Прикладная математика и механика. Том XIX, 1955
Институт механики Академии наук Союза ССР

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ПО ПЕРВОМУ ПРИБЛИЖЕНИЮ

Н. Н. Красовский

(Свердловск)

В статье рассматриваются вопросы устойчивости движения по первому приближению. Приводится обобщение критерия К. П. Персидского [1,2]. Дается обобщение теоремы И. Г. Малкина [3] для случая, когда правые части уравнений — формы степени $m > 1$ с коэффициентами, зависящими от времени t. Доказанные теоремы охватывают также некоторые случаи неустойчивости. Основным содержанием статьи является применение второго метода А. М. Ляпунова к задачам устойчивости по первому приближению. Исследование опирается на доказательство существования функций Ляпунова, удовлетворяющих определенным оценкам. Приводятся примеры применения теорем для исследования устойчивости по отношению к запаздываниям аргумента t и для уравнений в конечных разностях.

§ 1. Рассмотрим уравнения возмущенного движения

$$\frac{dx_i}{dt} = X_i(x_1, \ldots, x_n, t) \qquad (i = 1, \ldots, n) \tag{1.1}$$

где функции X_i определены в области

$$|x_i| \leqslant H, \qquad 0 \leqslant t \qquad (H = \text{const}) \tag{1.2}$$

непрерывны по t, x_i, и имеют непрерывные производные $\partial X_i / \partial x_j$, удовлетворяющие в этой области неравенствам

$$\left|\frac{\partial X_i}{\partial x_j}\right| < L \qquad (L = \text{const}) \tag{1.3}$$

Кроме того, $X_i\ (0, \ldots, 0, t) = 0$ при $t \geqslant 0$.

Назовем положительной (отрицательной) полутраекторией максимальную связную дугу траектории, лежащую в области (1.2) при $t \geqslant t_0$ (или при $t \leqslant t_0$ соответственно). Предположим, что решения $x_i(x_{10}, \ldots, x_{n0}, t_0, t)$ удовлетворяют следующему условию: существуют постоянные $\alpha > 0$, $B > 0$ такие, что для любой точки p из (1.2) по крайней мере на одной из полутраекторий, проходящих через p, выполняется неравенство

$$\ln r(p, t_0, t) \geqslant \ln Br(p) + \alpha |t - t_0| \qquad (\text{при } t \geqslant t_0 \text{ или } t \leqslant t_0) \tag{1.4}$$

Здесь

$$r(p) = (x_{1p}^2 + \ldots + x_{np}^2)^{1/2}$$

$$r(p, t_0, t) = [x_1^2(x_{1p}, \ldots, x_{np}, t_0, t) + \ldots + x_n^2(x_{1p}, \ldots, x_{np}, t_0, t)]^{1/2}$$

Очевидно, в случае линейных уравнений с постоянными коэффициентами условие (1.4) эквивалентно требованию отсутствия характеристических корней с нулевой действительной частью. В случае асимптотической устойчивости и линейных уравнений с переменными коэффициентами условие (1.4) совпадает с условием К. П. Персидского [1].

§ 2. Покажем, что условие (1.4) является достаточным для существования функции Ляпунова v, имеющей определенно положительную производную

$$\frac{dv}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial v}{\partial x_i} X_i + \frac{\partial v}{\partial t}$$

знак которой не нарушается добавками порядка малости выше первого к правым частям уравнений (1.1).

Теорема 2. 1. При условии (1.4) в окрестности точки $x_1 = \ldots = x_n = 0$ существует функция $v(x_1, \ldots, x_n, t)$ класса C^1, удовлетворяющая неравенствам

$$|v| \leqslant c_1 r^A, \qquad \frac{dv}{dt} \geqslant c_2 r^A, \qquad \left|\frac{\partial v}{\partial x_i}\right| < c_3 r^{A-1} \tag{2.1}$$

где A, c_1, c_2, c_3 — положительные постоянные, $r = (x_1^2 + \ldots + x_n^2)^{1/2}$.

Доказательство. Функции X_i можно продолжить с сохранением класса и условия (1.4) в область $t < 0$. Поэтому примем, что уравнения (1.1) определены в области

$$|x_i| \leqslant H, \qquad -\infty < t < \infty \tag{2.2}$$

и условие (1.4) выполняется при $-\infty < t_0 < \infty$.

Рассмотрим в пространстве $\{x, \tau\}$ систему уравнений

$$\frac{dx_i}{dt} = X_i(x_1, \ldots, x_n, \tau), \qquad \frac{d\tau}{dt} = 1 \qquad (i = 1, \ldots, n) \tag{2.3}$$

Обозначим через $J(r)$ область $x_1^2 + \ldots + x_n^2 < r^2$, $-\infty < \tau < \infty$, через $G[r_1, r_2]$ $(r_1 > r_2)$ — область $J(r_1) - J^+(r_2)$. Символ J^+ означает замыкание J. Вследствие (1.3) выполняется неравенство

$$\frac{|dr|}{dt} \leqslant n^2 L r \tag{2.4}$$

Поэтому можно указать число $h > 0$, не зависящее от r и такое, что любая траектория пересекает $G[r, (1 - 1/8) r]$ за время $|\Delta t| > h$.

Обозначим через N_k пересечение гиперплоскости $\tau = kh$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ с $J(H)$, а через g_k — область, определенную условием: точка q лежит в g_k, если $q = f(p, t)$ при $|t| < T$, где

$$T = h + \frac{2}{\alpha} \ln \frac{2}{B^{1/2}}, \qquad p \in N_k, \ (T \gg h)$$

(Символ $f(p, t)$ означает точку траектории (2.3), проходящей при $t = 0$ через точку $p(x_{1p}, \ldots, x_{np}, \tau_p)$ пространства $\{x, \tau_p\}$).

Определим функцию $\psi(t)$ класса C^1, имеющую график, изображенный на фиг. 1, и удовлетворяющую условиям

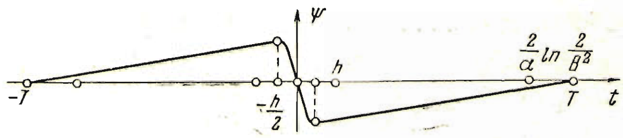
$$\psi'(t) > \delta \qquad \text{при} \qquad \frac{h}{2} \leqslant |t| \leqslant \frac{2}{\alpha} \ln \frac{2}{B^{1/2}}$$

$$|\psi'(t)| < D \quad \text{при всех } t, \qquad \psi(t) \equiv 0 \ \text{при} \ |t| > T \qquad (\delta, D = \text{const} > 0) \tag{2.5}$$

Пусть в точке q с координатами $x_1, \ldots, x_n, \tau$

$$v_k(x_1, \ldots, x_n, \tau) = v_k(q) = -r^A(q_k)\, \psi[t(q)] \quad \text{при } q \text{ из } g_k, \ v_k \equiv 0 \quad \text{вне } g_k \tag{2.6}$$

где $A > 0$ — постоянная, $t(q)$ — момент времени, когда $f(q, t)$ пересекает N_k в точке q_k. Вследствие (2.4) траектории $f(p, t)$, начальные точки которых p лежат на цилиндре $x_1^2 + \ldots + x_n^2 = H^2$, за время $|t| < T$ не могут проникнуть внутрь цилиндра $J(H \exp(-Tn^2L))$, т. е. функция v_k определена внутри $V = J[H \exp(-Tn^2L)]$. Вследствие теоремы о дифференцировании решений по начальным данным [4] производные $\partial v_k / \partial x_i$ существуют и непрерывны. Существование и непрерывность $\partial v_k / \partial t$ следует из непрерывности $\partial v_k / \partial x_i$ и dv_k / dt, так как $\partial v_k / \partial t$ можно рас-



Фиг. 1

сматривать как производную по направлению в системе координат, определенной осями x_i и направлением траектории в данной точке. Производная dv_k / dt вдоль траектории непрерывна и вычисляется по формуле

$$\frac{dv_k}{dt} = -r^A(q_k)\,\psi'(t(q))\frac{dt(q)}{dt} = r^A(q_k)\,\psi'(t(q)), \qquad q_k = f(q, t(q)) \tag{2.7}$$

так как $dt(q)/dt = -1$. Функция

$$v = \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} v_k \tag{2.8}$$

удовлетворяет внутри V условиям (2.1), если A — достаточно большое число. Действительно, точка q из V лежит в конечном числе областей g_k. Это число ограничено постоянной

$$N < \frac{3T}{h} \tag{2.9}$$

Следовательно, в области V функция v определена. Траектория $f(q, t)$ пересекает по крайней мере одну гиперплоскость N_k вне $J[2r(q)]$ при $|t| < (2/\alpha)\ln(2/B^{1/2})$, что следует из (1.4) и выбора h.

Но в таком случае в точке q вследствие (2.5) и (2.7)

$$\frac{dv_k}{dt} > \delta\,[2r(q)]^A \tag{2.10}$$

Кроме того, по условиям (2.5) в точке q должно быть $dv_j / dt \geqslant 0$ для всех j, за исключением, может быть, двух последовательных номеров $j, j+1$, соответствующих гиперплоскостям N_j, N_{j+1}, смежных с q. Поэтому в точке q

$$\frac{dv}{dt} > r^A(q)\left[\delta 2^A - 2D\left(\frac{9}{8}\right)^A\right] \tag{2.11}$$

Из (2.11) следует, что при A, достаточно большом, выполняется вторая оценка (2.1). Вычислим производные $\partial v_k / \partial x_i$:

$$\frac{\partial v_k}{\partial x_i} = A r^{A-1}(q_k)\,\psi(t(q)) \sum_{j=1}^{n} \frac{x_{jq_k}}{r(q_k)} \frac{\partial x_{jq_k}}{\partial x_i} \qquad (x_{jq_k} \text{ — координаты } q_k) \tag{2.12}$$

Производные $\partial x_{jq_k} / \partial x_i$ удовлетворяют неравенству [2]

$$\left|\frac{\partial x_{jq_k}}{\partial x_i}\right| \leqslant n \exp\,[nL\,|\,t(q)\,|\,] < n \exp\,\{nLT\} \tag{2.13}$$

Так как любая точка q лежит в конечном числе (2.9) областей g_k и отношение $r(q_k)/r(q)$ вследствие (2.4) ограничено постоянной, не зависящей от r, то из (2.12) и (2.13) следует оценка (2.1) для $\partial v / \partial x_i$. Из (2.6), (2.9) и ограниченности $r(q_k)/r(q)$ следует также и первая оценка (2.1).

Теорема доказана.

§ 3. Условие (1.4) является также необходимым для существования функции v, удовлетворяющей оценкам (2.1).

Теорема 3. 1. Если в окрестности точки $x_1 = \ldots = x_n = 0$ существует функция v, удовлетворяющая оценкам (2.1), то выполняется условие (1.4).

Доказательство. Рассмотрим точку p. Обозначим через $v(p, t_0, t)$ значение v вдоль траектории $f(p, t_0, t)$. Пусть для определенности $v(p, t_0, t_0) \geqslant 0$. При $t_1 = t_0 + h$ (h — фиксированная постоянная) вследствие (2.1) имеем

$$v(p, t_0, t_1) > r^A(p)\, l \tag{3.1}$$

причем $l > 0$ — постоянная, не зависящая от $r(p)$, и при $t > t_1$

$$\frac{dv}{dt} > \frac{c_2}{c_1} v \qquad \text{или} \qquad v(p, t_0, t) > \exp\left[\frac{c_2}{1}(t - t_0)\right] v(p, t_0, t_1) \exp\left(-\frac{hc_2}{c_1}\right)$$

и вследствие (2.1) и (3.1), при $t \geqslant t_0$

$$r^A(p, t_0, t) > r^A(p)\, B^A e^{A\alpha(t-t_0)} \qquad (B, \alpha = \mathrm{const} > 0) \tag{3.2}$$

Из (3.2) следует, что в данном случае неравенство (1.4) выполняется при $t \geqslant t_0$. Так же проверяется выполнение (1.4) при $t \leqslant t_0$ в случае $v(p, t_0, t_0) \leqslant 0$. Теорема доказана.

Итак, условие (1.4) является необходимым и достаточным для существования функции v, удовлетворяющей оценкам (2.1).

§ 4. Рассмотрим вопрос об устойчивости по первому приближению.

Теорема 4.1. Если невозмущенное движение асимптотически устойчиво и выполняется условие (1.4), то существует функция v, удовлетворяющая условиям теоремы А. М. Ляпунова об асимптотической устойчивости, причем выполняются оценки (2.1).

Примечание. Эта теорема обобщает теорему И. Г. Малкина [5] (стр. 313) о существовании функции v в виде формы степени m в случае линейных уравнений. В общем случае (1.1) функция v не будет формой, однако сохраняются оценки (2.1), характерные для формы и важные для исследования устойчивости по первому приближению.

Для доказательства теоремы достаточно показать, что функция v из теоремы *2.1* является определенно отрицательной. Это следует из неравенств

$$v(p,\ t) = v(x_1, \ldots, x_n, t) = \int_{\infty}^{t} \frac{dv}{d\tau}\, d\tau \leqslant -\int_{t}^{\infty} c_2 r^A d\tau \leqslant -\int_{0}^{r} \frac{c_2 r^{A-1}}{n^2 L}\, dr < -c_4 r^A$$

Рассмотрим случай неустойчивости. Для неустойчивости невозмущенного движения достаточно существования числа $t = t_0 \geqslant 0$ и последовательности точек $p_1, p_2, \ldots, p_k, \ldots \to 0$ таких, что (1.4) выполняется для положительных полутраекторий $f(p_k, t_0, t)$, т. е.

$$r(p_k, t_0, t) \geqslant Br(p_k)\, e^{\alpha(t-t_0)} \quad \text{при } t \geqslant t_0 \ (k = 1, 2, \ldots) \tag{4.1}$$

Теорема 4.2. Если выполняются условия (1.4) и (4.1), то существует функция v, удовлетворяющая условиям второй теоремы Ляпунова о неустойчивости [6] (стр. 87), причем выполняются оценки (2.1).

Доказательство. Достаточно показать, что для функции v из теоремы 2.1 существуют число $t_1 > 0$ и последовательность точек $q_1, q_2, \ldots, q_k, \ldots$ $\ldots, \to 0$ таких, что $v(q_k, t_1) > 0$. В качестве числа t_1 и точек q_k достаточно выбрать $t_1 = t_0 + 2c_1/c_2B^A$, $q_k = f(p_k, t_0, t_1)$, так как при $p_k \to 0$ имеем $q_k \to 0$ и

$$v(p_k, t_0, t_1) > v(p_k, t_0, t_0) + \int_{t_0}^{t_1} \frac{dv}{d\tau}\, d\tau$$

но вследствие (2.1) и (4.1)

$$v(q_k, t_1) = v(p_k, t_0, t_1) > -c_1 r^A(p_k) + \int_{t_0}^{t_1} c_2 r^A(p_k) B^A dt > c_1 r^A(p_k) > 0$$

Теорема доказана.

Теорема 4.3. Пусть выполняется условие (1.4). Можно указать число $a > 0$ такое, что характер поведения траекторий (асимптотическая устойчивость или в случае (4.1) неустойчивость) не нарушается добавками R_i к правым частям уравнений (1.1), если выполняются неравенства [1]

$$|R_i(x_1, \ldots, x_n, t)| < a(x_1^2 + \ldots + x_n^2)^{1/2} \tag{4.2}$$

Для доказательства теоремы достаточно заметить, что производная dv/dt функции v из теоремы *4.1* (или *4.2* в случае неустойчивости) вдоль траекторий системы

$$\frac{dx_i}{dt} = X_i(x_1, \ldots, x_n, t) + R_i(x_1, \ldots, x_n, t) \tag{4.3}$$

вследствие (2.1), (4.2) и

$$\left.\frac{dv}{dt}\right|_{(4.3)} = \left.\frac{dv}{dt}\right|_{(1.1)} + \sum \frac{\partial v}{\partial x_i} R_i > c_2 r^A - nac_3 r^A$$

при a, достаточно малом, сохраняет свойство определенной положительности.

Пусть уравнения (1.1) линейны, т. е. $X_i = p_{i1}(t)x_1 + \ldots p_{in}(t)x_n$, где $p_{ij}(t)$ — непрерывные и ограниченные функции времени, а нелинейные добавки R_i удовлетворяют неравенству

$$|R_i(x_1, \ldots, x_n, t)| < M(x_1^2 + \ldots + x_n^2)^{(1+\beta)/2} \tag{4.4}$$

где M, $\beta > 0$ — постоянные. Тогда следствием теоремы *4.3* будет следующая теорема.

---

[1] В случае асимптотической устойчивости этот факт доказан также иным путем Е. А. Барбашиным и М. А. Скалкиной [11].

Теорема 4.4. Если решения системы линейного приближения удовлетворяют условию (1.4), то асимптотическая устойчивость (или неустойчивость) невозмущенного движения определяется этим линейным приближением и не зависит от членов высшего порядка малости[1].

Укажем еще следствие теоремы *4.3.*

Следствие[2]. *1.* Если выполняется условие (1.4), то можно указать число $h>0$ такое, что характер поведения решений (асимптотическая устойчивость или в случае (4.1) неустойчивость) системы в конечных разностях

$$x_i^{(k+1)} - x_i^{(k)} = X_i(x_1^{(k)}, \ldots, x_n^{(k)}, kh)\,h \tag{4.5}$$

или уравнений с запаздыванием аргумента

$$\frac{dx_i}{dt} = X_i(x_1(t-\eta_{i1}), \ldots, x_n(t-\eta_{in}), t) \tag{4.6}$$

соответствующих системе (1.1), определяется поведением траекторий (1.1) при условии, что $|\eta_{ij}|<h$.

Для доказательства следствия достаточно заметить, что влияние запаздываний η_{ij} сводится[7] к добавкам R_i, а уравнения (4.5) можно рассматривать как уравнения с запаздываниями $\eta_{ij}(t)=t-kh$ при $kh<t<(k+1)h$.

Тот факт, что функции $\eta_{ij}(t)$ разрывны, не имеет значения, так как при исследовании методом функций Ляпунова добавочные функции R_i могут иметь любую структуру, лишь бы выполнялись неравенства (4.2).

Рассмотрим пример

$$\frac{dx_i}{dt} = p_{i1}(t)x_1 + \ldots + p_{in}(t)x_n + R_i(x_1, \ldots, x_n, t) \tag{4.7}$$

где функции R_i удовлетворяют условию (4.4).

Предположим, что можно указать матрицу

$$Q(t) = \begin{Vmatrix} q_{11}(t) \ldots q_{1n}(t) \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ q_{n1}(t) \ldots q_{nn}(t) \end{Vmatrix} \tag{4.8}$$

удовлетворяющую условиям

$$Q(t_1)Q(t_2) - Q(t_2)Q(t_1) = 0, \qquad p_{ij}(t) - q_{ij}(t) = \varepsilon M_{ij}(t) \tag{4.9}$$

где $M_{ij}(t)$ ограничены на интервале $0\leqslant t<\infty$; при этом $|\operatorname{Re}\lambda_i(t)|>\delta>0$, где δ — постоянная и $\lambda_i(t)$ — корни уравнения

$$|\,\|q_{ij}(t)\| - \lambda E\,| = 0 \tag{4.10}$$

которые предполагаются различными при всех t, за исключением отдельных изолированных значений.

---

[1] Теорема 4.4. соответствует критерию К. П. Персидского об асимптотической устойчивости по первому приближению [1,2], охватывая одновременно случай устойчивости и неустойчивости.

[2] В случае асимптотической устойчивости это утверждение для уравнений (4,5) было доказано М. А. Скалкиной другим путем, без применения функций Ляпунова.

Тогда можно указать такое число $\varepsilon > 0$, что асимптотическая устойчивость или неустойчивость невозмущенного движения $x_1 = \ldots = x_n = 0$ уравнений (4.7) определится корнями уравнения (4.10), т. е. при условии $\operatorname{Re}\lambda_i < -\delta$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ имеет место асимптотическая устойчивость, в случае $\operatorname{Re}\lambda_k > \delta$ по крайней мере для одного k — неустойчивость.

Для доказательства заметим, что из условия (4.9) следует, что $Q(t_1)Q(t_2) - Q(t_2)Q(t_1) = 0$, и так как в случае различных ненулевых корней собственные векторы перестановочных матриц совпадают [8], то собственные векторы матрицы $Q(t)$ не зависят от времени.

Поэтому линейным преобразованием с постоянными коэффициентами $y_i = a_{i1}x_1 + \ldots + a_{in}x_n$, где $a_{1j}, \ldots, a_{nj}$ — j-й нормированный собственный вектор, приведем систему уравнений

$$\frac{dx_i}{dt} = q_{i1}x_1 + \ldots + q_{in}x_n \qquad (i = 1, \ldots, n) \tag{4.11}$$

к виду

$$\frac{dy_k}{dt} = \lambda_k y_k$$

и, следовательно, решения системы (4.11) удовлетворяют условию (1.4).

Так как система (4.7) в окрестности невозмущенного движения отличается от системы (4.11) на величины

$$R_i^* = \sum_{j=1}^{n} (p_{ij} - q_{ij}) x_j + R_i(x_1, \ldots, x_n, t)$$

удовлетворяющие условию (4.2) при достаточно малом ε, то утверждение можно считать доказанным.

§ 5. Рассмотрим уравнения возмущенного движения

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{j_1=1,\ldots,j_n=1}^{j_1+\ldots+j_n=m} p_{ij_1\ldots j_n}(t)\, x_1^{j_1} \ldots x_n^{j_n} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n;\ m > 1) \tag{5.1}$$

где $p_{ij_1\ldots j_n}(t)$ — непрерывные ограниченные функции времени на интервале $0 \leqslant t < \infty$, $|\, p_{ij_1\ldots j_k}(t) \,| < L$. Исследуем вопрос об изменении характера поведения решений при добавках к правым частям (5.1) функций $R_i(x_1, \ldots, x_n, t)$, имеющих порядок малости выше m.

В работе И. Г. Малкина [3] показано, что при постоянных $p_{ij_1\ldots j_n}$ асимптотическая устойчивость не нарушается, если выполняются неравенства

$$|\, R_i(x_1, \ldots, x_n, t) \,| < a(\,|\, x_1 \,| + \ldots + |\, x_n \,|\,)^m \tag{5.2}$$

где a — достаточно малая положительная постоянная.

Простой пример показывает, что аналогичное утверждение в случае неустойчивости неверно. Рассмотрим уравнения

$$\frac{dx}{dt} = y^3 + z^2 x, \qquad \frac{dy}{dt} = -x^3 + z^2 y, \qquad \frac{dz}{dt} = -z^3 \tag{5.3}$$

Решение $x = y = z = 0$ неустойчиво, так как для $u = \frac{1}{4}(x^4 + y^4)$ имеем

$$\frac{du}{dt} = z^2 u, \quad \text{или} \quad \frac{du}{dz} = -\frac{u}{z}, \qquad \text{т. е.} \quad u(z) = \frac{u_0 z_0}{z}$$

и $u \to \infty$ при $t \to \infty$ вследствие $z \to 0$. Между тем для любой непрерывной функции $\eta(x_1, \ldots, x_n)$, положительной всюду, кроме точки $x = y = z = 0$, можно указать добавки $|R_i| < \eta$, нарушающие свойство неустойчивости.

Для этого достаточно положить $R_1 = -\eta_u x$, $R_2 = -\eta_u y$, $R_3 = 0$, где $\eta_u = \min \eta$ на поверхности $(x^4 + y^4) = 4u$.

Действительно, на поверхности $4u = \varepsilon$, $z^2 \leqslant \eta_\varepsilon$ вдоль траекторий системы

$$\frac{dx}{dt} = y^3 + z^2 x + R_1, \quad \frac{dy}{dt} = -x^3 + z^2 y + R_2, \quad \frac{dz}{dt} = -z^3 \tag{5.4}$$

имеем

$$\left.\frac{du}{dt}\right|_{(5.4)} = z^2(x^4 + y^4) - \eta_\varepsilon(x^4 + y^4) \leqslant 0$$

Плоскости $z^2 = \eta_\varepsilon$ пересекаются траекториями (5.4) в направлении к точке $x = y = z = 0$, поэтому поверхность $4u = \varepsilon$, $z^2 = \eta_\varepsilon$ пересекается траекториями (5.4) внутрь. Вследствие произвольной малости ε отсюда следует устойчивость точки $x = y = z = 0$.

В примере (5.3) неустойчивость не является грубым свойством. Это возможно лишь при наличии траекторий, отличных от $x = y = z = 0$ и лежащих целиком в окрестности этой точки [9]; здесь эти траектории $u = c$, $z = 0$.

Покажем, что при постоянных $p_{ij_1 \ldots j_n}$ отсутствие траекторий, ограниченных при $-\infty < t < \infty$ (за исключением $x_i \equiv 0$), достаточно для того, чтобы характер поведения решения (асимптотическая устойчивость или неустойчивость) не менялся от добавок R_i, удовлетворяющих (5.2).

§ 6. В этом и следующем параграфах предполагается, что коэффициенты $p_{ij_1 \ldots j_n}$ постоянны и не существует решений (5.1) (за исключением $x_i \equiv 0$), ограниченных при $-\infty < t < \infty$.

Докажем существование функции Ляпунова v, решающей задачу устойчивости по приближению порядка m. Существование функции v, производная которой dv/dt знакоопределенна, доказано в статье [9], однако в данном случае нужно доказать существование функции, удовлетворяющей определенным оценкам [1].

Теорема 6.1. Если нет решений (5.1), отличных от $x_1 = \ldots = x_n = 0$ и ограниченных при $-\infty < t < \infty$, то существует функция $v(x_1, \ldots, x_n)$ класса C^1, определенная во всем пространстве $\{x_i\}$ и удовлетворяющая оценкам

$$|v| < c_1 r^A, \qquad \frac{dv}{dt} > c_2 r^{A+m-1}, \qquad \left|\frac{\partial v}{\partial x_i}\right| < c_3 r^{A-1} \tag{6.1}$$

где A, c_1, c_2, c_3 — положительные постоянные.

Доказательство. Обозначим через $J(R)$ и $E(R)$ внутреннюю и внешнюю части пространства, на которые его делит сфера $x_1^2 + \ldots + x_n^2 = R^2$, через $G(R_1, R_2) = J(R_1) - J^+(R_2)$. Дугой из $G(R_1, R_2)$ назовем максимальную связную дугу траектории, лежащую в области G. Можно ука-

---

[1] Примененный здесь способ построения v (с соответствующими изменениями) можно применить и в общем случае, рассмотренном в статье [9].

зать [9] число $\delta > 0$ такое, что не существует дуги $\{p, q, m\}$, из $J(4)$, у которой точки p и m лежат на сфере $x_1^2 + \ldots + x_n^2 = \delta^2$, а точка q, заключенная между p и m, лежит вне $J(^1/_4)$.

Рассмотрим траекторию $f(p, t)$, проходящую при $t = 0$ через точку p, лежащую на сфере:

$$x_1^2 + \ldots + x_n^2 = 4 \tag{6.2}$$

Можно указать моменты времени $t_1 < 0$, $t_2 > 0$ такие, что точки $f(p, t_1)$, $f(p, t_2)$ лежат вне $G(2, \delta)$.

Дугу $f(p, t)$ $(t_1 < t < t_2)$ можно выбрать таким образом и окружить интегральной трубкой $g(p)$ [9] столь малого радиуса, чтобы концы $g(p)$ при $t = t_1$ и $t = t_2$ лежали вне $G^+[2, \delta]$ и вся трубка $g(p)$ — вне $J(^1/_2\delta)$. Система трубок $g(p)$, построенная для всех p из (6.2), покроет область $G^+[2, ^1/_4]$ вследствие выбора δ. Выделим конечную систему трубок, покрывающих $G(2, ^1/_4)$, и перенумеруем числами $k = 1, 2, \ldots, N$. Пусть положительный конец g_k лежит вне $J(2)$. Построим функцию $v_k(x_1,\ldots,x_n)$ класса C^1 в $J(2)$, положительную в g_k, равную нулю вне g_k и такую, что $(dv_k/dt) > 0$ в g_k. Если положительный конец g_k лежит в $J(\delta)$, то построим функцию v_k класса C^1 в $J(2)$, отрицательную в g_k, равную нулю вне g_k, причем $(dv_k/dt) > 0$ в g_k. Существование таких функций доказано в статье [9].

Обозначим через $\psi(r)$ непрерывно дифференцируемую положительную функцию, равную 1 при $r \leqslant \frac{3}{2}$, $\psi(r) = 0$ при $r \geqslant 2$. Функция

$$V_0 = \sum_{k=1}^{N} \psi(r)\, v_k \qquad (r^2 = x_1^2 + \ldots + x_n^2) \tag{6.3}$$

непрерывно дифференцируема во всем пространстве и удовлетворяет следующим условиям:

$$\frac{dV_0}{dt} > \varepsilon \qquad \text{в области} \quad G^+(1, ^1/_4) \tag{6.4}$$

$$\left|\frac{dV_0}{dt}\right| < M, \qquad |V_0| < M, \qquad \left|\frac{\partial V_0}{\partial x_i}\right| < M \qquad \text{во всем пространстве } \{x_i\} \tag{6.5}$$

$$V_0 \equiv 0 \qquad \text{вне } G(2, ^1/_2\delta) \tag{6.6}$$

Построим функцию V_l $(l = \pm 1, \pm 2, \ldots)$ следующим образом. В точке q с координатами $x_{1q}, \ldots, x_{nq}$ значение $V_l(q)$ равно значению функции V_0 в точке с координатами $x_{1q}/2^l, \ldots, x_{nq}/2^l$, умноженному на 2^{Al} (здесь A — постоянная). Уравнения (5.1) допускают подобное преобразование $x_i' = kx_i$, $t = t'k^{m-1}$, поэтому функция V_l удовлетворяет оценкам

$$|V_l| < M2^{lA}, \qquad \left|\frac{\partial V_l}{\partial x_i}\right| < M2^{l(A-1)} \tag{6.7}$$

$$\left|\frac{dV_l}{dt}\right| < M2^{l(A+m-1)} \qquad \text{во всем пространстве} \tag{6.8}$$

$$\frac{dV_l}{dt} > \varepsilon\, 2^{l(A+m-1)} \qquad \text{в области } G^+(2^l, 2^{l-2}) \tag{6.9}$$

$$V_l \equiv 0 \text{ вне области } G(2^{l+1}, \delta 2^{l-1}) \tag{6.10}$$

Функция

$$v = \sum_{l=-\infty}^{l=+\infty} V_l$$

удовлетворяет (6.1), если A — достаточно большое число. Действительно, пусть $r(q) = (x_{1q}^2 + \cdots + x_{nq}^2)^{1/2}$ удовлетворяет неравенству

$$2^{l-1} \leqslant r(q) \leqslant 2^l$$

Тогда в точке q вследствие (6.10) имеем

$$\frac{dv}{ds} = \frac{dV_{l-1}}{dt} + \frac{dV_l}{dt} + \cdots + \frac{dV_{l+d}}{dt} \tag{6.11}$$

где d — целое число, не зависящее от l. Из (6.11) и оценок (6.7), (6.8), (6.9) следует

$$\frac{dv}{dt} > \varepsilon 2^{l(A+m-1)} - M 2^{(l-1)(A+m-1)} =$$

$$= 2^{l(A+m-1)}(\varepsilon - M 2^{1-A-m}) > \frac{\varepsilon}{2} r(q)^{A+m-1}$$

если $A > \log_2(2M/\varepsilon)$, что и доказывает вторую оценку (6.1).

Аналогичным образом доказывается справедливость остальных оценок (6.1), исходя из равенств

$$\frac{\partial v}{dx_i} = \frac{\partial V_{l-1}}{\partial x_i} + \cdots + \frac{\partial V_{l+d}}{\partial x_i}, \qquad v = V_{l-1} + \cdots V_{l+d}$$

и оценок (6.7). Теорема доказана.

§ 7. Рассмотрим уравнения возмущенного движения

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{j_1=1\ldots j_n=1}^{j_1+\ldots+j_n=m} p_{ij_1\ldots j_n} x_1^{j_1} \ldots x_n^{j_n} + R_i(x_1, \ldots, x_n, t) \tag{7.1}$$

Теорема 7.1. Пусть решение $x_1 = \ldots = x_n = 0$ уравнений (5.1) (при постоянных $p_{ij_1\ldots j_n}$) асимптотически устойчиво (или неустойчиво, причем не существует ограниченных при $-\infty < t < \infty$ решений, кроме $x_i \equiv 0$), тогда существует число $a > 0$ такое, что решение $x_1 = \ldots = x_n = 0$ уравнений (7.1) также асимптотически устойчиво (неустойчиво), если выполняются неравенства (5.2).

Доказательство. Рассмотрим функцию v из теоремы *6.1*. Нетрудно проверить[9], что в случае асимптотической устойчивости решения $x_1 = \ldots = x_n = 0$ системы (5.1) v определенно отрицательна, в случае неустойчивости v удовлетворяет условиям первой теоремы Ляпунова о неустойчивости [2] (стр. 87). Вследствие (6.1) и (5.2) для производной dv/dt в силу (7.1) имеем оценку

$$\left.\frac{dv}{dt}\right|_{(7.1)} > c_2 r^{A+m-1} - a c_3 P r^{A+m-1} \qquad (P = const) \tag{7.2}$$

из которой следует, что при a, достаточно малом, dv/dt в силу (7.1) является определенно положительной функцией, а это и доказывает теорему.

Следствием теоремы 7.1 является следующее утверждение.

Следствие [1]. Если уравнения возмущенного движения имеют вид (7.1), где функции R_i имеют порядок малости выше m, т. е. удовлетворяют неравенству

$$|R_i| < Mr^{m+\beta}$$

где M и β — положительные постоянные, и при этом уравнения (5.1) не имеют решений (кроме $x_i \equiv 0$), ограниченных при $-\infty < t < \infty$, то характер поведения траекторий (асимптотическая устойчивость или неустойчивость) определяется уравнениями (5.1) первого приближения.

Покажем, что в случае отсутствия ограниченных при $-\infty < l < \infty$ траекторий (кроме $x_i \equiv 0$) решения системы (5.1) с постоянными коэффициентами удовлетворяют некоторой оценке, аналогичной экспоненциальному закону изменения (1.4) в линейном случае.

Теорема 7.2. При отсутствии решений, ограниченных при $-\infty < t < < \infty$ (кроме $x_i \equiv 0$), для любой точки p по крайней мере одна из полутраекторий удовлетворяет условию

$$\frac{1}{r^{m-1}(p,\ t_0,\ t)} < \frac{B}{r^{m-1}(p)} - \alpha\,|t - t_0| \qquad (\text{при } t \geqslant t_0 \text{ или } t \leqslant t_0) \tag{7.3}$$

где α и B — положительные постоянные.

Примечание. В случае асимптотической устойчивости оценка (7.3) принимает вид:

$$\frac{1}{r^{m-1}(t)} > \frac{B}{r(t_0)^{m-1}} + \alpha\,(t - t_0) \text{ при } t \geqslant t_0 \tag{7.4}$$

откуда следует, что $r(t)$ имеет тот же порядок убывания при $t \to \infty$, что и $t^{1/m-1}$.

Доказательство. Рассмотрим функцию v из теоремы *6.1*. Пусть p лежит на сфере радиуса $R = 1$ и (для определенности) $v(p) \geqslant 0$. В точке $f(p,\ T)$, где T — фиксированное число такое, что за время T траектория не выходит из $G(2,\ {}^1/_2)$, имеем

$$v(p,\ T) \geqslant \int_0^T \frac{dv}{dt}\,dt \geqslant c_2 r_{\min}^{A+m-1} T > c_2 T\,({}^1/_2)^{A+m-1} > \varepsilon \tag{7.5}$$

где $\varepsilon > 0$ не зависит от точки p. Вдоль $f(p,\ t)$ при $t > T$ получим

$$\frac{dv}{dt} \geqslant c_2 r^{A+m-1} > \delta v^{1+\frac{m-1}{A}} \qquad (\delta > 0 - \text{const})$$

т. е.

$$\left(\frac{1}{v(t)}\right)^{(m-1)/A} < \left(\frac{1}{v(T)}\right)^{(m-1)/A} - \delta_1(t - T) \qquad (\delta_1 < 0)$$

или, учитывая (7.5) и (6.1), при $t > t_0$

$$\left(\frac{1}{r(p,\ t_0,\ t)}\right)^{m-1} < B - \alpha\,(t - t_0) \tag{7.6}$$

В случае $v(p) \leqslant 0$ аналогичным образом устанавливается справедливость (7.5) при $t < 0$. Выполнение (7.3) доказано вследствие (7.6) для любой траектории, начальная точка которой p лежит на сфере $R = 1$.

---

[1] В случае асимптотической устойчивости утверждение теоремы 7.1 совпадает с цитированной выше теоремой И. Г. Малкина [3].

Так как уравнения (5.1) (при постоянных $p_{ij_1\ldots j_n}$) допускают преобразование $x_i' = kx_i$, $t'k^{m-1} = t$, то оценку (7.3) можно считать доказанной для любой точки p, отличной от $x_1 = \ldots = x_n = 0$.

§ 8. Рассмотрим уравнения (5.1) с переменными коэффициентами $p_{ij_1\ldots j_n}t$ в случае асимптотической устойчивости невозмущенного движения.

Очевидно, асимптотическая устойчивость сохраняется не всегда при добавках R_i, удовлетворяющих условиям (5.2).

Покажем однако, что и в случае переменных $p_{ij_1\ldots j_n}(t)$, когда решения уравнений (5.1) в окрестности невозмущенного движения удовлетворяют оценке (7.3), характеризующей асимптотическую устойчивость при постоянных $p_{ij_1\ldots j_n}$ асимптотическая устойчивость не нарушается добавками R_i, удовлетворяющими (5.2)[1].

Теорема 8.1. При условиях (7.4) в окрестности точки $x_1 = \ldots = x_n = 0$ существует функция v класса C^1, удовлетворяющая для системы (5.1) условиям теоремы Ляпунова об асимптотической устойчивости [6], причем выполняются оценки (6.1)[2].

Доказательство. Рассмотрим в $n+1$-мерном пространстве $\{x, \tau\}$ систему уравнений

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{j_1=1\ldots j_n=1}^{j_1+\ldots+j_n=m} p_{ij_1\ldots j_n}(\tau)\, x_1^{j_1}, \ldots x_n^{j_n}, \qquad \frac{d\tau}{dt} = 1 \tag{8.1}$$

в области

$$|x_i| \leqslant H, \qquad -\infty < \tau < +\infty \tag{8.2}$$

Здесь также можно продолжить функции $p_{ij_1\ldots j_n}(t)$ в области $t < 0$ с сохранением условия (7.4).

Можно указать число $T > 0$, не зависящее от r, такое, что нет трех точек, лежащих на одной и той же дуге из (8.2), принадлежащих $G[(1+{}^3/_4)r,\ ({}^1/_4)r]$ и удаленных друг от друга (по оси τ) на расстояние, большее, чем T/r^{m-1}. Действительно, достаточно положить $T = B\,4^m/\alpha$. Можно указать число $h > 0$ такое, что любая дуга пересекает $G[{}^{65}/_{64}r,\ {}^{63}/_{64}r]$ за время $\Delta t > h/r^{m-1}$. Действительно, из (5.1) и $|p_{ij_1\ldots j_n}| < L$ имеем оценку $|dr|/dt < Mr^m$, где $M = \mathrm{const}$, откуда следует, что $\Delta t > hr^{1-m}$.

Заметим еще, что траектория, начавшаяся при $t = t_0$ внутри $J(r)$, при всех $t \geqslant t_0$ лежит в $J(rB^{1/(m-1)})$.

Пусть $2R < H/B^{1(m-1)}$. Обозначим через $N_{1k}(l_1/l_2)$ пересечение гиперплоскости $\tau = khR^{1-m}$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ с областью $G[(1+l_1/l_2)R,$ $(1-l_1/l_2)R]$. Согласно предыдущим оценкам каждая дуга пересекает

---

[1] Этот факт соответствует критерию К. П. Персидского [1, 2] в случае $m = 1$.

[2] Существование функции Ляпунова v доказано в работе И. Г. Малкина [10], так как при условиях (7.4) асимптотическая устойчивость равномерна по координатам x_{i0} и времени t_0. Однако для исследования влияния добавок R_i, удовлетворяющих (5.2), функция v должна удовлетворять оценкам (6.1), которые из доказательства [10] не следуют.

конечное число гиперплоскостей $N_{1k}(^1/_2)$ при $|t| < TR^{1-m} + hR^{1-m}$. Это число ограниченно постоянной K, не зависящей от R; число R фиксируем.

Обозначим через g_{1k} область, определенную условием: точка q лежит в g_{1k}, если $q = f(p, t)$ при

$$p \in N_{1k}(^1/_2), \qquad -hR^{1-m} < t < TR^{1-m} + hR^{1-m}$$

Определим неотрицательную функцию $\varphi(r)$ класса C^1 следующим образом (8.3)

$$\varphi(r) = R^A \quad \text{при } {}^{63}/_{64}R < r < {}^{65}/_{64}R, \qquad \varphi(r) \equiv 0 \quad \text{при } r > {}^{17}/_{16}R, \quad r < {}^{15}/_{16}R$$

Очевидно, функцию $\varphi(r)$ можно определить так, чтобы выполнялось неравенство

$$\left|\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\right| < \beta R^{A-1} \qquad (\beta \text{ — постоянная, не зависящая от } R) \tag{8.4}$$

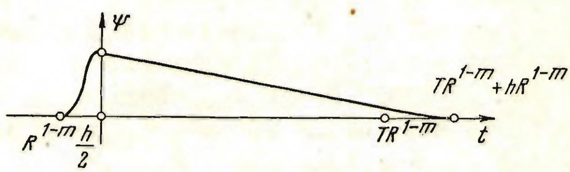
Пусть $\psi(t)$ — непрерывно дифференцируемая функция, график которой изображен на фиг. 2, и удовлетворяющая условиям (8.5)

$$\psi(t) < 1, \qquad \psi'(t) < -\omega R^{m-1} \quad \text{при } 0 < t < TR^{1-m}, \qquad |\psi'(t)| < M_1 R^{m-1}$$

где M_1, ω — положительные постоянные. Определим функцию v_{1k} так:

$$v_{1k}(q) = \varphi[r(q_k)]\,\psi[t(q)] \quad \text{при } q \text{ из } g_{1k}, \qquad v_{1k} \equiv 0 \quad \text{при } q \text{ вне } g_{1k} \tag{8.6}$$

где q_k — та точка, в которой $f(q, t)$ пересекает $N_{1k}(^1/_2)$.



Фиг. 2

Аналогично тому, как это сделано выше при доказательстве теоремы *2.1*, можно проверить, что

$$v_1 = \sum_{-\infty}^{\infty} v_{1k}$$

функция класса C^1, в области (8.2) удовлетворяющая оценкам

$$\frac{dv_1}{dt} > \varepsilon R^{A+m-1} \qquad \text{в области } G[^1/_2R, \ ^1/_4R] \tag{8.7}$$

$$\left|\frac{\partial v_1}{\partial x_i}\right| < QR^{A-1} \qquad \text{в области (8.2)} \tag{8.8}$$

причем Q — постоянная, как это следует из оценки [2] (стр. 21), где постоянную Липшица следует положить равной LCR^{m-1},

$$|v_1| < Q_1 R^A \quad \text{в области (8.2)} \qquad v_1 \equiv 0 \quad \text{вне } G[D_1R, \ (1/D_2)R] \tag{8.9}$$

где ε, C, Q_1, D_1, D_2 — постоянные.

Выполняя аналогичные построения для чисел

$$R_2 = R/2, \ldots, R_j = R/2^{j-1}$$

построим последовательность функций v_j $(j = 1, 2, \ldots)$.

Используя оценки (8.7) справедливые для всех v_j с постоянными, не зависящими от R_j, так же как это сделано при доказательстве теоремы *6.1*, можно показать, что функция

$$v = \sum_{j=1}^{\infty} v_j \qquad (8.10)$$

удовлетворяет всем условиям теоремы.

В частности определенная отрицательность следует из неравенств

$$v(p, t) = \int_{\infty}^{t} \frac{dv}{d\tau} d\tau < -\int_{t}^{\infty} Dr^{A+m-1} dt < -D_2 \int_{0}^{r} r^{A-1} dr \qquad (D, D_2 = \text{const}$$

Теорема 8.2. Если решения уравнений (5.1) удовлетворяют условию (7.4), то можно указать постоянное число $a > 0$ такое, что решение $x_1 = \ldots = x_n = 0$ системы уравнений

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum p_{ij_1 \ldots j_n}(t) x_1^{j_1} \ldots x_n^{j_n} + R_i(x_1, \ldots, x_n, t) \qquad (8.11)$$

будет также асимптотически устойчивым при добавках R_i, удовлетворяющих неравенству (5.1).

Для доказательства теоремы достаточно заметить, что функция v из теоремы *8.1* является функцией Ляпунова и для системы (8.11) с добавками, что следует из оценки (7.2), справедливой в данном случае.

Примечание. И в случае уравнений вида (5.1) можно использовать теорему *8.1* для исследования устойчивости по отношению к запаздываниям аргумента, а также в случае уравнений в конечных разностях.

§ 9. Предыдущие результаты можно обобщить на случай уравнений в конечных разностях. Рассмотрим уравнения (4.5), где функции X_i в области (1.2) удовлетворяют условиям (1.3). Обозначим

$$r(t_0, k) = [x_1^2(t_0 + kh), \ldots, x_n^2(t_0 + kh)]^{1/2}$$

Рассмотрим здесь лишь случай асимптотической устойчивости.

Теорема 9.1. Если решения уравнений (4.5) удовлетворяют условию

$$r(t_0, k) < Br(t_0, 0) e^{-\alpha kh} \qquad (9.1)$$

при всех начальных данных $(|x_i(t_0)| < \delta, \quad t_0 \geqslant 0)$, то в окрестности точки $x_1 = \ldots = x_n = 0$ существует функция Ляпунова v удовлетворяющая условиям

$$|v(x_1', \ldots, x_n', t) - v(x_1'', \ldots, x_n'', t)| < M \sum_{i=1}^{n} |x_i' - x_i''| \qquad (9.2)$$

$$v(x_1(t_0 + (k+1)h), \ldots, x_n(t_0 + (k+1)h), t_0 + (k+1)h) - \\ - v(x_1(t_0 + kh), \ldots, x_n(t_0 + kh), t_0 + kh) < -\beta r(t_0, k) \qquad (9.3)$$

$$\beta_1 (x_1^2 + \cdots + x_n^2)^{1/2} < |v(x_1, \ldots, x_n, t)| < \beta_2 (x_1^2 + \cdots + x_n^2)^{1/2}. \quad (9.4)$$

(Здесь α, β, β_1, β_2 B, M — положительные постоянные). Действительно, нетрудно проверить, что функция

$$v(x_1, \ldots, x_n, t) = \sum_{k=0}^{N} r(t + kh) \quad (9.5)$$

удовлетворяет всем условиям теоремы, если

$$N > \frac{1}{hd} \ln 2B$$

В частности оценка (9.2) сразу следует из формулы (9.5) и того факта, что на конечном интервале $0 \leqslant k \leqslant N$ решения $x_i(t_0 + kh)$ (4.5) удовлетворяют условиям Липшица по начальным данным $x_j(t_0)$.

Используя построенную функцию Ляпунова как и в случае дифференциальных уравнений, можно установить, что асимптотическая устойчивость решения $x_i = 0$ не нарушается при добавках к правым частям уравнений функций R_i, удовлетворяющих неравенствам (4.2).

Заметим также, что теоремы, доказанные в статье, можно распространить на случай больших начальных возмущений; при этом следует лишь потребовать. чтобы условия (1.4) и (7.4) выполнялись не только в окрестности начала координат, но и в достаточно больших областях, охватывающих точку $x_1 = \ldots = x_n = 0$ и соответствующих этим большим допускаемым отклонениям.

Поступила 31 I 1955

ЛИТЕРАТУРА

1. Персидский. К. П. Теория устойчивости решений дифференциальных уравнений. Диссертация, 1946.
2. Немыцкий В. В., Степанов В. В. Качественная теория дифференциальных уравнений. Гостехиздат, М.— Л., 1949.
3. Малкин И. Г. Теорема об устойчивости по первому приближению. ДАН СССР, т. LXXVI, № 6, 1951.
4. Петровский И. Г. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. Изд. 2. ОГИЗ ГТТИ, М.— Л., 1947.
5. Малкин И. Г. Теория устойчивости движения. Гостехиздат, М.—Л., 1952.
6. Ляпунов А. М. Общая задача об устойчивости движения. Гостехиздат, М.—Л., 1950.
7. Барбашин Е. А., Красовский Н. Н. О существовании функций Ляпунова в случае асимптотической устойчивости в целом. ПММ, т. XVII, вып. 3, 1954.
8. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. Гостехтеоретиздат, М.— Л. 1948.
9. Красовский Н. Н. Об обращении теорем А. М. Ляпунова и Н. Г. Четаева о неустойчивости для стационарных систем дифференциальных уравнений. ПММ, т. XVIII, вып. 5, 1954.
10. Малкин. И. Г. К вопросу об обратимости теоремы Ляпунова об асимптотической устойсивости. ПММ, т. XVIII, вып. 2, 1954.
11. Барбашин Е. А., Скалкина М. А., К вопросу об устойчивости по первому приближению. ПММ, т. XIX, в. 5, 1955.