Прикладная математика и механика. Том XIX, 1955
Институт механики Академии наук Союза ССР

ОБ ОДНОМ ПРИМЕНЕНИИ ПЕРЕМЕННЫХ А. А. ДОРОДНИЦЫНА В ТЕОРИИ ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ

Ю. А. Демьянов
(Москва)

Уравнения установившегося пограничного слоя сжимаемого газа при отсутствии градиента давления могут быть представлены в следующем виде:

$$\rho\left(v_x\frac{\partial v_x}{\partial x}+v_y\frac{\partial v_x}{\partial y}\right)=\frac{\partial}{\partial y}\left(\mu\frac{\partial v_x}{\partial y}\right) \tag{1}$$

$$\frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho v_y)}{\partial y}=0 \tag{2}$$

$$\rho\left[v_x\frac{\partial}{\partial x}\left(H+\frac{1}{2}v_x^2\right)+v_y\frac{\partial}{\partial y}\left(H+\frac{1}{2}v_x^2\right)\right]=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\mu}{N_{\mathrm{Pr}}}\frac{\partial H}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\mu v_x\frac{\partial v_x}{\partial y}\right) \tag{3}$$

$$p=\mathrm{const} \tag{4}$$

где ρ — плотность, p — давление, H — энтальпия, v_x и v_y — составляющие скорости в направлениях, соответственно параллельном и перпендикулярном контуру тела.

Для дальнейшего примем, что число Прандтля N_{Pr} постоянно, и коэффициент вязкости может быть представлен в форме

$$\mu=\frac{p}{\rho}f(H,\ p)$$

Обычно предполагается, что стенка теплоизолирована ($\partial H/\partial y=0$ при $y=0$), либо имеет заданное распределение температур ($H=H_w(x)$ при $y=0$), а скорость на ней равна нулю ($v_x=v_y=0$ при $y=0$).

На внешней границе пограничного слоя $v_x=v_{x\infty}$, $H=H_\infty$, при $y=\infty$.

Здесь, как и в дальнейшем, индексами w и ∞ обозначаются параметры соответственно на стенке и во внешнем потоке.

Вводя функцию $\theta=H+{}^1/_2\,v_x^2$ и переменные А. А. Дородницына

$$\xi=x,\qquad \eta=\int_0^y\frac{\rho(x,\ y)}{\rho_\infty}\,dy$$

уравнения (1), (2), (3) преобразуем к виду

$$v_x\frac{\partial v_x}{\partial\xi}+V_y\frac{\partial x_x}{\partial\eta}=\nu_\infty\frac{\partial}{\partial\eta}\left[\frac{f(H,\ p)}{f(H_\infty,p)}\frac{\partial v_x}{\partial\eta}\right] \tag{5}$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial\xi}+\frac{\partial V_y}{\partial\eta}=0 \tag{6}$$

$$v_x\frac{\partial\theta}{\partial\xi}+V_y\frac{\partial\theta}{\eta}=\frac{\nu_\infty}{N_{\mathrm{Pr}}}\frac{\partial}{\partial\eta}\left[\frac{f(H,\ p)}{f(H_\infty,\ p)}\frac{\partial\theta}{\partial\eta}\right]+\nu_\infty\left(1-\frac{1}{N_{\mathrm{Pr}}}\right)\frac{\partial}{\partial\eta}\left[\frac{f(H,\ p)}{f(H_\infty,p)}v_x\frac{\partial v_x}{\partial\eta}\right] \tag{7}$$

где

$$V_y=v_x\frac{\partial\eta}{\partial x}+\frac{\rho}{\rho_\infty}v_y,\qquad \nu_\infty=\frac{\mu_\infty}{\rho_\infty},\qquad \mu_\infty=\frac{p}{\rho_\infty}f(H_\infty,p)$$

Полагая

$$v_x = \frac{\partial\psi}{\partial\eta}, \qquad V_y = -\frac{\partial\psi}{\partial\xi} \qquad (\psi \text{ — функция тока})$$

уравнения (5) и (7) запишем так:

$$\frac{\partial\psi}{\partial\eta}\frac{\partial^2\psi}{\partial\xi\,\partial\eta} - \frac{\partial\psi}{\partial\xi}\frac{\partial^2\psi}{\partial\eta^2} = \nu_\infty \frac{\partial}{\partial\eta}\left[\frac{f(H,\ p)}{f(H_\infty,\ p)}\frac{\partial^2\psi}{\partial\eta^2}\right] \tag{8}$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial\eta}\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{\theta}{H_0}\right) - \frac{\partial\psi}{\partial\xi}\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{\theta}{H_0}\right) =$$

$$= \frac{\nu_\infty}{N_{\mathrm{Pr}}}\frac{\partial}{\partial\eta}\left[\frac{f(H,\ p)}{f(H_\infty,\ p)}\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{\theta}{H_0}\right)\right] + \frac{\nu_\infty}{H_0}\left(1 - \frac{1}{N_{\mathrm{Pr}}}\right)\frac{\partial}{\partial\eta}\left[\frac{f(H,\ p)}{f(H_\infty,\ p)}\frac{\partial\psi}{\partial\eta}\frac{\partial^2\psi}{\partial\eta^2}\right] \tag{9}$$

Здесь $H_0 = H_\infty + {}^1/_2\, v_{x\infty}{}^2$

После соответствующих преобразований граничные условия принимают вид:

$$\frac{\partial\psi}{\partial\eta} = v_{x\infty}, \qquad \theta = H_0 \qquad \text{при } \eta = \infty$$

$$\psi = \frac{\partial\psi}{\partial\eta} = \frac{\partial\theta}{\partial\eta} = 0 \qquad \text{(для теплоизолированной стенки)}$$

$$\psi = \frac{\partial\psi}{\partial\eta} = 0, \qquad \theta = H_w(\xi) \qquad \text{(для стенки с заданным распределением температуры)}$$

при $\eta = 0$

Если предположить, что

$$\frac{\rho T}{\rho_\infty T_\infty} = 1 \tag{10}$$

$$\frac{f(c_p T,\ p)}{f(c_p T_\infty, p)} = \frac{f(T,\ p)}{f(T_\infty,\ p)} \qquad \text{при} \quad c_p = \mathrm{const} \tag{11}$$

то уравнения (8), (9) и граничные условия, сохранив свой первоначальный вид, станут уравнениями хорошо изученного типа, полученными при условии $c_p = \mathrm{const}$ и

$$\frac{\mu}{\mu_\infty} = \frac{T}{T_\infty}\,\frac{f(T,\ p)}{f(T_\infty, p)}$$

Из этого следует, что при выполнении условия (11) решения для ψ и θ в переменных Дородницына при определенной зависимости вязкости от температуры и $c_p = \mathrm{const}$ могут быть использованы в качестве решений обобщенных уравнений (8) и (9) для одинаковых значений N_{Pr}, $v_{x\infty}$, H_∞, $H_w(x)$, ν_∞, и p, если от последнего явно зависят эти уравнения.

Можно показать, что при этом напряжение трения τ_w и тепловой поток q_w, отнесенные к скоростному напору, также будут совпадать.

Например, условию (11) удовлетворяет функция

$$\frac{\mu\rho}{\mu_\infty\,\rho_\infty} = \left(\frac{H}{H_\infty}\right)^{n-1}$$

Ее аналогом в обычно рассматриваемых уравнениях является закон вязкости

$$\frac{\mu}{\mu_\infty} = \left(\frac{T}{T_\infty}\right)^n$$

Сделанные выводы легко обобщаются для осесимметрической задачи.

Поступила 7 IV 1955

ЛИТЕРАТУРА

1. Дородницын А. А, ПММ, т. VI, вып. 6.
2. Кочин, Кибель, Розе. Теоретическая гидромеханика, т. II.