Прикладная математика и механика. Том XIX, 1955
Институт механики Академии наук Союза ССР

ЗАКРУЧЕННАЯ СТРУЯ, РАСПРОСТРАНЯЮЩАЯСЯ В ПРОСТРАНСТВЕ, ЗАПОЛНЕННОМ ТОЙ ЖЕ ЖИДКОСТЬЮ

М. С. Цуккер

(Ленинград)

Решение уравнений Навье-Стокса для круглой закрученной струи, распространяющейся в безграничном пространстве, заполненном той же жидкостью, представляет значительный интерес, поскольку дает поля скоростей и давлений во всем пространстве, окружающем источник, и при любых значениях характерного для струи числа Рейнольдса. Существовавшие до сих пор решения уравнений движения вязкой жидкости для круглой струи, данные Л. Д. Ландау [1] и Ю. Б. Румером [2], относились к случаю незакрученной струи. Решение уравнений пограничного слоя для закрученной струи в первых двух приближениях было дано Л. Г. Лойцянским [3].

В настоящей статье получено первое приближение решения уравнений Навье-Стокса для закрученной струи.

§ 1. Основные уравнения распространения закрученной ламинарной струи. Асимптотические разложения для скоростей и давления. Граничные условия. Система уравнений Навье-Стокса для свободной закрученной струи в сферической системе координат $(r,\ \theta,\ \varphi)$ имеет вид:

$$\begin{gathered}
u\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{v}{r}\frac{\partial u}{\partial\theta}-\frac{v^2+w^2}{r}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r}-\nu\left[\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2}+\right.\\
\left.+\frac{2}{r}\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{\operatorname{ctg}\theta}{r^2}\frac{\partial u}{\partial\theta}-\frac{2}{r^2}\frac{\partial v}{\partial\theta}-\frac{2u}{r^2}-\frac{2\operatorname{ctg}\theta}{r^2}v\right]\\
u\frac{\partial v}{\partial r}+\frac{v}{r}\frac{\partial v}{\partial\theta}+\frac{uv}{r}-\frac{w^2\operatorname{ctg}\theta}{r}=-\frac{1}{\rho}\frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial\theta}+\nu\left[\frac{\partial^2 v}{\partial r^2}+\right.\\
\left.+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v}{\partial\theta^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial v}{\partial r}+\frac{\operatorname{ctg}\theta}{r^2}\frac{\partial v}{\partial\theta}+\frac{2}{r^2}\frac{\partial u}{\partial\theta}-\frac{v}{r^2\sin^2\theta}\right]\\
u\frac{\partial w}{\partial r}+\frac{v}{r}\frac{\partial w}{\partial\theta}+\frac{uw}{r}+\frac{vw\operatorname{ctg}\theta}{r}=\nu\left[\frac{\partial^2 w}{\partial r^2}+\right.\\
\left.+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 w}{\partial\theta^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial w}{\partial r}+\frac{\operatorname{ctg}\theta}{r^2}\frac{\partial w}{\partial\theta}-\frac{w}{r^2\sin^2\theta}\right]\\
\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial\theta}+\frac{2u}{r}+\frac{v\operatorname{ctg}\theta}{r}=0
\end{gathered}\tag{1.1}$$

где r отсчитывается по радиусу от источника, угол θ отсчитывается от оси струи, а угол φ — вокруг оси струи, u — составляющая скорости по направлению оси r, v — составляющая скорости по направлению оси θ, w — составляющая скорости по направлению оси φ. Указанные уравнения написаны в предположении, что объемные силы отсутствуют, а производные по углу φ равны нулю.

Удовлетворяя последнему уравнению системы (1.1), введем в рассмотрение функцию тока меридионального течения $\psi\ (r,\ \theta)$, положив

$$u=\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial\psi}{\partial\theta},\qquad v=\frac{-1}{r\sin\theta}\frac{\partial\psi}{\partial r}\tag{1.2}$$

и будем искать ее в виде асимптотического разложения

$$\psi=\nu\left[rf_1(\mu)+f_2(\mu)+\cdots\right]\qquad(\mu=\cos\theta)\tag{1.3}$$

Обозначая штрихом производную по μ, будем иметь

$$u = -\nu\left[\frac{f_1'(\mu)}{r} + \frac{f_2'(\mu)}{r^2} + \cdots\right], \qquad v = -\nu\left[\frac{f_1(\mu)}{r\sqrt{1-\mu^2}} + \cdots\right] \tag{1.4}$$

Давление и скорость закрутки зададим рядами

$$\frac{p-p_0}{\rho} = \nu^2\left[\frac{h_1(\mu)}{r} + \frac{h_2(\mu)}{r^2} + \cdots\right], \qquad w = \nu\left[\frac{g_1(\mu)}{r} + \frac{g_2(\mu)}{r^2} + \cdots\right] \tag{1.5}$$

где p_0 — давление на бесконечности.

Подставляя принятые разложения в систему уравнений (1.1), предполагая при этом возможность дифференцирования разложений для скоростей и давления по обеим переменным и сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях аргумента r, получим систему уравнений для определения $f_1, f_2, \ldots, g_1, g_2, \ldots, h_1 h_2, \ldots$.

Из первого уравнения имеем

$$h_1 = 0 \tag{1.6}$$

$$[(1-\mu^2)f_1'']' - f_1 f_1'' - f_1'^2 - \frac{f_1^2}{1-\mu^2} - g_1^2 - 2h_2 = 0 \quad \text{и т. д.} \tag{1.7}$$

Из второго и третьего уравнений совершенно аналогично получаем

$$h_1' = 0 \tag{1.8}$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{f_1^2}{1-\mu^2}\right)' + f_1'' + h_2' + \frac{g_1^2\mu}{1-\mu^2} = 0 \quad \text{и т. д.} \tag{1.9}$$

$$(g_1\sqrt{1-\mu^2})'' - \frac{f_1}{1-\mu^2}(g_1\sqrt{1-\mu^2})' = 0 \tag{1.10}$$

$$(g_2\sqrt{1-\mu^2})'' - \frac{f_1}{1-\mu^2}(g_2\sqrt{1-\mu^2})' + \frac{2-f_1'}{1-\mu^2}(g_2\sqrt{1-\mu^2}) = 0 \quad \text{и т. д.} \tag{1.11}$$

На оси струи ниже источника функция тока ψ и скорость закрутки w равны нулю, на оси струи выше источника скорость закрутки равна нулю, а функция тока определяется расходом в начальном сечении струи. Вследствие этого граничные условия для коэффициентов разложений запишутся следующим образом:

$$f_1 = f_2 = \cdots = 0, \qquad g_1 = g_2 = \cdots = 0 \qquad \text{при } \mu = 1$$

$$f_1 = 0, \qquad f_2 = f_2 \max, \qquad f_3 = f_4 = \cdots = 0, \qquad g_1 = g_2 = \cdots = 0 \qquad \text{при } \mu = -1$$

§ 2. Интегрирование уравнений первого приближения. Интегрируя уравнение (1.10), получаем

$$g_1\sqrt{1-\mu^2} = C_1\int \exp\int\frac{f_1 d\mu}{1-\mu^2}\,d\mu + C_2$$

Кроме того, имеем

$$C_1\int_{-1}^{1}\exp\int\frac{f_1 d\mu}{1-\mu^2}\,d\mu = g_1\sqrt{1-\mu^2}\,\Big|_{-1}^{1} = 0$$

$$\left(\exp\int\frac{f_1 d\mu}{1-\mu^2} > 0 \quad \text{при} \quad -1 \leqslant \mu \leqslant 1\right.$$

Следовательно, $C_1 = 0$. Из условия регулярности скорости закрутки на оси получаем $C_2 = 0$. Таким образом,

$$g_1 \equiv 0 \tag{2.1}$$

Уравнения (1.6) — (1.9) при $g_1 \equiv 0$ представляют собой систему уравнений незакрученной струи, бьющей из точечного источника. Полное исследование этой системы было выполнено В. И. Яцеевым [4]. Он нашел для нее общее решение и показал, что единственным регулярным во всем пространстве является решение Л. Д. Ландау [1]

$$f_1 = \frac{2(1-\mu^2)}{A-\mu}, \qquad h_2 = -\frac{4(1-A\mu)}{(A-\mu)^2} \tag{2.2}$$

где A — постоянная интегрирования.

Переходя теперь к интегрированию уравнения (1.11), подставим в него выражение f_1 из системы (2.2):

$$(g_2 \sqrt{1-\mu^2})'' - \frac{2}{A-\mu}(g_2 \sqrt{1-\mu^2})' + \frac{2(A^2-1)}{(1-\mu^2)(A-\mu)^2}(g_2 \sqrt{1-\mu^2}) = 0 \qquad (2.3)$$

Замена $S = g_2 \sqrt{1-\mu^2}\,(A-\mu)$ приводит уравнение (2.3) к виду

$$S'' + \frac{2}{1-\mu^2}\frac{A^2-1}{(A-\mu)^2} S = 0 \qquad (2.4)$$

Разлагая решение в ряд вблизи точки $\mu = 1$ и суммируя его, получаем, что единственным регулярным при $\mu = 1$ решением будет

$$S = \frac{B(A+1)}{2}\frac{1-\mu^2}{A-\mu} \qquad (2.5)$$

где B — постоянная интегрирования. Указанное решение регулярно также при $\mu = -1$. Следовательно, оно, удовлетворяя всем граничным условиям, является единственным решением, регулярным при любых значениях μ.

Проинтегрировав уравнения первого приближения, можем написать соответствующие им формулы для определения давления и скоростей:

$$\frac{p-p_0}{\rho} = \frac{4\nu^2}{r^2}\frac{A\mu-1}{(A-\mu)^2}, \qquad u = -\frac{2\nu}{r}\frac{1-2A\mu+\mu^2}{(A-\mu)^2}$$

$$v = -\frac{2\nu}{r}\frac{\sqrt{1-\mu^2}}{A-\mu}, \qquad w = \frac{\nu B(A+1)}{2r^2}\frac{\sqrt{1-\mu^2}}{(A-\mu)^2} \qquad (2.6)$$

§ 3. Предельные случаи свободной закрученной струи. Постоянная A выражается через характерное для струи число Рейнольдса [3] следующим образом [1]:

$$N_{\mathrm{Re}} = 16\pi A\left\{1 + \frac{4}{3(A^2-1)} - \frac{A}{2}\ln\frac{A+1}{A-1}\right\} \qquad (3.1)$$

При больших значениях числа Рейнольдса величина A стремится к единице, а область струи сужается, занимая пространство вблизи оси, т. е. вблизи $\mu = 1$.

При $A \to 1$ выражение $(A^2-1)\ln(A-1)$ обращается в нуль. Следовательно, $A^2-1)^{-1}$ является бесконечностью более высокого порядка, чем $\ln(A-1)$. Число Рейнольдса в этом случае принимает вид:

$$N_{\mathrm{Re}} = \frac{32\pi}{3(A-1)} \qquad (3.2)$$

Границу струи определим условно следующим выражением:

$$\mu^{\circ 2} - 2A\mu^\circ + 1 = 0$$

т. е. будем считать, что на условной границе струи составляющая скорости u обращается в нуль. Учитывая, что $|\mu| \leqslant 1$, получаем

$$\mu^\circ = A - \sqrt{A^2-1} \qquad (3.3)$$

В случае больших чисел Рейнольдса

$$1 - \mu^\circ = \sqrt{\frac{64\pi}{3N_{\mathrm{Re}}}} \qquad (3.4)$$

Поэтому, преобразуя систему (2.6) в систему уравнений пограничного слоя, мы должны ввести новую переменную η следующим образом:

$$\eta = (1-\mu)\,N_{\mathrm{Re}} \qquad (3.5)$$

Осуществив в системе (2.6) обычный для теории пограничного слоя переход, получаем

$$\frac{p-p_0}{\rho} = 0, \qquad u = \frac{4\nu}{r}\frac{A-\mu}{(A-\mu)^2}$$

$$v = -\frac{2\nu}{r}\frac{\sqrt{2(1-\mu)}}{A-\mu}, \qquad w = \frac{\nu B}{r^2}\frac{\sqrt{2(1-\mu)}}{(A-\mu)^2} \qquad (3.6)$$

Полученная система совпадает с соответствующими решениями уравнений пограничного слоя [3].

С уменьшением числа Рейнольдса постоянная A бесконечно растет. В этом случае из уравнения (3.1) имеем

$$N_{\mathrm{Re}} = \frac{16\pi}{A} \tag{3.7}$$

и система (2.6) примет следующий вид:

$$\frac{p - p_0}{\rho} = \frac{4\nu^2}{r^2}\frac{\mu}{A}, \qquad u = \frac{4\nu}{r}\frac{\mu}{A}$$
$$v = -\frac{2\nu}{r}\frac{\sqrt{1-\mu^2}}{A}, \qquad w = \frac{B\nu}{2r^2}\frac{\sqrt{1-\mu^2}}{A} \tag{3.8}$$

Поступила 26 II 1955

ЛИТЕРАТУРА

1. Ландау Л. и Лифшиц Е. Механика сплошных сред, § 19. ГТТИ, 1944.
2. Румер Ю. Б. Задача о затопленной струе. ПММ, т. XVI, вып. 2, 1952.
3. Лойцянский Л. Г. Распространение закрученной струи в безграничном пространстве, затопленном той же жидкостью. ПММ, т. XVII, вып. 1, 1953.
4. Яцеев В. И. Об одном классе точных решений уравнений движения вязкой жидкости. ЖЭТФ, т. XX, вып. 11, 1950.