Прикладная математика и механика. Том XIX, 1955
Институт механики Академии наук Союза ССР

НЕКОТОРЫЕ ЧАСТНЫЕ СЛУЧАИ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ В СЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

А. Ш. Дорфман и И. Т. Швец
(Киев)

Движение сжимаемой жидкости в пограничном слое описывается следующей системой уравнений [1]:

$$\rho\left(v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y}\right) = -\frac{dp}{dx} + \frac{\partial}{\partial y}\left(\mu \frac{\partial v_x}{\partial y}\right) \tag{1}$$

$$\frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v_y)}{\partial y} = 0 \tag{2}$$

$$\rho\left(v_x \frac{\partial \theta}{\partial x} + v_y \frac{\partial \theta}{\partial y}\right) = \frac{1}{\Pr}\frac{\partial}{\partial y}\left(\mu \frac{\partial \theta}{\partial y}\right) + \left(1 - \frac{1}{\Pr}\right)\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\mu v_x}{EC_p}\frac{\partial v_x}{\partial y}\right) \tag{3}$$

Здесь

$$\theta = T + \frac{v_x^2}{2EC_p}, \qquad \Pr = \frac{\mu C_p}{\varkappa} \tag{4}$$

При этом P, ρ, T, μ — давление, плотность, температура и коэффициент вязкости жидкости, v_x, v_y — проекции скорости потока на оси x и y, θ — температура заторможенного потока, E — механический эквивалент телла, C_p — теплоемкость при постоянном давлении, $\varkappa$ — коэффициент теплопроводности, Pr — число Прандтля.

Система уравнений (1) — (3) решена лишь для различных случаев обтекания пластинки [1]. Обтекание пластинки характеризуется постоянством скорости внешнего потока и, следовательно, нулевым градиентом давления.

Ниже приводятся два закона изменения скорости внешнего потока, для которых система уравнений (1) — (3) может быть сведена к обыкновенному дифференциальному уравнению. Рассмотренные законы охватывают как случаи положительных, так и отрицательных градиентов давления во внешнем потоке. Отметим, что в обоих случаях получающиеся дифференциальные уравнения совпадают с уравнениями, рассмотренными при изучении пограничного слоя в несжимаемой жидкости для случаев изменения скорости внешнего потока по степенному закону и по закону обратной пропорциональности (диффузор) [1].

Указанные решения легко получить, если ввести переменные, аналогичные переменным Дородницына:

$$\xi = \int_0^x \left(\frac{P}{P_0}\right)^\alpha dx, \qquad \eta = \int_0^y \frac{\rho}{\rho_0}\, dy = \frac{P}{P_0}\int_0^y \frac{T_0}{T}\, dy \tag{5}$$

где

$$\frac{P}{P_0} = \left(1 - \frac{k-1}{k+1}\frac{u^2}{a_*^2}\right)^\gamma \qquad \left(\gamma = \frac{k}{k-1}\right) \tag{6}$$

При этом u — скорость внешнего потока, P_0, ρ_0, T_0 — параметры внешнего заторможенного потока, α — постоянная, значение которой будет определено ниже, a_* — критическая скорость, k — показатель адиабаты.

В обычной зависимости коэффициента вязкости от температуры $\mu = \mu_0 (T/T_0)^n$ полагаем $n = 1$, что, как известно, достаточно близко к действительности [1]. В этом случае, переходя к переменным ξ и η и используя (6), вместо (1) получим

$$v_x \frac{\partial v_x}{\partial \xi} + V_y \frac{\partial V_y}{\partial \eta} = \frac{T}{T_0} \frac{uu'}{1 - \frac{k-1}{k+1} \frac{u^2}{a_*^2}} + \nu_0 \frac{\partial^2 v_x / \partial \eta^2}{\left(1 - \frac{k-1}{k+1} \frac{u^2}{a_*^2}\right)^\delta} \tag{7}$$

где

$$V_y = \frac{T_0}{T} \left(\frac{P_0}{P}\right)^{\alpha - 1} v_y + v_x \left(\frac{P_0}{P}\right)^\alpha \frac{\partial \eta}{\partial x}, \qquad \delta = \frac{k(\alpha - 1)}{k - 1}, \qquad \nu_0 = \frac{\mu_0}{\rho_0} \tag{8}$$

ν_0 — кинематический коэффициент вязкости заторможенного внешнего потока. Если ввести, как обычно, функцию тока $\rho v_x = \partial\psi / \partial y$, $\rho v_y = -\partial\psi / \partial x$, то уравнение неразрывности примет вид:

$$\frac{\partial v_x}{\partial \xi} + \frac{\partial V_y}{\partial \eta} = 0 \qquad \left(v_x = \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \psi}{\partial \eta}, \qquad V_y = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \psi}{\partial \xi}\right) \tag{9}$$

Уравнение притока тепла (3) при $\Pr = 1$ значительно упрощается. Вместе с тем это достаточно точно отражает действительность [1]. В этом случае в переменных ξ, η его можно представить в виде

$$v_x \frac{\partial \theta}{\partial \xi} + V_y \frac{\partial \theta}{\partial \eta} = \nu_0 \left(\frac{P_0}{P}\right)^{\alpha - 1} \frac{\partial^2 \theta}{\partial \eta^2} \tag{10}$$

Таким образом, система уравнений (1), (2), (3) при переходе к переменным ξ, η заменяется системой (7), (9), (10). При отсутствии теплоотдачи эту систему уравнений следует решать при следующих краевых условиях:

$$y = 0, \qquad \eta = 0, \qquad v_x = v_y = V_y = 0, \qquad \frac{\partial \theta}{\partial \eta} = 0 \tag{11}$$

$$y = \infty, \qquad \eta = \infty, \qquad v_x = u, \qquad T = T_\infty \tag{12}$$

(Индексом ∞ снабжены параметры внешнего потока на границе пограничного слоя.) Нетрудно видеть, что при указанных краевых условиях уравнение (10) имеет решение:

$$\theta = T_0 = T_\infty + \frac{u^2}{2EC_p} \tag{13}$$

При помощи (4) и (9) и соотношения

$$2EC_p = \frac{k+1}{k-1} a_*^2 \tag{14}$$

тношение T / T_0 можно теперь представить в следующем виде:

$$\frac{T}{T_0} = 1 - \frac{k-1}{\rho_0^2 a_*^2 (k+1)} \left(\frac{\partial \psi}{\partial \eta}\right)^2 \tag{15}$$

Обращаясь к решению уравнения (7), заменим в нем T / T_0 v_x и V_y согласно равенствам (15), (9) и перейдем к безразмерным величинам (L — характерный размер задачи):

$$\bar{u} = \frac{u}{\sqrt{(k+1)/(k-1)\, a_*^2}}, \qquad \bar{\psi} = \frac{\psi}{\rho_0 L \sqrt{(k+1)/(k-1)\, a_*^2}}$$

$$\bar{x} = \frac{x}{L}, \qquad \bar{y} = \frac{y}{L}, \qquad \bar{\xi} = \frac{\xi}{L}, \qquad \bar{\eta} = \frac{\eta}{L}$$

(Для простоты письма черточки над обозначениями безразмерных величин в дальнейшем изложении опущены.) Тогда (7) примет вид:

$$\frac{\partial \psi}{\partial \eta} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \eta \partial \xi} - \frac{\partial \psi}{\partial \xi} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \eta^2} = \left[1 - \left(\frac{\partial \psi}{\partial \eta}\right)^2\right] \frac{uu'}{1 - u^2} + \sqrt{\frac{k-1}{k+1}} \frac{\nu_0}{a_* L (1 - u^2)^\delta} \frac{\partial^3 \psi}{\partial \eta^3} \tag{16}$$

Рассмотрим случай, когда скорость внешнего потока изменяется по закону

$$u = c\xi^m \qquad (c,\ m - \text{const}) \tag{17}$$

Уравнение (16) сводится к обыкновенному дифференциальному уравнению, если положить

$$\psi = \left[\frac{2\nu_0 c\xi^{m+1}}{a_* L (m+1)}\left(\frac{k-1}{k+1}\right)^{1/2}(1-c^2\xi^{2m})^{-\frac{m+1}{2m}}\right]^{1/2}\Phi(\tau)$$

$$\tau = \eta\left[\frac{a_* Lc(m+1)\,\xi^{m-1}}{2\nu_0}\left(\frac{k+1}{k-1}\right)^{1/2}\left(1-c^2\xi^{2m}\right)^{\frac{m+1}{2m}}\right]^{1/2}$$

Если найти соответствующие частные производные и подставить их выражения в (16), то получим

$$\Phi'''\left[(1-c^2\xi^{2m})^{\frac{k(\alpha-1)}{k-1}-\frac{m+1}{2m}}\right]^{-1} + \Phi''\Phi\frac{1}{1-c^2\xi^{2m}} = \frac{2m}{m+1}\frac{1}{1-c^2\xi^{2m}}(\Phi'^2-1)$$

Граничные условия для функции $\Phi(\tau)$ согласно (11), (12) будут

$$\begin{aligned} &\eta = 0, \quad \tau = 0, \quad \Phi'(0) = 0, \quad \Phi(0) = 0 \\ &\eta = \infty, \quad \tau = \infty, \quad \Phi'(\infty) = 1, \end{aligned} \tag{18}$$

Полагая

$$\delta = \frac{k(\alpha-1)}{k-1} - \frac{m+1}{2m} = 1 \tag{19}$$

после сокращения на $(1-c^2\xi^{2m})$ придем к обыкновенному дифференциальному уравнению

$$\Phi''' + \Phi''\Phi = \beta(\Phi'^2 - 1) \qquad \left(\beta = \frac{2m}{m+1}\right) \tag{20}$$

Постоянная α, входящая в (5), может теперь быть определена из (19):

$$\alpha = 1 + \frac{k-1}{k}\,\frac{3m+1}{2m} = 1 + \frac{k-1}{k}\left(1+\frac{1}{\beta}\right) \tag{21}$$

Уравнение (20) совпадает с уравнением, к которому приводится задача о расчете пограничного слоя в несжимаемой жидкости в случае, когда скорость внешнего потока изменяется по степенному закону ($u = cx^m$). Это уравнение при граничных условиях 18) было численно проинтегрировано. Таблицы значений функции Φ и ее производных можно найти в соответствующих работах (например, [1, 2]).

Полученное решение пригодно при любом m, кроме $m = -1$, при котором β обращается в ∞. В плоскости $\xi\eta$ этому случаю соответствует течение в коническом конфузоре ($c > 0$) или диффузоре ($c < 0$). Это должно быть рассмотрено особо. Для того чтобы проинтегрировать уравнение (16) в случае $u = -c\xi^{-1}$, положим

$$\psi = \left[\frac{\nu_0 c}{a_* L}\left(\frac{k-1}{k+1}\right)^{1/2}\right]^{1/2}\Phi(\tau), \qquad \tau = -\left[\frac{a_* Lc}{\nu_0}\left(\frac{k+1}{k-1}\right)^{1/2}\right]^{1/2}\frac{\eta}{\xi}$$

Выполняя преобразования, аналогичные сделанным в рассмотренном выше случае, придем к уравнению

$$\Phi''' - \Phi'^2 + 1 = 0 \tag{22}$$

Это уравнение совпадает с уравнением, к которому приводится задача о расчете пограничного слоя в несжимаемой жидкости, текущей в конфузоре. Здесь, как и в случае несжимаемой жидкости, решение существует лишь при отрицательном градиенте давления ($c > 0$ конфузор). Заимствуя решение уравнения (22) из [1] и переходя в нем к нашим переменным и обозначениям, получим

$$v_x = -\frac{c}{\xi}\left\{3\,\mathrm{th}^2\left[\ln(\sqrt{3}+\sqrt{2}) + \sqrt{C\cdot \mathrm{Re}}\,\frac{\eta}{\xi}\right] - 2\right\}$$

где

$$\mathrm{Re} = \frac{a_* L}{\nu_0} \sqrt{\frac{k+1}{k-1}}$$

Посмотрим теперь, каким законам изменения скорости в плоскости xy соответствуют рассмотренные случаи (17). Обращаясь к (5), запишем его при помощи (17) в виде

$$\frac{du}{dx} = c^{\frac{1}{m}} m u^{\frac{m-1}{m}} \left(\frac{P}{P_0}\right)^{\alpha}$$

Если заменить P / P_0 и α их значениями согласно (6) и (21), то после небольших преобразований и интегрирования найдем

$$x = c_1 \varphi(u) + c_2 \tag{23}$$

$$\varphi(u) = \frac{1}{m} \int \left(\frac{u^2}{1-u^2}\right)^{\frac{1}{2m}} (1-u^2)^{\frac{3-5k}{2(k-1)}} \frac{du}{u}$$

Последний интеграл подстановкой

$$z = \frac{u^2}{1-u^2}$$

может быть сведен к интегралу дифференциального бинома

$$\varphi(z) = \frac{1}{2m} \int z^{\frac{1}{2m}-1} (1+z)^{\frac{3k-1}{2(k-1)}} dz \tag{24}$$

Так как показатель адиабаты может быть представлен в виде

$$k = \frac{2n+3}{2n+1}$$

(n — атомность газа), то показатель при $(1+z)$ в подинтегральном выражении — всегда целое число:

$$\frac{3k-1}{2(k-1)} = n+2$$

и потому интеграл, как известно, может быть вычислен. Выполняя квадратуру, получим

$$\varphi(z) = z^{\frac{1}{2m}} \sum_{i=0}^{n+2} \frac{(n+2)!}{i!\,(n+2-i)!\,(2mi+1)} z^i$$

Выражение для $\varphi(z)$ в случае $u = -c\xi^{-1}$ получается из этой же формулы при $m = -1$.

Например, для двухатомного газа (в частности, для воздуха)

$$\varphi(z) = z^{\frac{1}{2m}} \left[1 + \frac{4}{2m+1} z + \frac{6}{4m+1} z^2 + \frac{4}{6m+1} z^3 + \frac{1}{8m+1} z^4\right]$$

В заключение отметим, что величина z имеет простой физический смысл. Нетрудно видеть, что

$$z = \frac{T_0}{T_\infty} - 1$$

Поступила 10.IV 1955

Институт теплоэнергетики АН УССР

ЛИТЕРАТУРА

1. Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В. т. 2. Теоретическая гидромеханика, Гостехиздат, 1948.
2. Лойцянский Л. Г. Механика жидкости и газа. Гостехиздат, 1950.