Прикладная математика и механика. Том XIX, 1955
Институт механики Академии наук Союза ССР

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ НЕУСТАНОВИВШИХСЯ ДВИЖЕНИЙ В ОДНОМ СПЕЦИАЛЬНОМ СЛУЧАЕ

В. М. Старжинский

(Москва)

При исследовании устойчивости периодических режимов некоторых систем автоматического регулирования уравнения возмущенного движения имеют вид:

$$\frac{d^n x}{d\tau^n} + a_1 \frac{d^{n-1} x}{d\tau^{n-1}} + \ldots + a_{n-1} \frac{dx}{d\tau} + a_n(\tau)\, x = 0$$

где $a_1, \ldots, a_{n-1}$ — положительные постоянные, а $a_n(\tau)$ — неотрицательная периодическая функция времени τ, причем существенно то, что функция $a_n(\tau)$ имеет нули. Введением безразмерного времени

$$t = T\tau \qquad \left(T = \sqrt[n-1]{a_{n-1}}\right)$$

уравнение приведется к виду

$$\frac{d^n x}{dt^n} + \frac{a_1}{T} \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + \ldots + \frac{a_{n-2}}{T^{n-2}} \frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{dx}{dt} + a(t)\, x = 0$$

$$\left(a(t) = \frac{1}{T^n} a_n\left(\frac{t}{T}\right)\right) \tag{0.1}$$

при этом, расширяя несколько постановку задачи, не требуем периодичности функции $a(t)$, а будем предполагать, что $a(t)$ — неотрицательная кусочно-непрерывная функция, ограниченная сверху для всех значений $t > t_0$.

А. М. Ляпунов [1] и Н. Г. Четаев [2] при исследовании устойчивости неустановившихся движений рассматривали знакоопределенные квадратичные формы с постоянными коэффициентами, полная производная по времени от которых, взятая в силу дифференциальных уравнений, представляла знакопостоянную (или, более того, знакоопределенную) функцию противоположного знака. Этот метод был применен в работах Ш. С. Нугмановой [3] и М. А. Айзермана [4]. В настоящей статье также используется второй метод Ляпунова для получения достаточных условий устойчивости по Ляпунову тривиального решения уравнения (0.1) для $n = 3$ и 4.

При $n = 2$ уравнение (0.1) может быть записано в виде

$$\ddot{x} + \dot{x} + q(t)\, x = 0 \qquad (0 \leqslant q(t) \leqslant M) \tag{0.2}$$

В статье [5] показано, что при $M \leqslant 1$ тривиальное решение уравнения (0.2) устойчиво. При этом граница сверху для M не может быть увеличена, если за функцию V Ляпунова принимается квадратичная форма переменных x и $\dot{x}$ с постоянными коэффициентами. Исследованию устойчивости тривиального решения уравнения (0.2) посвящена многочисленная литература; мы указали условие $M \leqslant 1$, поскольку аналогичное условие будет фигурировать в числе достаточных условий устойчивости при $n = 3$ и 4.

§ 1. При $n = 3$ запишем уравнение (0.1) в виде

$$\dddot{x} + p\ddot{x} + \dot{x} + r(t)\, x = 0 \qquad (p > 0,\ 0 \leqslant r(t) \leqslant N) \tag{1.1}$$

В статье [6] рассматривалось линейное уравнение третьего порядка с тремя переменными коэффициентами, при этом заменой независимого переменного коэффициент при x был сделан равным единице. Поскольку в уравнении (1.1) противоположный в этом смысле случай, то мы исследуем его отдельно.

Заменим уравнение (1.1) системой

$$\dot{x} = y, \qquad \dot{y} = z, \qquad \dot{z} = -r(t)\,x - y - pz$$

Зададимся определенно положительной квадратичной формой V переменных x, y, z с постоянными коэффициентами

$$V = Ax^2 + (B-1)\,y^2 + Cz^2 + 2Exy + 2xz + 2Gyz$$

Производная V в силу исходной системы уравнений имеет вид:

$$\begin{gathered}\dot{V} = -2\,\{r(t)\,x^2 + (G-E)\,y^2 + (pC-G)\,z^2 + \\ + [Gr(t) - A + 1]\,xy + [Cr(t) - E + p]\,xz + (pG + C - B)\,yz\}\end{gathered}$$

Выпишем матрицу коэффициентов квадратичной формы $(-\dot{V})$

$$\left\|\begin{matrix} 2r(t) & Gr(t) - A + 1 & Cr(t) - E + p \\ Gr(t) - A + 1 & 2G - 2E & pG + C - B \\ Cr(t) - E + p & pG + C - B & 2pC - 2G \end{matrix}\right\|$$

Для того чтобы квадратичная форма $\dot{V}$ была неположительной, необходимо и достаточно, чтобы все главные миноры этой матрицы были неотрицательны [7]. Выпишем условия неотрицательности минора последнего диагонального элемента матрицы и определителя матрицы:

$$G^2r^2(t) - 2\,(AG - 2E + G)\,r(t) + (A-1)^2 \leqslant 0 \tag{1.2}$$

$$b_{22}r^2(t) + 2\,(pb_{12} + b_2)\,r(t) + p^2b_{11} + 2pb_1 + b_3 \leqslant 0 \tag{1.3}$$

где

$$b_{11} = 2\,(AG - E), \quad b_{12} = -ACG - BG + 2CE + EG^2$$

$$b_{22} = 2\,(BCG - C^2E - G^3), \quad b_1 = (A-1)\,(AC - B - EG) - 2E\,(G - E)$$

$$b_2 = -ABC + AC^2 + 2AG^2 + B^2 - BC - BEG + 2CE^2 - CEG - 4EG + 2G^2$$

$$b_3 = 2\,(A-1)\,(-AG + BE - CE + G) + 2E^2\,(G - E)$$

Условие (1.2) означает, что

$$\begin{gathered}(AG - E) + (G - E) - 2\sqrt{(AG - E)(G - E)} \leqslant G^2r(t) \leqslant (AG - E) + \\ + (G - E) + 2\sqrt{(AG - E)(G - E)}\end{gathered}$$

и при этом $AG - E$ и $G - E$ должны быть положительны. Левая часть первого из неравенств неотрицательна и обращается в нуль только при $A = 1$, что мы и должны предположить в дальнейшем, поскольку $r(t) \geqslant 0$.

Теперь условие (1.2) свелось к условию

$$G^2r(t) \leqslant 4\,(G - E) \tag{1.4}$$

Переходя к условию (1.3), положим $b_1 = -pb_{11}$ и $b_{12} = 0$, т. е. учитывая $A = 1$,

$$E = p, \qquad B = -C + 2p\frac{C}{G} + pG \tag{1.5}$$

что позволит выразить условие (1.3) в виде

$$\frac{1}{G^2} b_{22} r(t) [G^2 r(t) - 4(G-p)] \leqslant 0$$

и в силу (1.4′) сводит условие (1.3) к условию

$$\frac{1}{2} b_{22} \equiv -(G-p) C^2 + (pC - G) G^2 \geqslant 0 \qquad (1.6)$$

Заметим, что если рассматривать условие (1.3) в плоскости pr, то предположения (1.5) означают, что абсцисса центра кривой равна p и главные оси кривой параллельны осям координат.

Поскольку $r(t) \leqslant N$ и $E = p$, то условие (1.4) выполнено при $G^2 N \leqslant 4(G-p)$.

Последнее неравенство означает, что

$$2\frac{1-\sqrt{1-pN}}{N} \leqslant G \leqslant 2\frac{1+\sqrt{1-pN}}{N}$$

при условии $pN \leqslant 1$, что и будем предполагать выполненным в дальнейшем. Обозначим

$$\nu = \sqrt{1-pN} \qquad (0 \leqslant \nu < 1)$$

и запишем неравенства для G в виде

$$G = 2pg, \qquad \frac{1}{1+\nu} \leqslant g \leqslant \frac{1}{1-\nu} \qquad (1.7')$$

Отсюда видно, что $g > \frac{1}{2}$. При этом условие (1.6) запишется в виде $4p^2(C-2g)g^2 \geqslant (2g-1)C^2$, и поскольку справа положительная величина, то должны принять, что $C > 2g$, и получим границу снизу для p^2:

$$p^2 \geqslant \frac{(2g-1)C^2}{4g^2(C-2g)} \qquad (1.8)$$

Определим теперь наименьшее значение правой части неравенства (1.8). Пусть

$$F(C) = \frac{2g-1}{4g^2}\frac{C^2}{C-2g} \qquad (C > 2g)$$

Поскольку $F'(C) = 0$ только при $C = 4g$ и $F(2g) = F(\infty) = \infty$, то имеем

$$[F(C)]_{\text{наим}} = 4 - \frac{2}{g}$$

и теперь мы вправе принять для g наименьшее значение согласно (1.7), т. е. $g = 1/(1+\nu)$. Тогда условие (1.8) означает, что

$$p^2 \geqslant 4 - \frac{2}{g} = 2(1-\nu) \qquad (1.9)$$

и, подставляя выражение для ν, запишем это условие в виде

$$2\sqrt{1-pN} \geqslant 2 - p^2$$

Если $p \geqslant \sqrt{2}$, то это условие выполнено и единственным условием, оставшимся от условий (1.2) и (1.3), является условие $pN \leqslant 1$, т. е.

$$N \leqslant \frac{1}{p} \qquad (p \geqslant \sqrt{2}) \qquad (1.10)$$

Если $p \leqslant \sqrt{2}$, то, возводя обе части неравенства в квадрат, получим

$$N \leqslant p - \tfrac{1}{4} p^3 \qquad (p \leqslant \sqrt{2}) \tag{1.11}$$

и при этом неравенство $pN \leqslant 1$ выполняется, поскольку, очевидно,

$$p - \tfrac{1}{4} p^3 \leqslant \frac{1}{p}$$

Покажем, что условия (1.10) и (1.11) достаточны для неположительности $\dot{V}$. Напишем матрицу коэффициентов квадратичной формы $(-\dot{V})$, учитывая равенства $A = 1$ и $C = 4g$, а также (1.5) и (1.7):

$$\begin{Vmatrix} 2r(t) & 2pgr(t) & 4gr(t) \\ 2pgr(t) & 2p(2g-1) & 4(2g-1) \\ 4gr(t) & 4(2g-1) & 4pg \end{Vmatrix}$$

Очевидно, диагональные элементы матрицы неотрицательны. Остается проверить неотрицательность миноров первого и второго диагональных элементов матрицы; имеем $M_{11} = 8p^2g(2g-1) - 16(2g-1)^2 \geqslant 0$ в силу (1.8)

$$M_{22} = 8pgr(t) - 16g^2r^2(t)$$

и для его неотрицательности достаточно, чтобы

$$N \leqslant \frac{p}{2g} = \frac{1}{2} p(1+\nu) \qquad \text{или} \qquad 2N - p \leqslant p\sqrt{1-pN}$$

Если $N \leqslant \frac{1}{2} p$, то неравенство выполнено, если же имеем $N \geqslant \frac{1}{2} p$, то, возводя последнее неравенство в квадрат, получим, что для неотрицательности M_{22} достаточно, чтобы

$$N \leqslant p - \tfrac{1}{4} p^3$$

Поскольку при условии $pN \leqslant 1$ неравенство $N \geqslant \frac{1}{2} p$ возможно лишь для $p \leqslant \sqrt{2}$, то последнее неравенство есть не что иное, как условие (1.11).

Выпишем теперь матрицу коэффициентов квадратичной формы V, опять-таки учитывая, что $A = 1$, $C = 4g$ и (1.5), (1.7):

$$\begin{Vmatrix} 1 & p & 1 \\ p & 2p^2g - 4g + 3 & 2pg \\ 1 & 2pg & 4g \end{Vmatrix}$$

Поскольку $4g > 1$, то для того чтобы V была определенно положительной, необходимо и достаточно, чтобы определитель этой матрицы был положителен:

$$2p^2g(2g-1) - 16g^2 + 16g - 3 > 0 \qquad \text{или} \qquad p^2 > \frac{16g^2 - 16g + 3}{2g(2g-1)}$$

Правая часть последнего неравенства меньше правой части неравенства (1.9), следовательно, при выполнении условий (1.10) или (1.11′) квадратичная форма V является определенно положительной.

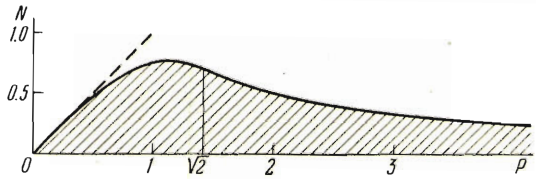
Итак, по теореме Ляпунова об устойчивости тривиальное решение уравнения (1.1) устойчиво, когда

$$N \leqslant \begin{cases} p - \dfrac{1}{4} p^3, & \text{если } 0 < p \leqslant \sqrt{2} \\[2mm] \dfrac{1}{p}, & \text{если } p \geqslant \sqrt{2} \end{cases} \tag{1.12}$$

Область устойчивости в плоскости pN заштрихована на фиг. 1. Кривые

$$N = p - \frac{1}{4} p^3 \text{ и } N = \frac{1}{p}$$

соприкасаются в точке $p = \sqrt{2}$. Пунктирной линией показана граница



Фиг. 1

асимптотической устойчивости по Раузу-Гурвицу ($N = p$) для тривиального решения уравнения

$$\dddot{x} + p\ddot{x} + \dot{x} + Nx = 0 \qquad (p > 0,\ N > 0)$$

§ 2. При $n = 4$ запишем уравнение (0.1) в виде

$$\ddddot{x} + p\dddot{x} + q\ddot{x} + \dot{x} + s(t)\, x = 0 \quad (p > 0,\ q > 0,\ 0 \leqslant s(t) \leqslant \Sigma) \qquad (2.1)$$

или в виде системы

$$\dot{x} = y, \qquad \dot{y} = z, \qquad \dot{z} = u, \qquad \dot{u} = -s(t)\, x - y - qz - pu$$

Зададимся определенно положительной квадратичной формой V переменных x, y, z, u с постоянными коэффициентами

$$V = x^2 + \left(\frac{1-h}{h} J + 2q^2h - p\right) y^2 + \left(-\frac{2h-1}{2qh^2} DJ + qD + pJ - 2qh\right) z^2 +$$
$$+ Du^2 + 2qxy + 2pxz + 2xu + 2\left(\frac{1-h}{h} D + 2pqh - 1\right) yz + 4qhyu + 2Jzu$$

Производная V в силу исходной системы уравнений имеет вид:

$$\dot{V} = -2\Big[s(t)\, x^2 + q(2h-1)\, y^2 + \left(-\frac{1-h}{h} D + qJ - 2pqh + 1\right) z^2 +$$
$$+ (pD - J)\, u^2 + 2qhs(t)\, xy + Js(t)\, xz + Ds(t)\, xu +$$
$$+ \frac{2h-1}{h} Jyz + \frac{2h-1}{h} Dyu + \frac{2h-1}{2qh^2} DJzu\Big]$$

Выпишем матрицу коэффициентов квадратичной формы $(-\dot{V})$

$$\left\|\begin{matrix} 2s(t) & 2qhs(t) & Js(t) & Ds(t) \\ 2qhs(t) & 2q(2h-1) & \dfrac{2h-1}{h} J & \dfrac{2h-1}{h} D \\ Js(t) & \dfrac{2h-1}{h} J & 2\Gamma & \dfrac{2h-1}{2qh^2} DJ \\ Ds(t) & \dfrac{2h-1}{h} D & \dfrac{2h-1}{2qh^2} DJ & 2(pD - J) \end{matrix}\right\|$$

где для сокращения записи обозначено

$$\Gamma = -\frac{1-h}{h} D + qJ - 2pqh + 1$$

Вычислим последовательные главные диагональные миноры матрицы $M_1 = 2s(t)$, M_2, M_3 и определитель матрицы

$$M_2 = 4q\,[2h - 1 - qh^2 s(t)]\, s(t)$$

$$M_3 = \left(-\frac{2h-1}{2qh^2} J^2 - 2\frac{1-h}{h} D + 2qJ - 4pqh + 2\right) M_2$$

$$\det\|-\dot{V}\| = \left(-\frac{2h-1}{2qh^2} D^2 + 2pD - 2J\right) M_3$$

Для того чтобы квадратичная форма $\dot{V}$ была неположительной, необходимыми условиями являются неотрицательность M_2, M_3 и $\det\|-\dot{V}\|$. Начнем с условия $M_2 \geqslant 0$, которое выполнено, если

$$q\Sigma h^2 - 2h + 1 \leqslant 0 \qquad \text{или} \qquad \frac{1-\sqrt{1-q\Sigma}}{q\Sigma} \leqslant h \leqslant \frac{1+\sqrt{1-q\Sigma}}{q\Sigma}$$

при условии

$$q\Sigma \leqslant 1 \tag{2.2}$$

которое и будем предполагать выполненным в дальнейшем. Обозначим

$$\sigma = \sqrt{1-q\Sigma} \qquad (0 \leqslant \sigma < 1)$$

и запишем неравенства для h в виде

$$\frac{1}{1+\sigma} \leqslant h \leqslant \frac{1}{1+\sigma}$$

Мы выберем для дальнейшего

$$h = \frac{1}{1+\sigma} \tag{2.3}$$

Таким образом, условие $M_2 \geqslant 0$ свелось к условиям (2.2) и (2.3). Предполагая условие $M_3 \geqslant 0$ выполненным и замечая, что

$$\frac{2h-1}{h^2} = q\Sigma$$

запишем условие $\det\|-\dot{V}\| \geqslant 0$ в виде

$$p \geqslant \frac{1}{4}\Sigma D + \frac{J}{D}$$

Минимум правой части, рассматриваемой как функция D, достигается при

$$D = 2\sqrt{\frac{J}{\Sigma}}$$

и при этом последнее неравенство примет вид:

$$p \geqslant \sqrt{\Sigma J}$$

Потребуем, чтобы это неравенство выполнялось со знаком равенства, т. е.

$$J = \frac{1}{\Sigma} p^2, \qquad D = \frac{2}{\Sigma} p \tag{2.4}$$

Заметим, что формулы (2.4) означают, что

$$-\frac{2h-1}{2qh^2} D^2 + 2pD - 2J = 0$$

и, следовательно, $\det\|-\dot{V}\| \equiv 0$.

Вернемся теперь к условию $M_3 \geqslant 0$. В силу (2.3) и (2.4) оно может быть записано в виде

$$\frac{1}{2\Sigma}(-p^4+4p^2q-8p+4\Sigma)\geqslant 0 \tag{2.5}$$

Таким образом, при формулах (2.3) и (2.4) необходимые условия неположительности $\dot{V}$ свелись к условиям (2.2) и (2.5). Покажем, что эти условия достаточны. Используя (2.4), запишем $-\frac{1}{2}\dot{V}$ в виде

$$-\frac{1}{2}\dot{V}=s(t)x^2+(2h-1)qy^2+\left(\frac{1}{\Sigma}p^2q-2hpq-2\frac{1-h}{h\Sigma}p+1\right)z^2+$$
$$+\frac{1}{\Sigma}p^2u^2+2hqs(t)xy+\frac{1}{\Sigma}p^2s(t)xz+\frac{2}{\Sigma}ps(t)xu+$$
$$+\frac{2h-1}{h\Sigma}p^2yz+2\frac{2h-1}{h\Sigma}pyu+\frac{1}{\Sigma}p^3zu$$

и выполним, следуя методу Лагранжа приведения квадратичной формы к сумме квадратов, замену переменных:

$$x=v-hqw,\qquad y=w-\frac{1}{2hq\Sigma}p^2z-\frac{1}{hq\Sigma}pu$$

Получим, учитывая (2.3):

$$-\frac{1}{2}\dot{V}=s(t)v^2+q\,[2h-1-h^2qs(t)]\,w^2+\frac{1}{4\Sigma}(-p^4+4p^2q-8p+4\Sigma)\,z^2$$

что и подтверждает достаточность условий (2.2) и (2.5).

Перейдем к анализу условий (2.2) и (2.5). Запишем условие (2.5) в виде

$$\Sigma\geqslant\left(\tfrac{1}{4}p^3-pq+2\right)p$$

Условие (2.5) заведомо выполнено, если правая часть неравенства неположительна, т. е. если $q\geqslant q_0$, где

$$q_0=\frac{1}{4}p^2+\frac{2}{p}$$

Зафиксируем p и найдем точки пересечения $\bar{q}$ кривой $q\Sigma=1$ и прямой

$$\Sigma=\left(\frac{1}{4}p^3-pq+2\right)p$$

будем иметь

$$\bar{q}_1=\frac{1}{8p}\left(p^3+8-\sqrt{p^6+16p^3}\right),\qquad \bar{q}_2=\frac{1}{8p}\left(p^3+8+\sqrt{p^6+16p^3}\right)$$

Найдем теперь точку пересечения $\overline{Q}$ кривой $q\Sigma=1$ с прямой

$$\Sigma=\frac{pq-1}{p^2} \tag{2.6}$$

являющейся границей области асимптотической устойчивости по Раузу-Гурвицу для тривиального решения уравнения

$$\overset{....}{x}+p\dddot{x}+q\ddot{x}+\dot{x}+\Sigma x=0\qquad (p>0,\ q>0,\ \Sigma>0) \tag{2.7}$$

будем иметь

$$\overline{Q}=\frac{1}{2p}\left(1+\sqrt{4p^3+1}\right)$$

Можно показать, что при любом $p > 0$ выполнены неравенства

$$\bar{q}_1 < \bar{Q} \leqslant \bar{q}_2 < q_0$$

причем знак равенства имеет место только при $p = \sqrt[3]{2}$.

Учитывая последние неравенства, мы из двусвязной области, определяемой неравенствами (2.2) и (2.5), будем в дальнейшем рассматривать только ту из двух ее частей, которая не выходит за пределы области устойчивости тривиального решения уравнения (2.7), т. е. сведем условия (2.2) и (2.5) к условиям

$$\begin{aligned} p\left(\tfrac{1}{4}p^3 - pq + 2\right) \leqslant \Sigma \leqslant \frac{1}{q} \quad &\text{если} \quad \bar{q}_2 \leqslant q \leqslant q_0 \\ \Sigma \leqslant \frac{1}{q} \quad &\text{если} \quad q \geqslant q_0 \end{aligned} \tag{2.8}$$

которые и будем предполагать в дальнейшем выполненными. При этом будем иметь, что

$$\frac{p}{\Sigma} \geqslant p\bar{q}_2 > 1 \tag{2.9}$$

Заметим, что $\bar{q}_2 \geqslant \sqrt[3]{4}$ и знак равенства будет только при $p = \sqrt[3]{2}$.

Покажем теперь, что при условиях (2.8) квадратичная форма V действительно является определенно положительной. Выпишем матрицу ее коэффициентов, учитывая (2.3) и (2.4):

$$\begin{Vmatrix} 1 & q & p & 1 \\ q & \frac{\sigma}{\Sigma}p^2 - p + 2\frac{1-\sigma}{\Sigma}q & \frac{2}{\Sigma}p - 1 & 2\frac{1-\sigma}{\Sigma} \\ p & \frac{2}{\Sigma}p - 1 & \frac{2}{\Sigma}pq - 2\frac{1-\sigma}{\Sigma} & \frac{1}{\Sigma}p^2 \\ 1 & 2\frac{1-\sigma}{\Sigma} & \frac{1}{\Sigma}p^2 & \frac{2}{\Sigma}p \end{Vmatrix}$$

Запишем последовательность главных миноров матрицы в следующем порядке

$$1, \qquad \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & \frac{2}{\Sigma}p \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} 1 & p & 1 \\ p & \frac{2}{\Sigma}pq - 2\frac{1-\sigma}{\Sigma} & \frac{1}{\Sigma}p^2 \\ 1 & \frac{1}{\Sigma}p^2 & \frac{2}{\Sigma}p \end{vmatrix}$$

и, наконец, определитель матрицы. Заметим, что из введенного нами обозначения следует

$$\Sigma = \frac{1-\sigma^2}{q}$$

и после вычислений получим следующие три условия положительности квадратичной формы V

$$\frac{p}{\Sigma} > \frac{1}{2}$$

$$-p^4q + 4p^2q^2 - (6 - 4\sigma - 2\sigma^2)pq + 2(1-\sigma)(1-\sigma^2) > 0$$

$$-\sigma p^6q^3 + [4\sigma - (1-\sigma)^2]p^4q^4 + (1-\sigma^2)p^5q^2 + 4(1-\sigma)^2p^2q^5 -$$
$$-(4 + 10\sigma - 8\sigma^2 + 2\sigma^3)p^3q^3 - 8(1-\sigma)^3pq^4 + (1-\sigma^2)(8 + 2\sigma + 2\sigma^2)p^2q^2 +$$
$$+ 4(1-\sigma)^4q^3 - 2(1-\sigma^2)^2(2+\sigma)pq + (1-\sigma^2)^3 > 0$$

Первое из условий выполнено в силу (2.9). Запишем второе в виде

$$[-p^4q + 4p^2q^2 - 8pq + 4(1-\sigma^2)] + 2(1+\sigma)^2(pq - 1 + \sigma) > 0$$

Выражение в квадратных скобках неотрицательно в силу (2.5), а второе слагаемое положительно благодаря (2.9), следовательно, и второе условие выполнено. Запишем третье условие в виде

$$\left\{\sigma p^2q^2 + (1-\sigma)^2q^3 - (1-\sigma^2)pq + 2\sigma(1-\sigma)^2\frac{q^2}{p} + 2\sigma(1-\sigma)(1-\sigma^2)\frac{q}{p^2} + \right.$$
$$\left. + 2\sigma(1-\sigma^2)^2\frac{1}{p^3}\right\}[-p^4q + 4p^2q^2 - 8pq + 4(1-\sigma^2)] +$$
$$+ (1+\sigma)(1-\sigma^2)^2[(1-\sigma)p^3 + 8\sigma(pq - 1 + \sigma)]\frac{1}{p^3} > 0$$

Поскольку второе слагаемое положительно, то неравенство выполнено, если выражение в фигурных скобках неотрицательно; рассмотрим три первых члена этого выражения. Допустим сначала, что $p \geqslant 2^{1/3}$ тогда $p\bar{q}_2 \geqslant 2 \geqslant 2(1-\sigma)$ и, следовательно,

$$\sigma p^2q^2 \geqslant 2\sigma(1-\sigma)pq$$

$$\sigma p^2q^2 + (1-\sigma)^2q^3 - (1-\sigma^2)pq \geqslant (1-\sigma)^2(q^2 - p)q$$

Последнее выражение положительно, так как

$$\bar{q}_2 > \frac{1}{4}p^2 + \frac{1}{p}, \qquad \bar{q}_2^{\,2} > \frac{1}{2}p + \frac{1}{16}p^4 + \frac{1}{p^2} \geqslant p$$

Допустим теперь, что $p < \sqrt[3]{2}$. В силу (2.9) будем иметь

$$\sigma p^2q^2 + (1-\sigma)^2q^3 - (1-\sigma^2)pq > (1-\sigma)^2q^3 - (1 - \sigma - \sigma^2)pq >$$
$$> \sqrt[3]{2}(3\sigma^2 - 3\sigma + 1)q$$

поскольку $q \geqslant \bar{q} > \sqrt[3]{4}$. Очевидно, последнее выражение положительно.

Итак, при условиях (2.8) квадратичная форма V является определенно положительной. Следовательно, тривиальное решение (2.1) уравнения устойчиво, когда выполнены условия $(p > 0)$

$$\left(\tfrac{1}{4}p^3 - pq + 2\right)p \leqslant \Sigma \leqslant \frac{1}{q}, \text{ если } \frac{1}{8p}\left(p^3 + 8 + \sqrt{p^6 + 16p^3}\right) \leqslant q \leqslant \frac{1}{4}p^2 + \frac{2}{p}$$
$$\Sigma \leqslant \frac{1}{q}, \text{ если } q > \frac{1}{4}p^2 + \frac{2}{p} \qquad (2.10)$$

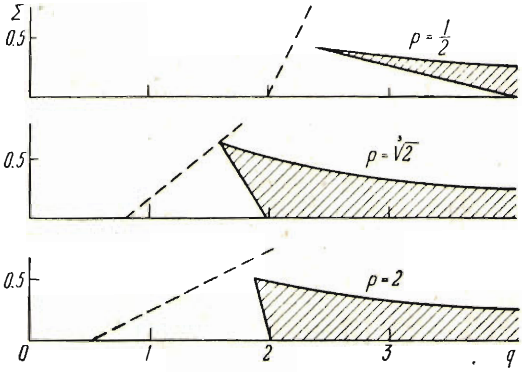
При

$$q < \frac{1}{8p}(p^3 + 8 + \sqrt{p^6 + 16p^3})$$

сформулированные достаточные условия устойчивости отказывают. Поскольку наименьшая величина правой части последнего неравенства достигается при $p = 2^{1/3}$ и равна $4^{1/3}$, то при

$$q < 1.587 \quad \text{или} \quad \Sigma > 0.630$$

указанные условия заведомо отказывают.



Фиг. 2

Области устойчивости в плоскости $q\Sigma$ при $p = \frac{1}{2}$, $p = 2^{1/3}$ (когда область устойчивости наибольшая) и при $p = 2$ заштрихованы на фиг. 2. Пунктирной линией показана граница асимптотической устойчивости (2.6) для тривиального решения уравнения (2.7).

Поступила 18 III 1955

ЛИТЕРАТУРА

1. Ляпунов А. М. Общая задача об устойчивости движения. Харьков, 1892.
2. Четаев Н. Г. Устойчивость движения. Гостехиздат, 1946.
3. Нугманова Ш. Об устойчивости периодических движений. ДАН СССР, т. XLII, № 5, 1944.
4. Айзерман М. А. Достаточное условие устойчивости одного класса динамических систем с переменными параметрами. ПММ, т. XV, вып. 3, 1951.
5. Старжинский В. М. Достаточные условия устойчивости одной механической системы с одной степенью свободы. ПММ, т. XVI, вып. 3, 1952.
6. Старжинский В. М. Об устойчивости неустановившихся движений в одном случае. ПММ, т. XVI, вып. 4, 1952.
7. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. ГИТТЛ, 1953.