Прикладная математика и механика. Том XIX, 1955
Институт механики Академии наук Союза ССР

О ПЛАСТИЧЕСКОМ СОСТОЯНИИ ВРАЩАЮЩЕГОСЯ АНИЗОТРОПНОГО СПЛОШНОГО ЦИЛИНДРА

М. Ш. Микеладзе
(Тбилиси)

В настоящей статье исследуется поле напряжений во вращающемся сплошном цилиндре за пределом упругости. Цилиндр представляет собой трансверсально-изотропное тело, ось пластической (и упругой) симметрии которого совпадает с его геометрической осью. Анизотропия такого вида может возникнуть в результате термической и механической обработки, которой подвергается цилиндр в процессе его изготовления.

§ 1. Чисто пластическое состояние вращающегося цилиндра. При исследовании чисто пластического состояния цилиндра материал его предполагается несжимаемым, а деформация плоской. При этих предположениях радиальная, окружная и осевая деформации удовлетворяют следующему условию [1]:

$$\varepsilon_r = \varepsilon_\theta = -\frac{\varepsilon_z}{2} = \mathrm{const} \tag{1.1}$$

Напряженное состояние цилиндра описывается дифференциальным уравнением равновесия и условием пластичности Хилла [2]:

$$\frac{d\sigma_r}{dr} = \frac{\sigma_0 - \sigma_r}{r} - \frac{\gamma\omega^2 r}{g} \tag{1.2}$$

$$F(\sigma_\theta - \sigma_z)^2 + F(\sigma_z - \sigma_r)^2 + H(\sigma_r - \sigma_\theta)^2 = 1 \tag{1.3}$$

В соотношениях (1.2) и (1.3) использованы следующие обозначения: σ_r, σ_θ, σ_z — радиальное, окружное и осевое нормальные напряжения, g, γ, ω — ускорение силы тяжести, удельный вес материала цилиндра и угловая скорость вращения последнего и, наконец, F и H — постоянные анизотропии, определенные через значения характерных пределов текучести в плоскости поперечного сечения и вдоль оси цилиндра

$$2F = \frac{1}{\sigma_{sz}^2}, \qquad 2H = \frac{2}{\sigma_{sr}^2} - \frac{1}{\sigma_{sz}^2}$$

Анализируя связь [2] между компонентами тензора напряжений и тензора деформаций (скоростей деформаций) при условии (1.1), заключаем, что $\sigma_r = \sigma_\theta$.

В силу обнаруженного равенства радиального и окружного нормальных напряжений соотношения (1.2) и (1.3) упрощаются и принимают соответственно вид [1]:

$$\frac{d\sigma_r}{dr} = -\frac{\gamma\omega^2 r}{g}, \quad \sigma_\theta - \sigma_z = \pm\sigma_{sz} \tag{1.4}$$

Если торцы и боковая поверхность цилиндра не нагружены [1], то предельная окружная скорость U, при которой устанавливается чисто пластическое состояние цилиндра, определяется на основании соотношений (1.4) по формуле

$$U = a\omega = 2\sqrt{g\sigma_{sz}/\gamma} \tag{1.5}$$

где a — внешний радиус цилиндра.

---

[1] В дальнейших выкладках, как и в соответствующей задаче о вращающемся изотропном цилиндре [1], определяемую второй формулой (1.4), разность будем считать положительной.

Распределение напряжений σ_r, σ_θ, σ_z в теле вращающегося цилиндра происходит согласно следующим формулам:

$$\sigma_r = \sigma_\theta = 2\sigma_{sz}\left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right), \quad \sigma_z = \sigma_{sz}\left(1 - \frac{2r^2}{a^2}\right)$$

Последние формулы совпадают с хорошо известными формулами Надаи [1] для вращающегося изотропного цилиндра, если величину σ_{sz} толковать как неизменный для всех направлений предел текучести σ_s.

То обстоятельство, что как напряжения, так и предельная скорость U зависят лишь от значения предела текучести σ_{sz} по направлению оси цилиндра, видимо, объясняется некоторым несовершенством условия текучести (1.3), которое не учитывает влияния гидростатического давления на пластическое состояние среды. Из формулы (1.5) для предельной скорости U заключаем, что появление анизотропии в результате термо-механической обработки следует считать желательным явлением, если при этом происходит повышение предела текучести σ_{sz} по направлению оси цилиндра.

§ 2. Сравнение с упругим вращающимся цилиндром. Напряженное и деформированное состояние упругого цилиндра может быть описано в результате использования дифференциальных уравнений равновесия (1.2) и совместности деформации

$$\frac{d\varepsilon_\theta}{dr} + \frac{\varepsilon_\theta - \varepsilon_r}{r} = 0 \tag{2.1}$$

а также известных соотношений обобщенного закона Гука [3]:

$$\begin{aligned} \varepsilon_r &= a_{11}\sigma_r + a_{12}\sigma_\theta + a_{13}\sigma_z \\ \varepsilon_\theta &= a_{12}\sigma_r + a_{11}\sigma_\theta + a_{13}\sigma_z \\ \varepsilon_z &= a_{13}(\sigma_r + \sigma_\theta) + a_{33}\sigma_z \end{aligned} \tag{2.2}$$

На основании последних соотношений (2.1) и (2.2) можем написать

$$\left(a_{12} - \frac{a_{13}^2}{a_{33}}\right) r \frac{d\sigma_r}{dr} + \left(a_{11} - \frac{a_{13}^2}{a_{33}}\right) r \frac{d\sigma_\theta}{dr} + (a_{11} - a_{12})(\sigma_\theta - \sigma_r) = 0$$

Последнее уравнение вместе с уравнением равновесия (1.2) позволяет выписать следующее дифференциальное уравнение второго порядка относительно радиального напряжения σ_r:

$$\frac{d^2\sigma_r}{dr^2} + \frac{3}{r}\frac{d\sigma_r}{dr} = -\left(2 + \frac{a_{11} - a_{12}}{a_{11} - a_{13}^2/a_{33}}\right)\frac{\gamma\omega^2}{g}$$

Откуда при условии отсутствия нагрузки на боковой поверхности цилиндра имеем

$$\sigma_r = K(a^2 - r^2), \quad K = \left(2 + \frac{a_{11} - a_{12}}{a_{11} - a_{13}^2/a_{33}}\right)\frac{\gamma\omega^2}{8g}$$

Теперь уже для определения окружного нормального напряжения σ_θ достаточно воспользоваться уравнением равновесия (1.2):

$$\sigma_\theta = Ka^2 + \left(\frac{\gamma\omega^2}{g} - 3K\right)r^2$$

На основании закона Гука (2.2) определяется и осевое нормальное напряжение:

$$\sigma_z = \frac{\varepsilon_z}{a_{33}} - \frac{2a_{13}K}{a_{33}}a^2 + \frac{a_{13}}{a_{33}}\left(4K - \frac{\gamma\omega^2}{g}\right)r^2, \quad \varepsilon_z = \frac{\gamma\omega^2 a^2}{2g}a_{13}$$

где постоянная ε_z находится из условия равенства нулю равнодействующей осевых напряжений.

Пластическая деформация возникает сперва вдоль оси цилиндра $r = 0$, где на основании полученных выше формул

$$\sigma_\theta - \sigma_z = \frac{\gamma\omega^2 a^2}{4g}\left[\left(2 + \frac{a_{11} - a_{12}}{a_{11} - a_{13}^2/a_{33}}\right)\left(\frac{1}{2} + \frac{a_{13}}{a_{33}}\right) - \frac{2a_{13}}{a_{33}}\right] = \sigma_{sz}$$

Отсюда определяется окружная скорость $U' = a\omega$, которая соответствует появлению пластической деформации в цилиндре:

$$U' = \frac{2\sqrt{g\sigma_{sz}/\gamma}}{\sqrt{\left(2 + \dfrac{a_{11} - a_{12}}{a_{11} - a_{13}^2/a_{33}}\right)\left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{a_{13}}{a_{33}}\right) - \dfrac{2a_{13}}{a_{33}}}} \tag{2.3}$$

Если свойство несжимаемости материала цилиндра считать не результатом появления пластичности, а изначальным (проявляемым еще при упругих деформациях), то на основании обобщенного закона Гука (2.2) следует равенство нулю выражения $2a_{13}+a_{33}$. В этом случае выражение (2.3) для скорости U' упрощается и принимает вид:

$$U' = 2\sqrt{g\sigma_{sz}/\gamma} = U$$

Последняя формула указывает на мгновенное наступление пластичности по всему цилиндру без промежуточной упругопластической стадии. Это явление для случая изотропного цилиндра как следствие известных формул Надаи [1] было подмечено Фройдэнталем (см. стр. 441 книги Фройдэнталя [4]).

Пусть E и E' обозначают модули упругости для растяжения-сжатия по направлениям, лежащим в плоскости изотропии и перпендикулярным к ней, ν и ν' — коэффициенты Пуассона, характеризующие поперечное сужение в плоскости изотропии при растяжении в этой же плоскости и в направлении, перпендикулярном к ней. Для большей наглядности формулу (2.3) удобно представить при помощи «технических постоянных» E, E', ν и ν': [3]

$$U' = \frac{2\sqrt{g\sigma_{sz}/\gamma}}{\sqrt{1 + \dfrac{(1+\nu)(1-2\nu')}{2\left[1-\nu'^2 E/E'\right]}}} \qquad \left(U' = 2\sqrt{g\sigma_s/\gamma}\sqrt{\frac{2(1-\nu)}{3-4\nu}}\right)$$

В скобках приведена формула Надаи [1] для изотропного цилиндра, которая вытекает из полученной здесь при $E = E'$, $\nu = \nu'$ и $\sigma_{sz} = \sigma_s$.

Поступила 3 XII 1954

ЛИТЕРАТУРА

1. Надаи А. Пластичность и разрушение твердых тел. Москва. Изд. иностр. литературы, 1954.
2. Hill R. The Mathematical Theory of Plasticity. Oxford, 1950.
3. Лехницкий С. Г. Анизотропные пластинки. Москва, Гостехиздат, 1947.
4. Freudenthal M. Alfred. The Inelastic Behavior of Engineering Materials and Structures. New York, London, 1950.