Прикладная математика и механика. Том XIX, 1955
Институт механики Академии наук Союза ССР

ПОЛОЖЕНИЕ ТРОЙНОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО МАЯТНИКА В ПЛОСКОСТИ ПРИ ЕГО ПЕРИОДИЧЕСКОМ И АСИМПТОТИЧЕСКОМ ДВИЖЕНИЯХ ВОКРУГ ПОЛОЖЕНИЯ РАВНОВЕСИЯ

Г. Брадистилов
(София)

В работе [1] рассмотрена система n последовательно соединенных физических маятников, которые вращаются вокруг параллельных осей, и доказано существование при известных условиях семейства периодических и асимптотических движений этой системы вокруг положения равновесия. В работе [2] исследован частный случай положения после начального момента системы трех последовательно соединенных математических маятников при периодическом ее движении вокруг положения устойчивого равновесия и то только в конкретном случае, когда длины маятников удовлетворяют условию $a_1 > a_2 > a_3$. Ниже рассматриваются положения тройного математического маятника при его периодических и асимптотических движениях около положения равновесия (устойчивого и неустойчивого), соответственно после начального момента и при $t \to \infty$.

§ 1. Периодические и асимптотические движения тройного математического маятника вокруг положения равновесия. Приведем некоторые формулы и результаты работы [1], а также дадим и такие, которые понадобятся при исследовании положения тройного математического маятника при его периодических и асимптотических движениях.

1. Периодичные движения. Предположим, что в тройном математическом маятнике p маятников направлены вниз, а q — вверх, где $p + q = 3$ и $q \geqslant 0$, и положим

$$\varphi_{r_p} = \lambda\psi_{r_p}, \qquad \varphi_{r_q} = \lambda\psi_{r_q} + \pi$$

где r_p и r_q, соответствующие p и q, принимают различные значения; тогда при $\lambda = 0$ система дифференциальных уравнений движения следующая:

$$\varepsilon_\nu M_\nu \sum_{k=1}^{\nu-1} \varepsilon_k a_k \psi_k'' + a_\nu M_\nu \psi_\nu'' + \varepsilon_\nu \sum_{k=\nu+1}^{3} \varepsilon_k M_k a_k \psi_k'' = -\varepsilon_\nu g M_\nu \psi_\nu \tag{1.1}$$

где $\varepsilon_{r_p} = 1$ и $\varepsilon_{r_q} = -1$. Характеристическое уравнение этой системы, полагая $\rho^2 = g/u$ запишем в виде

$$f(u) = \begin{vmatrix} M_1(a_1 + \varepsilon_1 u) & M_2 a_2 & M_3 a_3 \\ M_2 a_1 & M_2(a_2 + \varepsilon_2 u) & M_3 a_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 + \varepsilon_3 u \end{vmatrix} = 0 \tag{1.2}$$

или

$$f(u) = M_1(a_1 + \varepsilon_1 u)\,\tau(u) - M_2 a_1 a_2 \omega(u) - \varepsilon_2 M_2 M_3 a_1 a_3 u = 0 \tag{1.3}$$

где

$$\omega(u) = \frac{1}{a_1} \begin{vmatrix} M_2 a_1 & M_3 a_3 \\ a_1 & a_3 + \varepsilon_3 u \end{vmatrix} = \varepsilon_3 M_2 u + m_2 a_3 \tag{1.4}$$

$$\tau(u) = \begin{vmatrix} M_2(a_2 + \varepsilon_3 u) & M_3 a_3 \\ a_2 & a_3 + \varepsilon_3 u \end{vmatrix} = \varepsilon_2\varepsilon_3 M_2 u^2 + M_2(\varepsilon_2 a_3 + \varepsilon_3 a_2)\,u + m_2 a_2 a_3 =$$

$$= a_2 \omega(u) + \varepsilon_2 M_2 u(\varepsilon_3 u + a_3) \tag{1.5}$$

Всякой паре чисто мнимых корней $\pm i\rho_k$ характеристического уравнения соответствует одно семейсто периодических колебаний с приблизительным периодом $2\pi/\rho_k$, при которых три маятника всегда остаются в окрестности вертикального положения, если ни один другой корень не кратен $+i\rho_k$ и если все корни различные. Ниже будет показано, что корни уравнения (1.3) простые.

Начальная угловая скорость ν-го маятника при периодичвом движении следующая:

$$\varphi_\nu'(0) = \lambda\psi_\nu'(0) = L_{\nu k}\rho_k + \sum_{\mu=1}^{n}{}' L_{\nu\mu}\rho_\mu\alpha_\mu$$

где штрих означает, что при суммировании по μ член с индексом $\mu = k$ не включен, $L_{\nu k}$ — алгебраические дополнения элементов первого ряда определителя (1.2) при $u = u_k = -\rho_k^2/g$. Имея в виду (1.4) и (1.5), эти скорости можно написать в виде

$$\begin{aligned}
\varphi_1'(0) &= \lambda\psi_1'(0) = \lambda\tau(u_k)\rho_k + O(\lambda)\\
\varphi_2'(0) &= \lambda\psi_2'(0) = -\lambda a_1\omega(u_k)\rho_k + O(\lambda)\\
\varphi_3'(0) &= \lambda\psi_3'(0) = -\lambda\varepsilon_2 M_2 a_1 u_k\rho_k + O(\lambda)
\end{aligned} \tag{1.6}$$

Обозначим через s_1^δ, s_2^δ и s_3^δ отклонения, которые три маятника при $\lambda \to 0$ и после начального момента образуют соответственно с их вертикалями. Тогда отношения этих отклонений согласно (1.6) будут даны следующими выражениями:

$$\frac{s_1^\delta}{s_2^\delta} = \lim_{\lambda\to 0}\frac{\lambda\psi_1'(0)}{\lambda\psi_2'(0)} = \frac{\tau(u_k)}{-a_1\omega(u_k)}, \qquad \frac{\varphi_2^\delta}{\varphi_3^\delta} = \lim_{\lambda\to 0}\frac{\lambda\psi_2'(0)}{\lambda\psi_3'(0)} = \frac{\omega(u_k)}{\varepsilon_2 M_2 u_k} \tag{1.7}$$

Отношение отклонений s_1^δ, s_2^δ и s_3^δ трех масс m_1, m_2 и m_3 маятников от положения неустойчивого равновесия определяются выражениями

$$\frac{s_1^\delta}{s_2^\delta} = \lim_{\lambda\to 0}\frac{\varepsilon_1 a_1\lambda\psi_1'(0)}{\varepsilon_1 a_1\lambda\psi_1'(0) + \varepsilon_2 a_2\lambda\psi_2'(0)} = \frac{\varepsilon\tau_1(u_k)}{\varepsilon_1\tau(u_k) - \varepsilon_2 a_2\omega(u_k)} \tag{1.8}$$

$$\frac{s_2^\delta}{s_3^\delta} = \lim_{\lambda\to 0}\frac{\varepsilon_1 a_1\lambda\psi_1'(0) + \varepsilon_2 a_2\lambda\psi_2'(0)}{\varepsilon_1 a_1\lambda\psi_1'(0) + \varepsilon_2 a_2\lambda\psi_2'(0) + \varepsilon_3 a_3\lambda\psi_3'(0)} = \frac{\varepsilon_1\tau(u_k) - \varepsilon_2 a_2\omega(u_k)}{\varepsilon_1\tau(u_k) - \varepsilon_2 a_2\omega(u_k) - \varepsilon_2\varepsilon_3 M_2 a_3 u_k} \tag{1.9}$$

Здесь δ есть 0 или π в зависимости от того, направлен соответствующий маятник вниз или вверх.

2. *Асимптотические движения.* При исследовании асимптотических движений тройного математического маятника в соответственной системе дифференциальных уравнений движения, не вводя параметра λ, полагаем $\varphi_{r_p} \to \varphi_{r_p}$, $\varphi_{r_q} \to \pi + \varphi_{r_q}$, где r_p и r_q имеют те же значения, что и выше.

Как покажем ниже, для всякого вида тройного математического маятника соответственное характеристическое уравнение имеет только чисто мнимые и действительные корни.

Если h есть число отрицательных корней, то согласно работе [1] в окрестности неустойчивого равновесия для тройного математического маятвика существует одно семейство асимптотических движений, которое зависит от h произвольных констант.

При известных предположениях асимптотические решения могут быть описаны более точно; здесь рассмотрим два случая:

Случай A. Пусть $\rho_1, \ldots, \rho_h$ — отрицательные характеристические корни (которые могут и не быть все); кроме того, предположим, что (1.10)

$$p_1\rho_1 + \ldots + p_h\rho_h \neq \rho_\nu \quad (\nu = 1, \ldots, h), \qquad p_1\rho_1 + \ldots + p_h\rho_h \neq \rho_k \quad (k = h+1, \ldots, 3)$$

для всякой системы неотрицательных чисел ρ_ν, сумма которых $\geqslant 2$

тогда в обозначениях (1.4) и (1.5), заменяя $\varphi_{r_p} \to \varphi_{r_p}$, а $\varphi_{r_q} \to \pi + \varphi_{r_q}$ асимптотические решения можно представить в следующем виде:

$$\varphi_1(t) = \sum_{k=1}^{h} C_k \tau(u_k) e^{-\xi_k t} + F_1$$

$$\varphi_2(t) = -\sum_{k=1}^{h} C_k a_1 \omega(u_k) e^{-\xi_k t} + F_2 \tag{1.11}$$

$$\varphi_3(t) = -\sum_{k=1}^{h} \varepsilon_2 C_k M_2 a_1 u_k e^{-\xi_k t} + F_3$$

где $\xi_k = -\rho_k$ и F_ν ($\nu = 1, 2, 3$) — степенные ряды по $C_1 e^{-\xi_1 t}, \ldots, C_h e^{-\xi_h t}$, которые начинаются от членов не ниже второго ряда.

Из формул (1.11) можно заключить, что тройной математический маятник при $t \to \infty$ приближается к положению неустойчивого равновесия так, что каждый маятник остается всегда с одной и той же стороны своей вертикали и движение всегда направлено к ней (чисто асимптотические движения).

Случай В. Если действительные части характеристических корней различные, то каждому отрицательному корню ρ_k соответствует одно семейство решений, для которого [1.(39)]

$$\lim_{t\to\infty} \varphi_\nu(t) = 0 \qquad (\nu = 1, 2, 3)$$

$$\lim_{t\to\infty} (\varphi_1 : \varphi_2 : \varphi_3) = L_{1k} : L_{2k} : L_{3k} = \tau(u_k) : -a_1 \omega(u_k) : -\varepsilon_k M_2 a_1 u_k \tag{1.12}$$

Число произвольных констант этого семейства равно числу отрицательных характеристических корней, которые $\leqslant \rho_k$.

Если для семейства асимптотических движений, которое соответствует корню $\rho_k = -\xi_k$ при $t \to \infty$, обозначим через φ_1^∞, φ_2^∞ и φ_3^∞ отклонения трех маятников от их вертикалей, а через s_1^∞, s_2^∞ и s_3^∞ отклонения их масс от положения неустойчивого равновесия, то отношение этих отклонений непосредственно получается или из формул (1.11), или из формул (1.12) в зависимости от того, выполняются ли для этого семейства асимптотических движений условия случая А или условия случая В (при использовании формул (1.11) все константы C_ν, для которых $-\xi_\nu > -\xi_k$, принимаются равными нулю):

$$\frac{\varphi_1^\infty}{\varphi_2^\infty} = \frac{\tau(u_k)}{-a_1 \omega(u_k)}, \qquad \frac{\varphi_2^\infty}{\varphi_3^\infty} = \frac{\omega(u_k)}{\varepsilon_2 M_2 u_k} \tag{1.13}$$

$$\frac{s_1^\infty}{s_2^\infty} = \frac{\varepsilon_1 \tau(u_k)}{\varepsilon_1 \tau(u_k) - \varepsilon_2 a_2 \omega(u_k)}, \qquad \frac{s_2^\infty}{s_3^\infty} = \frac{\varepsilon_1 \tau(u_k) - \varepsilon_2 a_2 \omega(u_k)}{\varepsilon_1 \tau(u_k) - \varepsilon_2 a_2 \omega(u_k) - \varepsilon_2 \varepsilon_3 M_2 a_3 u_k} \tag{1.14}$$

3. Общее замечание. Ясно, что исследование отношений (1.7), (1.8), (1,9), (1.13) и (1.14) связано главным образом с определением знаков выражений $\tau(u_k)$ и $\omega(u_k)$ для всех видов тройного математического маятника. Однако, чтобы осуществить это определение, сначала мы выведем здесь некоторые результаты, общие для различных видов тройных маятников.

Если обозначим через α_1 и α_2 корни уравнения

$$\tau(u) \equiv \varepsilon_2 \varepsilon_3 M_2 u^2 + M_2 (\varepsilon_2 a_3 + \varepsilon_3 a_2) u + m_2 a_2 a_3 = 0 \tag{1.15}$$

т. е.

$$\alpha_{1,2} = -\frac{\varepsilon_2 a_3 + \varepsilon_3 a_2}{2\varepsilon_2 \varepsilon_3} \mp \sqrt{\left(\frac{\varepsilon_2 a_3 + \varepsilon_3 a_2}{2}\right)^2 - \frac{m_2}{\varepsilon_2 \varepsilon_3 M_2} a_2 a_3} \tag{1.16}$$

то получаем неравенства

$$\alpha_1 < \beta = -\frac{m_2}{\varepsilon_3 M_2} a_3 < \alpha_2 \tag{1.17}$$

независимо от знаков ε_2 и ε_3, где β — корень уравнения $\omega(u) = 0$.

Действительно, при $u = \beta$ левая часть уравнения (1.15) равна

$$\tau\left(-\frac{m_2}{\varepsilon_3 M_2} a_3\right) = -\varepsilon_2 \varepsilon_3 \frac{m_2 m_3}{M_2} a_3^2$$

Так как

$$\begin{array}{llll} \tau(-\infty) > 0, & \tau(\beta) < 0, & \tau(+\infty) > 0 & \text{при } \varepsilon_2\varepsilon_3 > 0 \\ \tau(-\infty) < 0 & \tau(\beta) > 0, & \tau(+\infty) < 0 & \text{при } \varepsilon_2\varepsilon_3 < 0 \end{array}$$

неравенства (1.17) выполнимы.

Если в $f(u)$ положим $u = \alpha$ и примем во внимание тождество $\tau(\alpha) \equiv 0$, то получим

$$f(\alpha) = \varepsilon_2 M_2 a_1 \alpha \omega(\alpha) \tag{1.18}$$

Для $u = -\dfrac{m_2}{\varepsilon_3 M_2} a_3$

$$f\left(-\frac{m_2}{\varepsilon_3 M_2} a_3\right) = \varepsilon_2 \frac{m_2 m_3}{M_2^2} a_3^2 (\varepsilon_1 M_1 m_2 a_3 - \varepsilon_3 M_2 m_1 a_1) \tag{1.19}$$

§ 2. Расположение корней характеристического уравнения и определение периодических и асимптотических движений. 1. *Три маятника направлены вниз.* В этом случае имеем $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = 1$. Тогда из (1.16) непосредственно следует, что уравнение $\tau(u) = 0$ имеет корни α_1 и α_2 отрицательные и различные; кроме того, точка α_1 находится влево от точек $-a_2$ и $-a_3$, а α_2 вправо. Принимая во внимание (1.17) и (1.18), для левой части $f(u)$ уравнения (1.3) получаем

$$f[-(a_1 + a_3 + a_3)] < 0, \qquad f(\alpha_1) > 0, \qquad f(\alpha_2) < 0, \qquad f(0) > 0$$

Следовательно, корни u_1, u_2 и u_3 уравнения $f(u) = 0$ располагаются так:

$$-(a_1 + a_2 + a_3) < u_1 < \alpha_1 < u_2 < \alpha_2 < u_3 < 0 \tag{2.1}$$

Отсюда приходим к заключению, что корни уравнения (1.2) простые и отрицательные. Следовательно, корни характеристического уравнения — числа мнимые $\pm i\rho_k$ $(k = 1, 2, 3)$; этому, вообще говоря, соответствует три семейства периодических движений. В последующих случаях рассуждения проводятся аналогично.

2. *Три маятника направлены вверх* $(\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = -1)$. Корни α_1 и α_2 уравнения $\tau(u) = 0$ положительные и различные, кроме того, $\alpha_1 < a_2, a_3$ и $\alpha_2 > a_2, a_3$. При этом корни u_1, u_2, u_3 уравнения $f(u) = 0$ простые и положительные и располагаются так:

$$0 < u_1 < \alpha_1 < u_2 < \alpha_2 < u_3 < +\infty \tag{2.2}$$

Следовательно, характеристическое уравнение имеет только действительные корни, из которых три отрицательные $\rho_k = -\xi_k = -\sqrt{g/u_k}$. Отсюда следует, что не существует периодического движения, а существует одно семейство асимптотических движений вокруг положения неустойчивого равновесия, зависящее от трех произвольных констант. Для этого семейства остается в силе случай B, так как действительные корни простые.

3. *Два маятника направлены вверх и один вниз.* а) *Первые два маятника направлены вверх* $(\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = -1,\ \varepsilon_3 = 1)$. Здесь $\alpha_1 < 0$, а $\alpha_2 > 0$; эти корни находятся в интервале $(-a_3, a_2)$;

$$\alpha_2 < u_1 < 0 < u_2 < \alpha_2 < u_3 < +\infty \tag{2.3}$$

б) *Первый и третий маятники направлены вверх* $(\varepsilon_1 = \varepsilon_3 = -1,\ \varepsilon_2 = +1)$. Корни $\alpha_1 < 0$, $\alpha_2 > 0$ лежат в интервале $(-a_2, a_3)$;

$$\alpha_1 < u_1 < 0 < u_2 < \alpha_2 < u_3 < +\infty \tag{2.4}$$

в) *Второй и третий маятники направлены вверх* ($\varepsilon_2 = \varepsilon_3 = -1,\ \varepsilon_1 = +1$). Для корней α_1 и $\alpha_2 > 0$ имеем неравенства $\alpha_1 < a_2, a_3$; $\alpha_2 > a_2, a_3$:

$$-\infty < u_1 < 0 < u_2 < \alpha_1 < u_3 < \alpha_2 \tag{2.5}$$

Эти три случая показывают, что характеристическое уравнение имеет пару чисто мнимых корней $\pm i\rho_1 = \pm\sqrt{g/u_1}$ и два простых отрицательных:

$$\pm i\rho_1 = \pm\sqrt{g/u_1}, \qquad \rho_2 = -\xi_2 = -\sqrt{g/u_2}, \qquad \beta_3 = -\xi_3 = -\sqrt{g/u_3} \qquad (-\xi_2 < -\xi_3)$$

Чисто мнимая пара корней $\pm i\rho_1$ доказывает существование одного семейства периодических движений с неустойчивым положением равновесия, так как $\rho_2/i\rho_1$ и $\rho_3/i\rho_1$ не есть целые числа. Напротив, два отрицательных корня $\rho_2 = -\xi_2$, $\rho_3 = -\xi_3$ доказывают в то же время существование одного семейства асимптотических движений вокруг положения неустойчивого равновесия, которое зависит от двух произвольных констант. Для этого семейства случай «В» не имеет места, так как не все действительные части характеристических корней различны; действительные части двух мнимых корней равны нулю.

4. *Два маятника направлены вниз.* а) *Первые два маятника направлены вниз* ($\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = +1,\ \varepsilon_3 = -1$). Здесь корни $\alpha_1 < 0$ и $\alpha_2 > 0$ находятся в интервале $(-a_2, a_3)$;

$$-\infty < u_1 < \alpha_1 < u_2 < 0 < u_3 < \alpha_2 \tag{2.6}$$

б) *Первый и третий маятники направлены вниз* ($\varepsilon_1 = \varepsilon_3 = +1,\ \varepsilon_2 = -1$). Корни $\alpha_1 < 0$ и $\alpha_2 > 0$ лежат в интервале $(-a_3, a_2)$;

$$-\infty < u_1 < \alpha_1 < u_2 < 0 < u_3 < \alpha_2 \tag{2.7}$$

в) *Второй и третий маятники направлены вниз* ($\varepsilon_1 = -1,\ \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = +1$). Для корней $\alpha_1 < 0$ и $\alpha_2 < 0$ имеем неравенства $\alpha_1 < -a_2, -a_3$ и $\alpha_2 > -a_2, -a_3$;

$$\alpha_1 < u_1 < \alpha_2 < u_2 < 0 < u_3 < \infty \tag{2.8}$$

Эти три случая показывают, что характеристическое уравнение имеет два чисто мнимых корня и один отрицательный:

$$\pm i\rho_1 = \pm\sqrt{\frac{g}{u_1}}, \qquad \pm i\rho_2 = \pm\sqrt{\frac{g}{u_2}}, \qquad \rho_3 = -\xi_3 = -\sqrt{\frac{g}{u_3}}$$

Паре корней $\pm i\rho_1$ соответствует непременно семейство периодических движений с приблизительным периодом $2\pi/\rho_1$ (медленное колебание), зависящее от одного параметра, если ρ_2 не кратно ρ_1, а корням $\pm i\rho_2$ — другое семейство периодических движений с приблизительным периодом $2\pi/\rho_2$ (быстрое колебание). Напротив, $\rho_3 = -\xi_3$ соответствует одно семейство чисто асимптотических движений, которое зависит от одного произвольного параметра. Для этого семейства остается в силе случай А.

На основании проведенного анализа можно сформулировать следующую теорему:

1. Характеристическое уравнение системы дифференциальных уравнений тройного математического маятника имеет только простые чисто мнимые и реальные корни.

2. Если q ($q = 1, 2, 3$) маятника направлены вверх, то тройной математический маятник теряет q семейств периодических движений, а получает одно семейство чисто асимптотических движений, которое зависит от q произвольных констант.

Те же теоремы остаются в силе и для n-кратного математического маятника (n последовательно соединенных математических маятников).

§ 3. Положение тройного математического маятника при периодических и асимптотических движениях вокруг положения равновесия после начального момента. Для иллюстрации метода исследования положения тройного математического маятника после начального момента при $\lambda \to 0$ (соответственно при $t \to \infty$) рассмотрим только два вида маятников. Остальные случаи исследуются аналогично.

1. *Три маятника направлены вниз* ($\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = +1$). Чтобы произвести соответствующее исследование, необходимо установить знаки $\tau(u)$ и $\omega(u)$ для $u = u_1, u_2, u_3$.

Из (1.17) и (2.1) ясно, что

$$\tau(u_1) > 0, \quad \tau(u_2) < 0, \quad \tau(u_3) > 0, \quad \omega(u_1) < 0, \quad \omega(u_3) > 0 \tag{3.1}$$

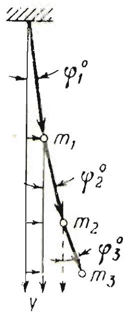
Однако $\omega(u_2)$ может быть положительным, отрицательным и нулем в зависимости от соотношения масс и длин маятников. Действительно, если выражение (1.19)

$$f\left(-\frac{m_2}{M_2}a_3\right) \lesseqgtr 0, \qquad \text{т. е. если } M_1m_2a_3 - M_2m_1a_1 \lesseqgtr 0$$

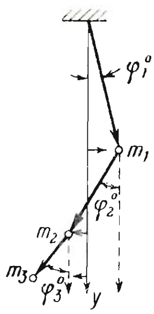
то согласно (1.17) и (2.1)

$$-\frac{m_2}{M_2}a_3 \gtreqless u_2, \qquad \text{или} \qquad \omega(u_2) \lesseqgtr 0 \tag{3.2}$$

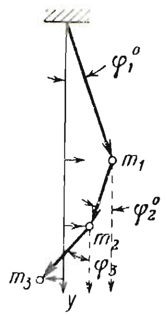
а) *Семейство периодических движений, зависящее от* u_1 (медленное колебание). Вообще существует одно семейство периодических движений с приблизительным периодом $2\pi/\rho_1$, которое соответствует чисто мнимой паре корней $\pm i\rho_1 = \pm\sqrt{g/u_1}$. Также в исключительном случае, когда ρ_2/ρ_1 или ρ_3/ρ_1 — число целое, не можем быть уверены в существовании такого колебания.



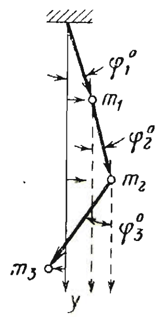
Фиг. 1



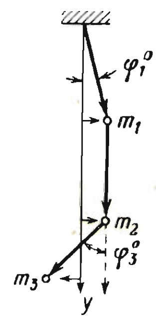
Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4



Фиг. 5

Согласно (3.1) формулы (1.7) дают нам следующие неравенства:

$$\frac{\varphi_1^\circ}{\varphi_2^\circ} = \frac{\tau(u_1)}{-a_1\,\omega(u_1)} > 0, \qquad \frac{\varphi_2^\circ}{\varphi_3^\circ} = \frac{\omega(u_1)}{M_2u_1} > 0, \qquad |\varphi_2^\circ| < |\varphi_3^\circ|$$

Эти неравенства достаточны, чтобы охарактеризовать положение тройного математического маятника после начального момента при медленных периодических движениях; они показывают, что все три маятника отклоняются в одну сторону от их вертикалей (фиг. 1).

б) *Семейство периодических движений, зависящее от* u_2 (среднее колебание). Если ρ_3/ρ_2 не целое, то обязательно существует одно семейство периодических движений с периодом, приблизительно равным $2\pi/\rho_2$, которое соответствует паре чисто мнимых корней $\pm i\rho_2$.

Так как $\omega(u_2)$ может быть отрицательным, положительным и нулем, различаем здесь три случая.

Первый случай: $\omega(u_2) < 0$ $(M_1m_2a_3 - M_2m_1a_1 < 0)$. Для $u = u_2$ формулы (1.7), (1.8) и (1.9) дают

$$\frac{\varphi_1^\circ}{\varphi_2^\circ} < 0, \qquad \frac{\varphi_2^\circ}{\varphi_3^\circ} > 0, \qquad |\varphi_2^\circ| < |\varphi_3^\circ|; \qquad \frac{s_1^\circ}{s_2^\circ} \lessgtr 0, \qquad \frac{s_2^\circ}{s_3^\circ} \gtrless 0 \qquad \text{при} \quad -a_3 \gtrless u_2$$

Следовательно, если выполнено первое условие $(-a_3 > u_2)$, то для того, чтобы мы имели периодические движения, массы двух последних маятников должны начинать движение с одной и той же стороны относительно положения устойчивого равновесия, а масса первого — с другой стороны (фиг. 2). Если выполнено второе условие $-a_3 < u_2$ то массы двух первых маятников должны начинать движение с одной стороны положения равновесия, а масса последнего — с другой (фиг. 3). И при обоих условиях последние маятники сначала отклоняются с одной и той же стороны их вертикалей.

Второй случай: $\omega(u_2) > 0$ $(M_1 m_2 a_3 - M_2 m_1 a_1 > 0)$. Здесь имеем

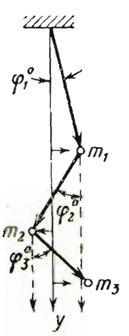
$$\frac{\varphi_1^\circ}{\varphi_2^\circ} > 0, \qquad \frac{\varphi_2^\circ}{\varphi_3^\circ} < 0; \qquad\qquad \frac{s_1^\circ}{s_2^\circ} > 0, \qquad \frac{s_2^\circ}{s_3^\circ} < 0$$

так как $u_2 > -a_3$. Эти равенства показывают, что в этом случае, чтобы иметь периодические движения, надо, чтобы после начального момента первые два маятника были отклонены в одну и ту же сторону от их вертикалей, а — третий в противоположную сторону, и массы последних двух маятников должны выходить из различных сторон положения равновесия (фиг. 4).

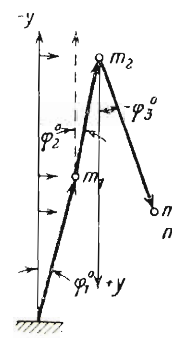
Третий (*предельный*) *случай*: $\omega(u_2) = 0$ $(M_1 m_2 a_3 - M_2 m_1 a_1 = 0)$. Имеем

$$\frac{\varphi_1^\circ}{\varphi_3^\circ} < 0, \qquad \varphi_2^\circ = 0; \qquad\qquad \frac{s_1^\circ}{s_2^\circ} = 1, \qquad \frac{s_2^\circ}{s_3^\circ} < 0$$

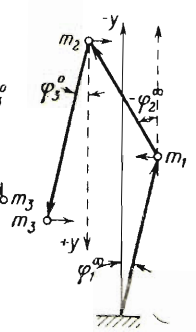
Эти выражения показывают, что второй маятник после начального момента не отклоняется от вертикали (фиг. 5).



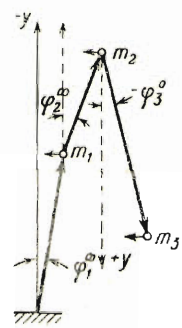
Фиг. 6



Фиг. 7



Фиг. 8



Фиг. 9

Следовательно, при среднем периодическом колебании положение тройного математического маятника после начального момента и при $\lambda \to 0$ характеризуется четырьмя конфигурациями.

в) *Семейство периодических движений, зависящее от* u_2 (быстрые колебания). Так как ρ_1/ρ_3 и ρ_2/ρ_3 не целые числа, то существует одно семейство периодических движений с приблизительным периодом $2\pi/\rho_3$, которое представляет самые быстрые периодические колебания. Здесь имеем

$$\frac{\varphi_1^\circ}{\varphi_2^\circ} < 0, \qquad \frac{\varphi_2^\circ}{\varphi_3^\circ} < 0; \qquad \frac{s_1^\circ}{s_2^\circ} < 0, \qquad \frac{s_2^\circ}{s_3^\circ} < 0$$

Отсюда заключаем, что маятники после начального момента отклонены последовательно в различные стороны от их вертикалей, также их массы отклоняются последовательно от различных сторон положения равновесия (фиг. 6).

2. *Первые два маятника направлены вверх* $(\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = -1, \ \varepsilon_3 = +1)$. Из (2.4) и (1.17) следует, что для выражений (1.4) и (1.5) имеем

$$\tau(u_1) > 0, \qquad \tau(u_2) > 0, \qquad \tau(u_3) < 0; \qquad \omega(u_2) > 0, \qquad \omega(u_3) > 0 \tag{3.3}$$

Покажем, что величина $\omega(u_1)$ отрицательна. Действительно, согласно (1.19) имеем

$$f\left(-\frac{m_2}{M_2}a_3\right) = \frac{m_2 m_3}{M_2^2} a_3^2 (M_1 m_2 a_3 + M_2 m_1 a_1) > 0$$

Следовательно $-a_3 m_2 / M_2 > u_1$; а отсюда (3.4)

$$\omega(u_1) < 0$$

а) *Семейство периодических движений, зависящее от* u_1. Согласно (3.3) и (3.4) формулы (1.7) дают

$$\frac{\varphi_1^{\pi}}{\varphi_2^{\pi}} = \frac{\tau(u_1)}{-a_1\omega(u_1)} > 0, \qquad \frac{\varphi_2^{\pi}}{\varphi_3^{\circ}} = \frac{\omega(u_1)}{-M_2u_1} < 0, \qquad |\varphi_2^{\pi}| < |\varphi_3^{\circ}| \tag{3.5}$$

Эти неравенства показывают, что все три маятника выходят из одной и той же стороны положения неустойчивого равновесия, т. е. углы φ_1^{π} и φ_2^{π} противоположны углу φ_3° (фиг. 7).

б) *Семейство асимптотических движений, зависящее от* u_2. Корню $\rho_2 = -\xi_2$ соответствует одно семейство асимптотических движений, которое зависит от одной произвольной константы. Так как и здесь имеет место случай А, потому что ρ_3 не кратно ρ_2 ($|\rho_3| < |\rho_2|$), то углы φ_1, φ_2 и φ_3 представляются следующими рядами (1.11):

$$\varphi_1(t) = C_2 \quad \tau(u_2)e^{-\xi_2 t} + F_1(C_2e^{-\xi_2 t})$$
$$\varphi_2(t) = -C_2a_1\omega(u_2)e^{-\xi_2 t} + F_2(C_2e^{-\xi_2 t})$$
$$\varphi_3(t) = C_2M_2a_1u_1e^{-\xi_2 t} + F_3(C_2e^{-\xi_2 t})$$

Следовательно, для этого семейства остаются в силе отношения (1.13) и (1.14). Согласно (3.3) из отношений (1.13) непосредственно вытекают следующие неравенства:

$$\frac{\varphi_1^{\infty}}{\varphi_2^{\infty}} = \frac{\tau(u_2)}{-a_1\omega(u_2)} < 0, \qquad \frac{\varphi_2^{\infty}}{\varphi_3^{\infty}} = \frac{\omega(u_2)}{-M_2u_2} < 0, \qquad |\varphi_2^{\infty}| > |\varphi_3^{\infty}|$$

Эти неравенства показывают, что при $t\to\infty$ первые два маятника отклонены в различные стороны от их вертикалей, а второй и третий — в одну и ту же сторону. Однако для того чтобы увидеть каково расположение масс маятников по отношению к положению неустойчивого равновесия, надо исследовать отношения (1.14). Для этих отношений согласно (3.3) имеем неравенства

$$\frac{s_1^{\infty}}{s_2^{\infty}} = -\frac{\tau(u_2)}{M_2u_2(a_3+u_2)} < 0, \qquad \frac{s_2^{\infty}}{s_3^{\infty}} = \frac{a_3+u_2}{2a_3+u_2} > 0$$

которые показывают, что массы двух последних маятников стремятся к положению неустойчивого равновесия с одной и той же стороны, а масса первого маятника — с противоположной (фиг. 8).

в) *Семейство асимптотических движений, зависящее от* u_3. Отрицательному корню $\rho_3 = -\xi_3$ соответствует одно семейство асимптотических движений, которое зависит от двух противоположных констант. Согласно случаю «А», если исполнено условие (1.10)

$$p_2\xi_2 + p_3\xi_3 \neq \xi_\nu \qquad (\nu = 2,3)$$

для всякой системы неотрицательных чисел p_ν, сумма которых $\geqslant 2$, то для этого семейства существуют формулы (1.11). Согласно (3.3) и из (1.13) находим следующие неравенства:

$$\frac{\varphi_1^{\infty}}{\varphi_2^{\infty}} > 0, \qquad \frac{\varphi_2^{\infty}}{\varphi_3^{\infty}} < 0, \qquad |\varphi_2^{\infty}| > |\varphi_3^{\infty}|$$

Эти неравенства достаточны, чтобы определить при $t\to\infty$ положение тройного математического маятника при этом асимптотическом движении около вертикального положения; из них также вытекает, что все три маятника отклонены в одну и ту же сторону от их вертикалей (фиг. 9); расположение то же, что и на фиг. 7, только здесь $|\varphi_2^{\infty}| > |\varphi_3^{\infty}|$.

Поступила 25 XI 1953

ЛИТЕРАТУРА

1. Bradistilov G. Über periodische und asymptotishe Lösungen beim n-fachen Pendel in der Ebene. Math. Annalen, Bd 116, s. 181—203, 1938.

2. Брадистилов Г. Положение системных трех последовательно соединенных математических маятников в одной плоскости при ее периодическом движении вокруг положения устойчивого равновесия. ПММ, т. XIX, вып. 1, 1955.