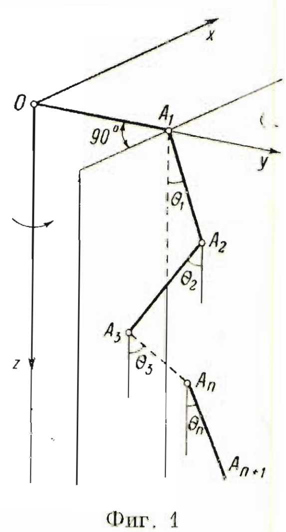
Прикладная математика и механика. Том XIX, 1955
Институт механики Академии наук Союза ССР

О СУЩЕСТВОВАНИИ МАЛЫХ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ДВИЖЕНИЙ ВОКРУГ ПОЛОЖЕНИЯ ОТНОСИТЕЛЬНОГО УСТОЙЧИВОГО РАВНОВЕСИЯ ОДНОЙ МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

С. Манолов

(София)

Прямоугольная правоориентированная система координат $Oxyz$ вращается с постоянной угловой скоростью ω около постоянной направленной вниз вертикальной оси Oz. В точке A_1, лежащей на горизонтальной оси Oy, на расстоянии R от O, подвешен материальный весомый стержень A_1A_2 длина $2a$ и массы m, так что OA_1 будет осью качания. К концу стержня A_2 присоединен с осью качания, параллельной оси OA_1, второй материальный весомый стержень A_2A_3 той же длины и массы и т. д. Наконец, к концу A_n предпоследнего n—1-го стержня подвешен с осью качания, параллельной OA_1, последний, также весомый и однородный стержень той же длины $2a$ и массы m. Таким образом, маятники-стержни могут двигаться в плоскости, проходящей через точку A_1, перпендикулярно к оси Oy, и, кроме того, вся система маятников равномерно вращается вокруг оси Oz вместе с триэдром $Oxyz$ (фиг. 1).



Фиг. 1

В работе показывается, что при подходящей оценке скорости вращения и при подходящих начальных условиях рассматриваемая система маятников допускает малые периодические движения вокруг вертикального положения. Показывается также, что при данной в работе оценке для скорости вращения вертикальное положения является положением относительного устойчивого равновесия. Кроме того, показывается непосредственным образом, что корни характеристического уравнения системы не только отрицательные, но и простые. Случай любых физических маятников при $\omega = 0$ рассмотрен в работе [1]. В заметке [2] при $n = 2$ и $\omega \neq 0$ найдена оценка для ω^2, которая была достаточна для устойчивости вертикального положения как положения относительного равновесия и для существования малых периодических движений около этого положения равновесия.

§ 1. Обозначая через $\theta_1, \ldots, \theta_n$ углы, которые заключают стержни A_1A_2, $A_2A_3, \ldots$ $\ldots, A_nA_{n+1}$ с осью Oz, для относительной кинетической энергии получим

$$T = 2ma^2 \sum_{k=1}^{n} \left[\tfrac{1}{3} + (n-k)\right] \theta_k'^2 + 2ma^2 \sum_{k=1}^{n} \left[[2(n-k)+1] \sum_{\mu=1}^{k-1} \cos(\theta_k - \theta_\mu)\, \theta_k' \theta_\mu' \right] \quad (1.1)$$

Работы центробежных составных сил равны нулю. Учитывая работу тяжести и работу переносных инертных сил, для потенциальной энергии системы находим результат:

$$V = -2ma^2\omega^2 \left\{\sum_{k=1}^{n} \left[(n-k)+\frac{1}{3}\right] \sin^2\theta_k + \sum_{k=1}^{n} \left([2(n-k)+1] \sum_{\mu=1}^{k-1} \sin\theta_k \sin\theta_\mu\right)\right\} -$$

$$- mga \sum_{k=1}^{n} [2(n-k)+1]\cos\theta_k \tag{1.2}$$

Уравнения Лагранжа в данном случае имеют вид:

$$[2(n-\nu+1] \sum_{k=1}^{\nu-1} [\cos(\theta_\nu-\theta_k)\theta_k'' + \sin(\theta_\nu-\theta_k)\theta_k'^2] + 2\left[\frac{1}{3}+(n-\nu)\right]\theta_\nu'' +$$

$$+ \sum_{k=\nu+1}^{n} [2(n-k)+1][\cos(\theta_k-\theta_\nu)\theta_k'' + \sin(\theta_\nu-\theta_k)\theta_k'^2] =$$

$$= 2\omega^2\left[(n-\nu)+\frac{1}{3}\right]\sin\theta_\nu\cos\theta_\nu + \omega^2 \sum_{k=\nu+1}^{n} [2(n-k)+1]\cos\theta_\nu\sin\theta_k +$$

$$+ \omega^2[2(n-\nu)+1]\sum_{k=1}^{\nu-1}\cos\theta_\nu\sin\theta_k - \frac{g}{2a}[2(n-\nu)+1]\sin\theta_\nu \tag{1.3}$$

$$\left(\nu = 1, \ldots, n; \quad \sum_{1}^{0} = \sum_{n+1}^{n} = 0\right)$$

Вводя малый параметр Пуанкаре, полагая $\theta_\nu = \lambda\psi_\nu$, где λ действительно и $|\lambda|$ достаточно мало, получаем систему:

$$\lambda[2(n-\nu)+1] \sum_{k=1}^{\nu-1} [\cos\lambda(\psi_\nu-\psi_k)\psi_k'' + \lambda\sin\lambda(\psi_\nu-\psi_k)\lambda\psi_k'^2] + 2\lambda\left[\frac{1}{3}+(n-\nu)\right]\psi_\nu'' +$$

$$+ \lambda \sum_{k=\nu+1}^{n} [2(n-k)+1][\cos\lambda(\psi_k-\psi_\nu)\psi_k'' + \sin\lambda(\psi_\nu-\psi_k)\lambda\psi_k'^2] =$$

$$= 2\omega^2\left[(n-\nu)+\frac{1}{3}\right]\sin\lambda\psi_\nu\cos\lambda\psi_\nu + \omega^2\sum_{k=\nu+1}^{n}[2(n-k)+1]\cos\lambda\psi_\nu + \sin\lambda\psi_k +$$

$$+ \omega^2[2(n-\nu)+1]\sum_{k=1}^{\nu-1}\cos\lambda\psi_\nu\sin\lambda\psi_k - \frac{g}{2a}[2(n-\nu)+1]\sin\lambda\psi_\nu \tag{1.4}$$

Отсюда, сокращая на λ, получаем

$$2\left[\frac{1}{3}+(n-\nu)\right]\psi_\nu'' + [2(n-\nu)+1]\sum_{k=1}^{\nu-1}[\cos\lambda(\psi_\nu-\psi_k)\psi_k''] +$$

$$+ \sum_{k=\nu+1}^{n} [[2(n-k)+1]\cos\lambda(\psi_k-\psi_\nu)\psi_k''] =$$

$$= 2\omega^2\left(n-\nu+\frac{1}{3}\right)\cos\lambda\psi_\nu\psi_\nu\left(1-\frac{\lambda^2\psi_\nu^2}{3!}+\frac{\lambda^4\psi_\nu^4}{5!}-\ldots\right)+$$

$$+ \omega^2\sum_{k=\nu+1}^{n}[2(n-k)+1]\cos\lambda\psi_\nu\psi_k\left(1-\frac{\lambda^2\psi_k^2}{3!}+\frac{\lambda^4\psi_k^4}{5!}-\ldots\right)+ \tag{1.5}$$

$$+\omega^2[2(n-\nu)+1]\sum_{k=1}^{\nu-1}\cos\lambda\psi_\nu\psi_k\left(1-\frac{\lambda^2\psi_k^2}{3!}+\frac{\lambda^4\psi_k^4}{5!}-\ldots\right)-$$

$$-\frac{g}{2a}[2(n-\nu)+1]\psi_\nu\left(1-\frac{\lambda^2\psi_\nu^2}{3!}+\frac{\lambda^4\psi_\nu^4}{5!}-\ldots\right)-$$

$$-2[(n-\nu)+1]\sum_{k=1}^{\nu-1}\sin\lambda(\psi_\nu-\psi_k)\lambda\psi_k'^2-\sum_{k=\nu+1}^{n}[2(n-k)+1]\sin\lambda(\psi_\nu-\psi_k)\lambda\psi_k'^2$$

$$(\nu=1,\ldots,n)$$

Попытаемся решить систему (1.5) относительно $\psi_1'', \ldots \psi_n''$. Определитель коэффициентов равен

$$\Delta_n(\psi_1,\psi_2,\ldots,\psi_n,\lambda)=\begin{vmatrix} a_{11}\ \cdot\ \cdot\ \cdot, a_{1n}\\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\\ a_{n1},\ \cdot\ \cdot\ \cdot, a_{nn}\end{vmatrix}$$

где

$$a_{11}=2\left(\frac{1}{3}+n-1\right),\quad a_{22}=2\left(\frac{1}{3}+n-2\right),\ \ldots,\ a_{nn}=2\left(\frac{1}{3}+n-n\right)$$

$$a_{12}=[2(n-2)+1]\cos\lambda(\psi_2-\psi_1)$$

$$a_{13}=[2(n-3)+1]\cos\lambda(\psi_3-\psi_1),\ldots,a_{1n}=[2(n-n)+1]\cos\lambda(\psi_n-\psi_1)$$

$$a_{23}=[2(n-3)+1]\cos\lambda(\psi_3-\psi_2),\ldots,a_{2n}=[2(n-n)+1]\cos\lambda(\psi_n-\psi_2),\ldots$$

$$a_{ij}=a_{ji}\qquad \text{для}\qquad i\neq j$$

Значение $\Delta_n(\psi_1,\ldots,\psi_n,\lambda)$ при $\lambda=0$ равно

$$\Delta_n(\psi_1,\ldots,\psi_n,0)=\begin{vmatrix} 2\left(\frac{1}{3}+n-1\right) & 2(n-2)+1 & \ldots & 2(n-n)+1\\ 2(n-2)+1 & 2\left(\frac{1}{3}+n-2\right) & \ldots & 2(n-n)+1\\ 2(n-3)+1 & 2(n-3)+1 & \ldots & 2(n-n)+1\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 2(n-n)+1 & 2(n-n)+1 & \ldots & 2\left(\frac{1}{3}+n-n\right)\end{vmatrix}$$

В этом определителе производим следующие преобразования: вторую строку вычитаем из первой, третью из второй и т. д. В полученном таким образом определителе вычитаем последовательно каждый столбец из предшествующего, начиная со второго. Таким образом получаем $\Delta_n(\psi_1,\ldots\psi_n,0)=3^{-n}a_n$, где a_n — определитель, главная диагональ которого составлена из четверок, кроме последнего члена, который равен 2, обе смежные диагонали составлены из единиц, а остальные члены равны нулю. Раскладывая a_n, по первой строке находим рекуррентную зависимость $a_n=4a_{n-1}-a_{n-2}$, из которой, учитывая что $a_1=2$, $a_2=7$, находим

$$a_n=\frac{1}{2}[(2+\sqrt{3})^n+(2-\sqrt{3})^n]>0$$

итак, $\Delta_n(\psi_1,\ldots,\psi_n,0)>0$.

Непосредственной проверкой установливаем, что при $n=1,2,3,4$ имеем

$$\Delta_n(\psi_1,\ldots,\psi_n,\lambda)\geqslant\Delta_n(\psi_1,\ldots,\psi_n,0) \tag{1.6}$$

Случаи $n=1,2$ тривиальны. Для $n=4$ вычисления дают

$$\Delta_4(\psi_1,\ldots,\psi_4,\lambda)=\frac{2536}{81}+\cos^2\lambda(\psi_3-\psi_1)+\cos^2\lambda(\psi_2+\psi_4-\psi_1-\psi_3)+$$

$$\cos^2\lambda(\psi_2+\psi_3-\psi_1-\psi_4)-\frac{115}{9}\cos^2\lambda(\psi_4-\psi_2)-\frac{37}{9}\cos^2\lambda(\psi_4-\psi_3)-$$

$$-5\cos^2\lambda(\psi_3-\psi_2)-\frac{73}{9}\cos^2\lambda(\psi_2-\psi_1)-\frac{1}{9}\cos^2\lambda(\psi_4-\psi_1)\geqslant\frac{2536}{81}+$$

$$+\cos^2\lambda(\psi_3-\psi_1)+\cos^2\lambda(\psi_2+\psi_4-\psi_1-\psi_3)+\cos^2\lambda(\psi_2+\psi_3-\psi_1-\psi_4)-\frac{271}{9}\geqslant$$

$$\geqslant\frac{2536}{81}-\frac{2439}{81}=\frac{97}{81}=\Delta_4(\psi_1,\ldots,\psi_4,0)$$

По всей вероятности, (1.6) верно и при $n>4$. При условии, что (1.6) выполнено, из того что $\Delta_n(\psi_1,\ldots,\psi_n,0)>0$, заключаем, что $\Delta_n(\psi_1,\ldots,\psi_n,\lambda)>0$. Это позволяет решить систему (1.5) относительно $\psi_1'',\ldots,\psi_n''$. Условием $\Delta_n(\psi_1,\ldots,\psi_n,0)>0$ мы будем пользоваться и дальше. Таким образом, систему (1.5) можно переписать в виде

$$\psi_\nu''=F_\nu(\psi_1,\ldots,\psi_n,\psi_1',\ldots,\psi_n',\lambda)\qquad(\nu=1,\ldots,n)\tag{1.7}$$

или в виде системы $2n$ уравнений

$$\psi_\nu'=\psi_{n+\nu},\ \psi_{n+\nu}'=F_\nu(\psi_1,\ldots,\psi_n,\psi_{n+1},\ldots,\psi_{2n},\lambda)\qquad(\nu=1,\ldots,n)\tag{1.8}$$

Как обычно, будем искать при $\lambda=0$ частные решения вида $\psi_\nu=\lambda_\nu e^{\rho t}$, $\psi_\nu'=\lambda_\nu\rho e^{\rho t}$. Для ρ получаем уравнение

$$\begin{vmatrix} b_{11} & (\rho^2-\omega^2)[2(n-2)+1] & \ldots & (\rho^2-\omega^2)[2(n-n)+1]\\ (\rho^2-\omega^2)[2(n-2)+1] & b_{22} & \ldots & (\rho^2-\omega^2)[2(n-n)+1]\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ (\rho^2-\omega^2)[2(n-n)+1] & (\rho^2-\omega^2)[2(n-n)+1] & \ldots & b_{nn}\end{vmatrix}=0\tag{1.9}$$

где

$$b_{11}=\frac{2}{3}(\rho^2-\omega^2)(3n-2)+\frac{g}{2a}(2n-1)$$

$$b_{22}=\frac{2}{3}(\rho^2-\omega^2)(3n-5)+\frac{g}{2a}(2n-3)$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$b_{nn}=\frac{2}{3}(\rho^2-\omega^2)[3n-(3n-1)]+\frac{g}{2a}[2n-(2n-1)]$$

При $\rho^2=\omega^2$ левая часть (1.9) не равна нулю и, следовательно, после подстановки $g/(\rho^2-\omega^2)=x$ уравнение (1.9) обращается в следующее уравнение степени n относительно x:

$$A_n(x)=\begin{vmatrix} C_{11} & 2(n-2)+1 & \ldots & 2(n-n)+1\\ 2(n-2)+1 & C_{22} & \ldots & 2(n-n)+1\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ 2(n-n)+1 & \ldots & \ldots & C_{nn}\end{vmatrix}=0\tag{1.10}$$

где

$$C_{11}=\frac{2}{3}(3n-2)+\frac{2n-1}{2a}x$$

$$C_{22}=\frac{2}{3}(3n-5)+\frac{2n-3}{2a}x$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$C_{nn}=\frac{2}{3}[3n-(3n-1)]+\frac{2n-(2n-1)}{2a}x$$

В (1.10) каждую строку, начиная со второй, вычитаем из предшествующей. В полученном определителе вычитаем, начиная со второго, каждый столбец из предшествующего. Полученный определитель раскладываем по первой строке и получаем

$$A_n(x)=\left(\frac{4}{3}+\frac{2(n-1)}{a}x\right)A_{n-1}(x)-\left(\frac{1}{3}-\frac{2n-3}{2a}x\right)^2A_{n-2}(x)\quad(n=3,4,5,\ldots)\tag{1.11}$$

При этом

$$A_1(x) = \frac{2}{3} + \frac{1}{2a}\,x, \qquad A_2(x) = \frac{7}{9} + \frac{7}{3a}\,x + \frac{3}{4a^2}\,x^2$$

Очевидно, что $A_n(0) = \Delta_n(\psi_1, \ldots, \psi_n, 0)$ и, следовательно, $A_n(0) > 0$ при всех n. С другой стороны, коэффициент перед x^n в $A_n(x)$ положителен. Уравнение (1.10) является специальным случаем более общего уравнения, для которого доказано, что все его корни отрицательны [1]. Вопрос об отрицательности корней рассмотрен в более общей форме в работе Н. Обрешкова [3]. Для рассматриваемой конкретной механической системы мы установим этот результат способом, который нельзя применить для любых систем, но который одновременно позволяет установить, что все корни (1.10) простые, что в общем случае не имеет места.

В самом деле, последовательность

$$A_n(x), \quad A_{n-1}(x), \ldots, A_1(x), \quad A_0(x) \qquad \left(A_1(x) = \frac{2}{3} + \frac{1}{2a}\,x, \quad A_0(x) = 1\right)$$

для которой выполнено соотношение (1.11), составляет в промежутке $(-\infty, 0]$ последовательность Штурма. При этом разность в числе вариаций при $x = -\infty$ и $x = 0$ равна n, так как $A_n(0) > 0$ и коэффициент при x^n положителен. Известно, что все корни (1.10) действительны. Из сказанного следует, что все корни (1.10) отрицательные и простые. Это поможет нам написать общий интеграл системы (1.8) при $\lambda = 0$.

Сперва рассмотрим вертикальное положение системы. Рассмотрим определитель n-го порядка $(n = 1, 2, \ldots)$, в котором член, стоящий в i-й строке и k-м столбце, имеет вид: $\partial^2 V / \partial\theta_i \partial\theta_k$ $(i, k = 1, \ldots, n)$, где V — потенциальная энергия системы и частные производные вычислены при $\theta_1 = \ldots = \theta_n = 0$. После соответствующих вычислений получим, что эти определители имеют значение $(-2)^n m^n a^{2n} \omega^{2n} A_n(-g/\omega^2)$

Подчиним ω условию

$$\omega^2 < -\frac{g}{\alpha(n)} \tag{1.12}$$

где $\alpha(n)$ — наименьший корень уравнения (1.10). Из неравенства (1.12) следует, что $A_n(-g/\omega^2)$ имеет знак $A_n(x)$ при $x = -\infty$. Теперь очевидно, что при всех n рассматриваемые определители положительны и на основании одной теоремы Сильвестра [4] следует, что квадратическая форма

$$\sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 V}{\partial\theta_i \partial\theta_k}\, y_i y_k$$

положительно определенна. Из этого следует [4], что функция $V(\theta_1, \ldots \theta_n)$ имеет минимум при $\theta_1 = \ldots = \theta_n = 0$, а этого достаточно, чтобы утверждать, на основании одной теоремы Дирихле [5], что положение $\theta_1 = \ldots = \theta_n = 0$ является положением устойчивого равновесия.

При условии (1.12) легко заключаем, что величина $\omega^2 + g / x_p$, где x_p — любой корень (1.10), будет меньше нуля. Если положить

$$\sqrt{-\left(\omega^2 + \frac{g}{x_p}\right)} = k_p$$

то для общего интеграла (1.8) при $\lambda = 0$ получим (1.13)

$$\psi_\nu = \sum_{\mu=1}^{n} \lambda_{\mu\nu} (A_\mu \cos k_\mu t + B_\mu \sin k_\mu t), \qquad \psi_{n+\nu} = \sum_{\mu=1}^{n} \lambda_{\mu\nu} k_\mu (-A_\mu \sin k_\mu t + B_\mu \cos k_\mu t)$$

где $\lambda_{\mu 1}, \ldots, \lambda_{\mu n}$ $(\mu = 1, \ldots, n)$ — система чисел, которые получаются при

$$\rho^2 = \omega^2 + \frac{g}{x_\mu}$$

Полученные $2n$ частных решений (1.8) при $\lambda = 0$, как известно, образуют фундаментальную систему и определитель, составленный из этих частных решений, не равен нулю. После простых преобразований над этим определителем получаем, что определитель

$$B = \begin{vmatrix} \lambda_{11} & \ldots & \lambda_{n1} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \lambda_{1n} & \ldots & \lambda_{nn} \end{vmatrix} \tag{1.14}$$

не равен нулю. Это мы используем в дальнейшем.

Рассмотрим частное решение (1.8) при $\lambda = 0$ при начальных условиях

$$\psi_1 = \ldots = \psi_n = 0, \qquad \psi_{n+1} = h\lambda_{11}, \qquad \psi_{n+2} = h\lambda_{12}, \ldots, \psi_{2n} = h\lambda_{1n} \tag{1.15}$$

где h — не равная нулю постоянная и $\lambda_{11}, \ldots, \lambda_{1n}$ вычислены при $\rho^2 = \omega^2 + g / x_1$, где x_1 — наибольший корень (1.10). Учитывая, что $B \neq 0$, и (1.15), получаем из (1.13)

$$\psi_\nu = \frac{h}{k_1} \lambda_{1\nu} \sin k_1 t, \qquad \psi_{n+\nu} = h\lambda_{1\nu} \cos k_1 t \qquad (\nu = 1, \ldots, n) \tag{1.16}$$

Ясно, что (1.16) является периодическим решением с периодом $2\pi / k_1$.

§ 2. Покажем, что можно подобрать $\beta_1, \ldots, \beta_n$ и γ в зависимости от λ таким образом, чтобы решение системы (1.8) уже при $\lambda \neq 0$ и при начальных условиях

$$\psi_1 = \psi_2 = \ldots = \psi_n = 0, \qquad \psi_{n+1} = h\lambda_{11} + \beta_1, \ldots, \psi_{2n} = h\lambda_{1n} + \beta_n \tag{2.1}$$

было периодично с периодом $2\pi / k_1 + \gamma$. При этом мы считаем, что $|\beta_1|, \ldots, |\beta_n|$, $|\gamma|$, $|\lambda|$ достаточно малы. Кроме того, одно из чисел $\beta_1, \ldots, \beta_n$ (обозначим его β_s) подходящим образом может быть выбрано равным нулю. Это решение (1.8) обозначим через

$$\psi_\nu(t, \beta_1, \ldots, \beta_{s-1}, \beta_{s+1}, \ldots, \beta_n, \lambda), \qquad \psi_{n+\nu}(t, \beta_1, \ldots, \beta_{s-1}, \beta_{s+1}, \ldots, \beta_n, \lambda) \tag{2.2}$$

Первые n функции этого решения являются решением (1.5) или, что то же, решением (1.4). Нетрудно проверить, что если $\psi_\nu(t)$ — решение (1.4), то и $-\psi_\nu(2q - t)$, где q — постоянное, является решением системы (1.4). Вот почему известно[1], что если первые n функций в (2.2) обращаются в нуль при $t = q$, то они периодичные с периодом $2q$. Заметим, что эти функции вследствие (2.1) обращаются в нуль при $t = 0$.

Мы хотим, чтобы решение (2.2) имело период $2\pi / k_1 + \gamma$. Положим $\gamma = 2\delta / k_1$. Таким образом, если

$$\psi_\nu\left(\frac{\pi + \delta}{k_1}, \beta_1, \ldots, \beta_{s-1}, \beta_{s+1}, \ldots, \beta_n, \lambda\right) = 0 \tag{2.3}$$

то (2.2) будет решением с периодом $2(\pi + \delta) / k_1$.

Так как правые стороны (1.8) — аналитические функции от $\psi_1, \ldots, \psi_{2n}$ то[6] левые стороны (2.3) — аналитические функции от δ, $\beta_1, \ldots, \beta_{s-1}, \beta_{s+1}, \ldots, \beta_n$, λ в окрестности $\delta = \beta_1 = \ldots = \beta_{s-1} = \beta_{s+1} = \ldots = \beta_n = \lambda = 0$. Независимо от этого условия (2.3) выполнены при $\delta = \beta_1 = \ldots = \beta_{s-1} = \beta_{s+1} = \ldots = \beta_n = \lambda = 0$ вследствие (1.16). Для того чтобы мы могли определить $\beta_1, \ldots, \beta_{s-1}, \beta_{s+1}, \delta$ как функции λ из (2.3), остается показать, что функциональный определитель не равен нулю. Учитывая (2.1), получим из (1.13)

$$\psi_\nu(t, \beta_1, \ldots, \beta_{s-1}, \beta_{s+1}, \ldots, \beta_n, 0) = \lambda_{1\nu} \frac{h}{k_1} \sin k_1 t + \sum_{\mu=1}^{n} \lambda_{\mu\nu} \frac{B^{(\mu)}}{k_\mu B} \sin k_\mu t \tag{2.4}$$

где $B^{(\mu)}$ — определитель, полученный из B заменой μ-го столбца на $\beta_1, \ldots, \beta_{s-1}, 0,$

$\beta_{s+1}, \ldots, \beta_n$. Из (2.4) при $t = (\pi + \delta) k_1$ будем иметь (2.5)

$$\psi_\nu\left(\frac{\pi+\delta}{k_1}, \beta_1, \ldots, \beta_{s-1}, \beta_{s+1}, \ldots, \beta_n, 0\right) = \lambda_{1\nu} \frac{h}{k_1} \sin(\pi + \delta) + \sum_{\mu=1}^{n} \lambda_{\mu\nu} \frac{B^{(\mu)}}{k_\mu B} \sin \frac{k_\mu (\pi + \delta)}{k_1}$$

Отсюда находим частные производные ψ_ν по $\beta_1, \ldots, \beta_n, \delta$, которые необходимы для функционального определителя.

Вычисляя этот определитель, получаем один не обращающийся в нуль множитель, а также и множители $\overline{B}_{1,s}$ и $\Pi = \sin \pi k_2 / k_1 \ldots \sin \pi k_n / k_1$, где $\overline{B}_{1,s}$ — определитель, полученный из адъюнкта $\overline{B}$ определителя B зачеркиванием в $\overline{B}$ первого столбца и s-й строки. По крайней мере при одном значении s непременно $\overline{B}_{1,s} \neq 0$. Допуская противное, получим $B = 0$, что неверно. С другой стороны, так как k_1 образовано при помощи самого большого корня уравнения (1.10), то $k_p/k_1 < 1$ и следовательно, $\Pi = \sin(\pi k_2 / k_1) \ldots \sin(\pi k_n / k_1) \neq 0$.

При $n = 2$ условие (1,12) получаем в виде[2]

$$\omega^2 < \frac{9g}{a(14 + 4\sqrt{7})} = \frac{3g(\sqrt{7} - 2)}{2\sqrt{7}\,a} \tag{2.6}$$

и для периода имеем

$$2\frac{\pi + \delta}{\sqrt{-\omega^2 - \frac{9g}{a(-14+4\sqrt{7})}}} = 2\frac{\pi + \delta}{\sqrt{\frac{3g(\sqrt{7}+2)}{2a\sqrt{7}} - \omega^2}} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{3g(\sqrt{7}+2)}{2a\sqrt{7}} - \omega^2}} + \gamma$$

Поступила 7 VIII 1953

ЛИТЕРАТУРА

1. Bradistilov G. Über periodische und asymptotische Lösungen beim n-fachen Pendel in der Ebene. Mathematische Annalen, Bd. 116, Heft 4, 1939.
2. Манолов. Сп. Върху съществуването на малки периодични движения на една механична конфигурация. Год. Соф. университет, т. 46, кн. 1, 1949—1950.
3. Обрешков Н. Бележка върху малките периодични движения. Год. Соф. университет, т. 38, кн. 1, 1941—1942.
4. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления, т. I. ОГИЗ, Гостехиздат, 1947.
5. Лойцянский Л. Г., Лурье А. Н. Курс теоретической механики, ч. II, ГОНТИ, 1938.
6. Малкин И. Г. Методы Ляпунова и Пуанкаре в теории нелинейных колебаний, ОГИЗ, 1949.