dF^\theta = \tau_{r\theta} R^2 \sin\theta\, d\theta\, d\varphi, \qquad dF^\varphi = \tau_{r\varphi} R^2 \sin\theta\, d\theta\, d\varphi \tag{4.1}$$

Имеем

$$\tau_{r\theta} = \mu\left(\frac{\partial v_\theta}{\partial\zeta} - \frac{v_\theta}{R}\right)_{\zeta=0}, \qquad \tau_{r\varphi} = \mu\left(\frac{\partial v_\varphi}{\partial\zeta} - \frac{v_\varphi}{R}\right)_{\zeta=0}$$

или, замечая, что слагаемые v_θ / R и v_φ / R малы по сравнению с первыми слагаемыми, имеющими порядок v_θ / ε, v_φ / ε:

$$\tau_{r\theta} = \mu\left(\frac{\partial v_\theta}{\partial\zeta}\right)_{\zeta=0}, \qquad \tau_{r\varphi} = \mu\left(\frac{\partial v_\varphi}{\partial\zeta}\right)_{\zeta=0} \tag{4.2}$$

Подставляя сюда значения v_θ и v_φ по (1.8), получим

$$\tau_{r\theta} = -\frac{h}{2R}\frac{\partial p}{\partial\theta} - \frac{\mu v_\theta{}^\circ}{h}, \qquad \tau_{r\varphi} = -\frac{h}{2R\sin\theta}\frac{\partial p}{\partial\varphi} - \frac{\mu v_\varphi{}^\circ}{h} \tag{4.3}$$

или, используя выражения (1.16), (2.1) и опуская слагаемые, величина которых относится к остальным членам как $\varepsilon : R$:

$$\tau_{r\theta} = -\frac{h}{2R}\left[\Theta_0'(\theta) + \Theta_1'(\theta)\cos(\varphi - \beta) + \Theta_2'(\theta)\sin(\varphi - \delta)\right] + \\ + \frac{\mu\omega R}{h}\sin\gamma\sin(\varphi - \delta)$$

$$\tau_{r\varphi} = \frac{h}{2R\sin\theta}\left[\Theta_1(\theta)\sin(\varphi - \beta) - \Theta_2(\theta)\cos(\varphi - \delta)\right] - \frac{\mu\omega R}{h}\left[\cos\gamma\sin\theta - \\ - \sin\gamma\cos\theta\cos(\varphi - \delta)\right] \qquad (4.4)$$

Элементарные моменты dL_x, dL_y, dL_z касательных сил трения относительно декартовых осей координат определим как суммы моментов сил $d\mathbf{F}^\theta$ и $d\mathbf{F}^\varphi$ относительно этих осей. Замечая, что декартовы координаты точки M° будут $R\sin\theta\cos\varphi$, $R\sin\theta\sin\varphi$, $R\cos\theta$, а соответствующие проекции сил (фиг. 1), будут

$$\begin{array}{lll} dF^\theta\cos\theta\cos\varphi, & dF^\theta\cos\theta\sin\varphi, & -dF^\theta\sin\theta \\ -dF^\varphi\sin\varphi, & dF^\varphi\cos\varphi, & 0 \end{array}$$

найдем согласно (4.1)

$$\begin{aligned} dL_x &= -R^3(\tau_{r\theta}\sin\varphi + \tau_{r\varphi}\cos\theta\cos\varphi)\sin\theta\, d\theta\, d\varphi \\ dL_y &= R^3(\tau_{r\theta}\cos\varphi - \tau_{r\varphi}\cos\theta\sin\varphi)\sin\theta\, d\theta\, d\varphi \\ dL_z &= R^3\tau_{r\varphi}\sin^2\theta\, d\theta\, d\varphi \end{aligned} \qquad (4.5)$$

Подставляя сюда значения $\tau_{r\theta}$, $\tau_{r\varphi}$ по (4.4), собирая члены с тригонометрическими функциями угла φ и произведя интегрирование по φ от нуля до 2π, получим

$$L_x = \frac{\pi R^2}{2}\sin\beta\int_0^\pi h(\theta)\,\Theta_1'(\theta)\sin\theta\, d\theta + \frac{\pi R^2}{2}\cos\delta\int_0^\pi h(\theta)\,\Theta_2'(\theta)\sin\theta\, d\theta + \\ + \frac{\pi R^2}{2}\sin\beta\int_0^\pi h(\theta)\,\Theta_1(\theta)\cos\theta\, d\theta + \frac{\pi R^2}{2}\cos\delta\int_0^\pi h(\theta)\,\Theta_2(\theta)\cos\theta\, d\theta - \\ - \pi\mu R^4\omega\sin\gamma\cos\delta\int_0^\pi \frac{\sin\theta\,(1 + \cos^2\theta)}{h(\theta)}\, d\theta$$

Используя значения функций $\Theta_1(\theta)$ и $\Theta_2(\theta)$ по (2.18) и (2.17) и выполняя интегрирование, будем иметь

$$L_x = \frac{4\pi\mu R^4 v_0 e\sin\alpha\sin\beta}{\varepsilon^3}\varkappa_1(\lambda) - \frac{\pi\mu R^4\omega\sin\gamma\cos\delta}{\varepsilon}\Big[2\lambda^2\varkappa_1(\lambda) + \\ + \left(\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda^3}\right)\ln\frac{1+\lambda}{1-\lambda} - \frac{2}{\lambda^2}\Big] \qquad (4.6)$$

Перепишем еще L_x в такой форме:

$$L_x = \frac{4\pi\mu R^4 v_0 e\sin\alpha\sin\beta}{\varepsilon^3}\varkappa_1(\lambda) - \frac{8\pi\mu R^4\omega\sin\gamma\cos\delta}{3\varepsilon}\Lambda_1(\lambda) \qquad (4.7)$$

где

$$\Lambda_1(\lambda) = \frac{3}{4}\left[\lambda^2\varkappa_1(\lambda) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda^3}\right)\ln\frac{1+\lambda}{1-\lambda} - \frac{1}{\lambda^2}\right] \qquad (4.8)$$

при малых λ будет представляться разложением

$$\Lambda_1(\lambda) = 1 + \tfrac{23}{20}\lambda^2 + \ldots \qquad (4.9)$$

Аналогичные расчеты определят L_y и L_z. Опуская выкладки, напишем результаты:

$$L_y = -\frac{4\pi\mu R^4 v_0 e \sin\alpha\cos\beta}{\varepsilon^3}\varkappa_1(\lambda) - \frac{8\pi\mu R^4\omega\sin\gamma\sin\delta}{3\varepsilon}\Lambda_1(\lambda) \qquad (4.10)$$

$$L_z = -\frac{8\pi\mu R^4\omega\cos\gamma}{3\varepsilon}\Lambda_2(\lambda) \qquad (4.11)$$

где

$$\Lambda_2(\lambda) = \frac{3}{2}\left[\frac{1}{\lambda^2} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda^3}\right)\ln\frac{1+\lambda}{1-\lambda}\right] \qquad (4.12)$$

причем при малых λ имеет место разложение

$$\Lambda_2(\lambda) = 1 + \tfrac{1}{2}\lambda^2 + \ldots \qquad (4.13)$$

Соединяя, как ранее, выражения (4.7), (4.10), (4.11) моментов относительно осей в одно векторное, получим следующую формулу главного момента реакций жидкости:

$$\mathbf{L} = -\frac{8\pi\mu R^4}{3\varepsilon}\Lambda_1(\lambda)\,\boldsymbol{\omega} + \frac{8\pi\mu R^4(\boldsymbol{\omega}\cdot\mathbf{e})}{3\varepsilon^3}\frac{\Lambda_1(\lambda)-\Lambda_2(\lambda)}{\lambda^2}\mathbf{e} - \frac{4\pi\mu R^4}{\varepsilon^3}\varkappa_1(\lambda)\,\mathbf{v}_0\times\mathbf{e} \qquad (4.14)$$

При отсутствии смещения центра O внутренней сферы относительно центра O' внешней сферы ($e = 0$, $\lambda = 0$) получим известную формулу момента сопротивления:

$$\mathbf{L} = -\frac{8\pi\mu R^4}{3\varepsilon}\boldsymbol{\omega} \qquad (4.15)$$

Считая λ малой величиной и сохраняя первую степень λ или e, получим

$$\mathbf{L} = -\frac{8\pi\mu R^4}{3\varepsilon}\boldsymbol{\omega} - \frac{4\pi\mu R^4}{\varepsilon^3}\mathbf{v}_0\times\mathbf{e} \qquad (4.16)$$

Сохраняя величины порядка λ^2, будем иметь

$$\mathbf{L} = -\frac{8\pi\mu R^4}{3\varepsilon}(1+\lambda^2)\boldsymbol{\omega} + \frac{4\pi\mu R^4}{3\varepsilon^3}(\boldsymbol{\omega}\cdot\mathbf{e})\mathbf{e} - \frac{4\pi\mu R^4}{\varepsilon^3}\mathbf{v}_0\times\mathbf{e} \qquad (4.17)$$

Полученные в настоящей статье формулы зависимости главного вектора и главного момента от смещения центра шара, скорости поступательного движения и угловой скорости вращения шара позволяют поставить вопрос о равновесии шара или установившемся его движении. Учет инерционных эффектов, связанных с нестационарностью движения, представляет большие трудности и требует особого исследования.

Поступила 28 V 1955

ЛИТЕРАТУРА

1. Wannier G. H. A Contribution to the Hydrodynamics of Lubrication. Quarterly of Applied Mathematics. 1950. April. Vol. VIII, n° 1, pp. 1—32