Прикладная математика и механика. Том XIX, 1955
Институт механики Академии наук Союза ССР

ОБ ОДНОМ СВОЙСТВЕ УРАВНЕНИЙ ПУАНКАРЕ

Н. Г. Четаев

(Москва)

Вообразим, что состояние некоторой механической системы, стесненной гладкими голономными координатами, определяется вещественными, вообще зависимыми, переменными $x_1, \ldots, x_n$.

Возможные перемещения системы пусть определяются по Пуанкаре k-членной группой Ли инфинитезимальных операторов X_α $(\alpha = 1, \ldots, k)$ так, что изменение функции $f(t, x_1, \ldots, x_n)$ на некотором возможном перемещении системы определяется соотношением

$$\delta f = \sum_{\alpha=1}^{k} \omega_\alpha X_\alpha f$$

Независимые параметры $\omega_1, \ldots, \omega_k$ определяют возможное перемещение.

Изменение функции $f(t, x_1, \ldots, x_n)$ на действительном перемещении системы предположим определенным функцией

$$df = \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{\alpha=1}^{k} \eta_\alpha X_\alpha f\right) dt$$

где вещественные независимые параметра η_α определяют действительное перемещение системы.

Група возможных перемещений X_α определена своими структурными постоянными $c_{\alpha\beta i}$:

$$(X_\alpha X_\beta) = \sum c_{\alpha\beta i} X_i$$

Оператор $\partial / \partial t$ перестановочен со всеми X_α. Более сложные случаи задания групп перемещений [2] рассматриваются аналогично.

Пусть $T(t, x_1, \ldots, x_n; \eta_1, \ldots, \eta_k)$ обозначает живую силу рассматриваемой механической системы, U — силовую функцию действующих на систему сил. Вместо параметров η_α возможно ввести новые переменные

$$y_\alpha = \frac{\partial T}{\partial \eta_\alpha} \qquad (\alpha = 1, \ldots, k)$$

Если ввести в рассмотрение функцию

$$H(t, x_1, \ldots, x_n; y_1, \ldots, y_k) = \sum \eta_i y_i - T - U$$

то уравнения движения можно записать в канонической форме ([1], стр. 258)

$$\frac{dy}{dt} = \sum c_{\alpha s \beta} \eta_\alpha y_\beta - X_s H, \qquad \eta_s = \frac{\partial H}{\partial y_s} \qquad (s = 1, \ldots, k)$$

Уравнения в вариациях для этих канонических уравнений допускают инварианты ([1], стр. 260)

$$\Omega' \equiv \sum [\delta y_s \omega_s] - \sum_{(\alpha,\beta)s} c_{\alpha\beta s} y_s [\omega_\alpha \omega_\beta] = C,$$

где C — постоянная, а (α,β) обозначает суммирование по всем комбинациям из k индексов по два.

Для произвольного частного решения $\delta y_\alpha, \omega_\alpha \ (\alpha = 1, \ldots, k)$ уравнений в вариациях всегда найдется другое решение, такое, что приведенный выше инвариант для них будет иметь отличное от нуля значение C. Обозначая через λ и λ' характеристические числа Ляпунова этих частных решений, из инварианта Ω' выводим, что если характеристическое число функций $y_1, \ldots, y_k$ для ведущего движения не меньше нуля, то

$$\lambda + \lambda' \leqslant 0$$

И, следовательно, если при этом ведущее или невозмущенное движение устойчиво, то необходимо, чтобы все характеристичные числа λ решений отвечающих уравнений в вариациях были равны нулю.

Отсюда [3] для таких устойчивых движений, для которых $y_1, \ldots, y_k$ являются ограниченными, существует знакоопределенный интеграл для уравнений в вариациях, так как при этом уравнения в вариациях являются, очевидно, приводимыми при помощи подстановки

$$z_\sigma = \sum (\delta y_s \omega_{s\sigma} - \omega_s \delta y_{s\sigma}) - \sum_{(\alpha\beta)s} c_{\alpha\beta s} y_s (\omega_\alpha \omega_{\beta\sigma} - \omega_\beta \omega_{\alpha\sigma})$$

где $\omega_{s\sigma}$, $\delta y_{s\sigma}$ обозначают систему линейно независимых решений уравнений в вариациях.

В качестве примера рассмотрим вопрос об устойчивости постоянных винтовых движений твердого тела в жидкости [5] для того практически интересного случая, когда массы тела имеют три взаимно ортогональные плоскости симметрии и эти же плоскости симметрии имеет поверхность, ограничивающая тело.

Принимая за координатные оси прямые пересечения плоскостей симметрии тела, назовем через u, w, v проекции на эти оси скорости начала координат, а через p, q, r проекции на те же оси угловой скорости тела. Если на тело и жидкость не действуют силы, если

$$2T = Ax^2 + By^2 + Cz^2 + a\xi^2 + b\eta^2 + c\zeta^2$$

обозначает живую силу в совместном движении твердого тела и жидкости, то канонические уравнения движения тела будут [4]

$$\frac{dx}{dt} = x\frac{\partial T}{\partial \zeta} - z\frac{\partial T}{\partial \eta}, \ldots, \qquad \frac{d\xi}{dt} = y\frac{\partial T}{\partial z} - z\frac{\partial T}{\partial y} + \eta\frac{\partial T}{\partial \zeta} - \zeta\frac{\partial T}{\partial \eta}, \ldots$$

где

$$x = \frac{\partial T}{\partial u}, \ldots, \qquad \xi = \frac{\partial T}{\partial p}, \ldots$$

не выписанные уравнения и соотношения получаются одновременной круговой перестановкой букв, (x, y, z), (ξ, η, ζ), (u, v, w) и (p, q, r). A, B, C, a, b, c — положительные постоянные.

Уравнения движения допускают частные решения в виде постоянных величин $x, y, z, \xi, \eta, \zeta$, удовлетворяющих следующей системе уравнений:

$$\frac{\partial T}{\partial \xi} = \lambda x, \ldots, \qquad \frac{\partial T}{\partial x} = \lambda \xi + \mu x, \ldots$$

с двумя новыми постоянными параметрами λ и μ.

Последние уравнения в рассматриваемом случае имеют вид:

$$a\xi = \lambda x, \ldots, \quad Ax = \lambda\xi + \mu x, \ldots$$

Откуда

$$\left(A - \frac{\lambda^2}{a} - \mu\right)x = 0, \quad \left(B - \frac{\lambda^2}{b} - \mu\right)y = 0, \quad \left(C - \frac{\lambda^2}{c} - \mu\right)z = 0$$

Не уменьшая общности, мы будем рассматривать решение

$$A - \frac{\lambda^2}{a} - \mu = 0, \qquad x = x_0, \quad y = 0, \quad z = 0, \quad \xi = \frac{\lambda}{a}x_0, \quad \eta = 0, \quad \zeta = 0$$

Решение это имеет характеристическое число, равное нулю, и представляет постоянное винтовое движение твердого тела. Зададимся вопросом об устойчивости этого движения.

Уравнения движения имеют очевидные интегралы

$$2T, \qquad x\xi + x\eta + z\zeta, \qquad x^2 + y^2 + z^2$$

Отсюда уравнения возмущенных движений будут иметь следующие интегралы в интересующем нас случае невозмущенного движения:

$$V_1 = 2Ax\delta x + 2a\xi\delta\xi + A(\delta x)^2 + B(\delta y)^2 + C(\delta z)^2 + a(\delta\xi)^2 + b(\delta\eta)^2 + c(\delta\zeta)^2$$

$$V_2 = \xi\delta x + x\delta\xi + \delta x\delta\xi + \delta y\delta\eta + \delta z\delta\zeta$$

$$V_3 = 2x\delta x + (\delta x)^2 + (\delta y)^2 + (\delta z)^2$$

Рассмотрим интеграл

$$V = V_1 - 2\lambda V_2 - \mu V_3 + V_3^2 = (A - \mu + 4x_0^2)(\delta x)^2 + (B - \mu)(\delta y)^2 +$$
$$+ (C - \mu)(\delta z)^2 - 2\lambda(\delta x\delta\xi + \delta y\delta\eta + \delta z\delta\xi) + a(\delta\xi)^2 + b(\delta\eta)^2 + c(\delta\zeta)^2 + [3]$$

Если

$$B - A + \lambda^2\frac{b-a}{ab} > 0, \qquad C - A + \lambda^2\frac{c-a}{ac} > 0$$

то интеграл V будет определенно положительной функцией величин $\delta x, \delta y, \delta z, \delta\xi, \delta\eta, \delta\zeta$ и, следовательно, при этом условии невозмущенное постоянное винтовое движение твердого тела в жидкости будет безусловно устойчивым по отношению к переменным $x, y, z, \xi, \eta, \zeta$.

Поступила 28 V 1955

ЛИТЕРАТУРА

1. Ч е т а е в Н. Г. Об уравнениях Пуанкаре. ПММ, т. V, вып. 2, 1941.
2. Ч е т а е в Н. Г. Об уравнениях Пуанкаре. ДАН СССР, стр. 103, 1928.
3. Ч е т а е в Н. Г. Об одной задаче Коши. ПММ, т. IX, вып. 2, 1945.
4. C l e b s c h, Über die Bewegung eines Körpers in einer Flüssigkeit. Mathematische Annalen, B. 3, 1871
5. Л я п у н о в А. М. О постоянных винтовых движениях твердого тела в жидкости. Соч. т. 1. Изд.-во АН СССР, М.—1954. стр. 270.