Прикладная математика и механика. Том XIX, 1955
Институт механики Академии наук Союза ССР

О ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОМ ЧИСЛЕ ИСЧЕЗАЮЩЕГО РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ВОЗМУЩЕННОГО ДВИЖЕНИЯ

Г. К. Пожарицкий

(Москва)

Исследуется характеристичное число исчезающего решения точных уравнений возмущенного движения; устанавливается, что оно в точности равно одному из характеристичных чисел системы первого приближения, если эти последние устойчивы; из указанного равенства на основании теорем Ляпунова и Н. Г. Четаева об устойчивости и неустойчивости по первому приближению вытекает ряд следствий.

1°. Пусть уравнения возмущенного движения имеют вид:

$$\frac{dx_s}{dt} = p_{s1}x_1 + \ldots + p_{sn}x_n + X_s \qquad (s = 1, \ldots, n) \tag{1}$$

где $p_{sj}(t)$ — вещественные, ограниченные, непрерывные функции времени, X_s — голоморфные относительно x_i функции, разложения которых начинаются с членов порядка не ниже второго относительно x_i с коэффициентами того же вида, что и p_{sj}.

Рассмотрим систему первого приближения, которая получится, если в системе (1) отбросить X_s:

$$\frac{dx_s}{dt} = p_{s1}x_1 + \ldots + p_{sn}x_n \qquad (s = 1, \ldots, n) \tag{2}$$

и систему

$$\frac{dx_s}{dt} = (p_{s1} + \varphi_{s1})\, x_1 + \ldots + (p_{sn} + \varphi_{sn})\, x_n \qquad (s = 1, \ldots, 2) \tag{3}$$

в которой $\varphi_{sj}(t)$ — функции того же вида, что и p_{sj}, кроме того, суть исчезающие, т. е. $p_{sj}(t) \to 0$ при $t \to \infty$.

Если система (2) обладает устойчивыми характеристичными числами $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, то $\lambda_1', \ldots, \lambda_n'$ — характеристичные числа системы (3) — совпадают с $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$.

2°. *Теорема*. Если система (1) имеет исчезающее решение $x_i(t)$, а система (2) — устойчивые характеристичные числа, то характеристичное число этого решения в точности равно одному из неотрицательных характеристичных чисел системы (2).

Действительно, так как X_s суть голоморфные функции x_i, то существует область около начала координат, в которой ряды X_s сходятся абсолютно и, следовательно каждый из них представим в виде

$$X_s \equiv \sum_{j=1}^{n} X_{sj}' x_j \qquad (s = 1, \ldots, n)$$

где X_{sj}' — абсолютно сходящиеся ряды того же вида, что и X_s, начинающиеся с членов не ниже первой степени относительно x_j. В области абсолютной сходимости рядов X_s система (1) эквивалентна системе

$$\frac{dx_s}{dt} = (p_{s1} + X_{s1}')\, x_1 + \ldots + (p_{sn} + X_{sn}')\, x_n \qquad (s = 1, \ldots, n) \tag{4}$$

После подстановки $x_i(t)$ в x_{sj} системы (4) получим систему

$$\frac{dx_s}{dt} = (p_{s1} + \varphi_{s1})\, x_1 + \ldots + (p_{sn} + f_{sn})\, x_n \qquad (s = 1, \ldots, n) \tag{5}$$

$$\varphi_{sj}(t) = [X_{sj}']_{x_i = x_i(t)}, \qquad \varphi_{sj}(t) \to 0 \qquad \text{при } t \to 0$$

Эта система будет обладать теми же характеристичными числами, что и система (2), так как $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ устойчивы, а $\varphi_{sj} \to 0$ при $t \to \infty$, и иметь $x_i(t)$ своим решением, т. е. характеристичное число $x_i(t)$ в точности равно одному из характеристичных чисел системы (2). Это характеристичное число не может быть отрицательным, так как $x_i(t)$ по условию исчезающее решение.

Следствие 1. Все характеристичные числа решений системы (1), если начальные условия достаточно малы по модулю, в точности совпадают с характеристичными числами системы (2) в том случае, когда последняя правильна и ее характеристичные числа все положительны и устойчивы. (Это прямое следствие теоремы Ляпунова [1] о правильных системах и предыдущей теоремы.)

3°. Приведем две теоремы Ляпунова [1] о свойствах характеристичных чисел, а также определение правильных систем.

1). Для того чтобы

$$X[\varphi(t)] = \lim_{t\to\infty} \frac{\ln|\varphi(t)|}{t}$$

необходимо и достаточно чтобы последний предел существовал.

2). Если

$$X[\varphi(t)] + X\left[\frac{1}{\varphi(t)}\right] = 0$$

то

$$X[\varphi(t)\,\psi(t)] = X[\varphi(t)] + X[\psi(t)]$$

где $\psi(t)$ — любая функция. Здесь, как и в дальнейшем, $X[\varphi(t)]$ обозначает характеристичное число функции $\varphi(t)$.

Система (2) называется правильной, если

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = X\left[\exp \int_0^t \sum_{s=1}^{n} p_{ss}\, dt\right] \tag{6}$$

$$X\left[\exp \int_0^t \sum_{s=1}^{n} p_{ss}\, dt\right] + X\left[\exp - \int_0^t \sum_{s=1}^{n} p_{ss}\, dt\right] \tag{7}$$

Лемма 1. Если система (2) правильная и имеет устойчивые характеристичные числа, то система (3) также правильная.

Если $\lambda_1', \ldots, \lambda_n'$ — характеристичные числа системы (3), то

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i' = \sum \lambda_s = X\left[\exp \int_0^t \sum_{s=1}^{n} p_{ss}\, dt\right] \tag{8}$$

в силу устойчивости характеристичных чисел системы (2) и ее правильности. Кроме того, на основании условия (7) и теоремы 2) имеем

$$X\left[\exp \int_0^t \sum_{s=1}^{n} (p_{ss} + \varphi_{ss})\, dt\right] = X\left[\exp \int_0^t \sum_{s=1}^{n} p_{ss}\, dt\right] + X\left[\exp \int_0 \sum \varphi_{ss}\, dt\right] \tag{9}$$

Установим следующую оценку:

$$X\left[\exp \int_0^t \sum_{s=1}^{n} \varphi_{ss}\, dt\right] = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \int_0^t \sum_{s=1}^{n} \varphi_{ss}\, dt = L \leqslant \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \int_0^T \sum_{s=1}^{n} \varphi_{ss}\, dt + \varepsilon = \varepsilon \tag{10}$$

Здесь ε сколь угодно мало, а T таково, что для $t > T$ выполняется неравенство $|\varphi_{ss}| < \varepsilon / n$

Следовательно, L существует и равно нулю.

Из (8), (9) и (10) непосредственно получаем выполнение условия (6) для системы (3). Выполнение условия (7) для системы (3) можно легко доказать методом, аналогичным тому, который употреблялся при выводе (9) и (10), пользуясь условием (7) для системы (2) и заменив знак в показателе.

Лемма 2. Пусть уравнения движения, из которых получены уравнения (1), имеют вид:

$$\frac{dy_s}{dt} = Y_s(y_1, \ldots, y_n t) \qquad (s = 1, \ldots, n) \tag{11}$$

Пусть $y_{j1}(t)$ и $y_{j2}(t)$ — частные решения системы (11) и таковы, что

$$|y_{j1}(t) - y_{j2}(t)| \to 0,$$

и пусть системы уравнений возмущенного движения для этих решений

$$\frac{dx_s}{dt} = p_{s1}^{(1)} x_1 + \ldots + p_{sn}^{(1)} x_n + X_s^{(1)} \qquad (s = 1, \ldots, n) \tag{1_1}$$

$$\frac{dx_s}{dt} = p_{s1}^{(2)} x_1 + \ldots + p_{sn}^{(2)} x_n + X_s^{(2)} \qquad (s = 1, \ldots, n) \tag{1_2}$$

имеют вид (1). Тогда линейные системы

$$\frac{dx_s}{dt} = p_{s1}^{(1)} x_1 + \ldots + p_{sn}^{(1)} x_n \qquad (s = 1, \ldots, n) \tag{2_1}$$

$$\frac{dx_s}{dt} = p_{s1}^{(2)} x_1 + \ldots + p_{sn}^{(2)} x_n \qquad (s = 1, \ldots, n) \tag{2_2}$$

имеют вид (2).

Покажем, что

$$p_{sj}^{(2)} - p_{sj}^{(1)} = \varphi_{sj}(t) \to 0 \qquad \text{при} \quad t \to \infty$$

Действительно,

$$p_{sj}^{(2)} - p_{sj}^{(1)} = \left[\frac{\partial Y_s}{\partial y_j}\right]_{y_i = y_{i2}(t)} - \left[\frac{\partial Y_s}{\partial y_j}\right]_{y_i = y_{i1}(t)} = \varphi_{sj}(t) \to 0 \qquad \text{при} \quad t \to \infty$$

$$(i, s, j = 1, \ldots, n)$$

а так как разности значений аргументов стремятся по условию со временем к нулю, самые производные равномерно непрерывны вдоль решений. Действительно, вторые частные производные от правых частей по переменным будут ограничены вдоль тех же решений, так как они с точностью до постоянного множителя совпадают с коэффициентами при $x_i x_j$ в правых частях уравнений (1_1) и (1_2), по условию ограниченными.

4°. Пусть система (2_1) для движения $y_{j1}(t)$ правильная, ее характеристичные числа устойчивы, а $x_j(t)$ — какое-либо исчезающее решение системы (1_1).

Следствие 2. Если характеристичные числа системы 2_1 все положительны, то движение $y_{j2}(t) = y_{j1}(t) + x_j(t)$ будет асимптотически устойчивым по следующим причинам.

а) В силу лемм 2 и 1 система (2_2) будет правильной.

б) В силу предложенной устойчивости характеристичных чисел и леммы 2 все характеристичные числа системы (2_2) будут положительны. Отсюда можно по теореме Ляпунова [1] заключить, что движение $y_{j2}(t)$ будет асимптотически устойчиво.

Следствие 3. Если среди характеристичных чисел системы (2_1) найдется хотя бы одно отрицательное, то можно в силу теоремы Н. Г. Четаева [2] заключить, что движение $y_{2j}(t)$ будет неустойчивым. Рассуждения в этом случае проводятся аналогично.

Следствие 4. Если

$$X\left[\exp \int_0^t \sum_{s=1}^n p_{ss}\, dt\right] \leqslant 0$$

то не существует устойчивого движения, для которого система (1_1) имеет решением систему функций $x_j(t)$, обладающую положительным характеристичным числом.

Действительно, допустив противное, мы придем к выводу, что по теореме из 3° система (2_1) будет обладать положительным характеристичным числом, а следовательно, и отрицательным т. е. движение будет неустойчиво в силу теоремы Н. Г. Четаева [2].

5°. В. А. Стеклов [4] показал, что движение тяжелого, твердого тела вокруг неподвижной точки при условиях

$$B = 2A, \qquad x_0 = r_0 = 0, \qquad R = 2Aq_0$$
$$1 + 2n < 0, \qquad r = 0, \qquad q = q_0$$

(где R — константа площадей остальные обозначения обычны) выражается следующими функциями времени:

$$\begin{aligned} r &= 0, & \gamma_1 &= \frac{2\alpha}{e^{\alpha n q_0 (t+\tau)} + e^{-\alpha n q_0 (t+\tau)}} \\ q &= q_0, & \gamma_2 &= 1 + n\gamma_1^2 \\ p &= m\gamma_1, & \gamma_3 &= (2n-1)\gamma_1^2 - n^2\gamma_1^4 \end{aligned} \tag{12}$$

Здесь m, n, α — некоторые определенные положительные постоянные. Разность между этим решением и перманентным вращением

$$\begin{aligned} p &= p_0 = 0 & \gamma_1 &= \gamma_{10} = 0 \\ q &= q_0 > 0 & \gamma_2 &= \gamma_{20} = 1 \\ r &= r_0 = 0 & \gamma_3 &= \gamma_{30} = 0 \end{aligned} \tag{13}$$

имеет вид

$$\begin{aligned} x_1 &= p - p_0 = m\gamma_1 & x_3 &= \gamma_1 - \gamma_{10} = \frac{2\alpha}{e^{\alpha n q_0 (t+\tau)} + e^{-\alpha n q_0 (t-\tau)}} \\ x_2 &= q - q_0 = 0 & x_4 &= \gamma_2 - \gamma_{20} = n\gamma_1^2 \\ x_3 &= r - r_0 = 0 & x_5 &= \gamma_3 - \gamma_{30} = (2n-1)\gamma_1^2 - n^2\gamma_1^4 \end{aligned}$$

Она представляет систему функций, обладающих положительным характеристичным числом $\alpha n q_0 > 0$, и является исчезающим решением системы уравнений возмущенного движения для движения (13).

Система (2) для этого движения имеет постоянные p_{sj} и, следовательно, правильна и имеет устойчивые по теореме К. П. Персидского [3] характеристичные числа. Кроме того, $p_{11} + \ldots + p_{66} = 0$ для системы (2).

Применяя следствие (4), заключаем, что переменное вращение неустойчиво. В силу следствия (3) неустойчиво и само движение (12). Наличие отрицательного характеристичного числа у системы (2) подтверждается непосредственным вычислением.

Поступила 22 XII 1954.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ляпунов А. М. Общая задача об устойчивости движения. Гос. изд. техн.-теор. лит-ры, 1950.
2. Четаев Н. Г. Устойчивость движения. ОГИЗ, Гостехиздат, 1946.
3. Персидский К. П. О характеристичных числах дифференциальных уравнений. Изв. АН Казахской ССР, сер. мат. и мех., вып. 1, 1947.
4. Стеклов В. А. «Об одном случае движения тяжелого твердого тела, имеющего неподвижную точку». 1896.