Прикладная математика и механика. Том XIX, 1955
Институт механики Академии наук Союза ССР

О ПЕРВОЙ ВАРИАЦИИ РЕШЕНИЯ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ТЕОРИИ ПОТЕНЦИАЛА ПРИ ВАРИАЦИИ ГРАНИЧНОЙ ПОВЕРХНОСТИ

В. А. Кронберг

(Одесса)

Ниже доказывается, что первая вариация решения краевой задачи теории потенциала является линейным функциональным оператором над функцией η, преобразующей первоначальную поверхность, зависящим в общем случае от свободного члена интегрального уравнения данной краевой задачи.

Рассуждения проводятся в общем виде для внешней задачи Неймана. Упрощения, получаемые для задачи Дирихле, будут очевидны. Путь решения задачи указан М. Г. Крейном.

§ 1. Пусть известно решение внешней задачи Неймана для некоторой граничной поверхности S, удовлетворяющей условиям Ляпунова. Представим это решение в виде потенциала простого слоя плотности γ, распределенного по поверхности S:

$$\varphi(p) = \int\limits_S L(p, q)\gamma(q)\,dq \tag{1.1}$$

Здесь, как известно, $\gamma(p)$ — плотность особенностей, распределенных по граничной поверхности, а ядро $L(p, q)$ зависит от вида граничной поверхности и имеет порядок r^{-1}, где $r = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2}$.

В выражении (1.1), как и в дальнейшем, для краткости записи совокупность переменных x, y, z обозначена через p, а совокупность переменных ξ, η, ζ — через q.

Плотность особенностей $\gamma(p)$ определяется из интегрального уравнения

$$\gamma(p) = \int\limits_S K(p, q)\gamma(q)\,dq + F(p) \tag{1.2}$$

представляющего собой запись граничного условия задачи на поверхности S. Ядро $K(p, q)$, как известно, имеет порядок r^{-2}.

Соответствующее представление решения краевой задачи Дирихле выберем в форме потенциала двойного слоя:

$$\varphi(p) = \int\limits_S K_1(p, q)\mu(q)\,dq$$

где $K_1(p, q)$ — ядро порядка r^{-2}, зависящее от вида граничной поверхности, а $\mu(p)$ — плотность особенностей, распределенных по граничной поверхности, определяемая из интегрального уравнения, аналогичного уравнению (1.2) для задачи Неймана.

Пусть далее $R(p,\ q)$ есть резольвента ядра $K(p,\ q)$ и, таким образом,

$$\gamma(p) = F(p) + \int\limits_S R(p,q) F(q)\, dq$$

Подставляя это выражение для $\gamma(p)$ в формулу (1.1) для $\varphi(p)$, получим

$$\varphi(p) = \int\limits_S L(p,q) \left[F(q) + \int\limits_S R(q,r)\ F(r)\, dr\right] dq$$

или

$$\varphi(p) = \int\limits_S \left[L(p,q) + \int\limits_S L(p,\ r)\, R(r,q)\, dr\right] F(q)\, dq$$

По определению выражение в квадратных скобках, стоящее под знаком интеграла в последней формуле, является функцией Грина рассматриваемой задачи:

$$G(p,q) = L(p,q) + \int\limits_S L(p,r)\, R(r,q)\, dr \tag{1.3}$$

и, следовательно,

$$\varphi(p) = \int\limits_S G(p,q)\, F(q)\, dq$$

§ 2. Введем на поверхности S криволинейные координаты $u,\ v$ и обозначим через $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u,\ v)$ радиус-вектор точки поверхности.

Построим далее варьированную поверхность S^* следующим образом:

$$\mathbf{r}^*(u,v;\varepsilon) = \mathbf{r}(u,v) + \varepsilon\eta(u,v)\,\mathbf{n} \tag{2.1}$$

где ε — малая величина, $\eta(u,\ v)$ — некоторая функция, удовлетворяющая требуемым условиям непрерывности и дифференцируемости, $\mathbf{n}$ — орт внешней нормали к поверхности S.

Прежде чем перейти к отысканию первой вариации потенциала $\varphi(p)$ при указанном изменении граничной поверхности, приведем некоторые формулы для перехода от поверхности S к поверхности S^*.

В дальнейшем все величины, относящиеся к поверхности S^*, будем отличать знаком *. Частные производные по переменным u и v будем обозначать соответствующими индексами.

Из (2.1) для $d\mathbf{r}^*$ имеем

$$d\mathbf{r}^*(u,v;\ \varepsilon) = d\mathbf{r}(u,v) + \varepsilon\,[\eta(u,v)\, d\mathbf{n} + \mathbf{n}\ d\eta(u,v)]$$

Так как квадрат линейного элемента поверхности ds будет

$$ds^2 = d\mathbf{r}\cdot d\mathbf{r} = E du^2 + 2F du\, dv + G dv^2$$

где E, F и G — коэффициенты первой квадратичной формы поверхности, и $d\mathbf{r}\cdot\mathbf{n} = 0$, то

$$ds^{*2} = d\mathbf{r}^*\cdot d\mathbf{r}^* = ds^2 + 2\varepsilon\eta(u,v)\, d\mathbf{r}^*\cdot d\mathbf{n} + \cdots$$

причем заметим, что $-d\mathbf{r}\cdot d\mathbf{n} = L du^2 + 2M du dv + N dv^2$, где L, M и N — коэффициенты второй квадратичной формы поверхности.

Производные радиуса-вектора $\mathbf{r}^*(u, v; \varepsilon)$ по переменным u и v будут

$$\mathbf{r}_u^* = \mathbf{r}_u + \varepsilon(\eta_u \mathbf{n} + \eta \mathbf{n}_u), \qquad \mathbf{r}_v^* = \mathbf{r}_v + \varepsilon(\eta_v \mathbf{n} + \eta \mathbf{n}_v)$$

Орт нормали к поверхности S^*

$$\mathbf{n}^*(u, v; \varepsilon) = \frac{\mathbf{r}_u^* \times \mathbf{r}_v^*}{|\mathbf{r}_u^* \times \mathbf{r}_v^*|}$$

Замечая, что

$$\mathbf{r}_u^* \times \mathbf{r}_v^* = \mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v + \varepsilon[\eta(\mathbf{r}_u \times \mathbf{n}_v + \mathbf{n}_u \times \mathbf{r}_v) + (\eta_v \mathbf{r}_u - \eta_u \mathbf{r}_v) \times \mathbf{n}] + \cdots$$

$$|\mathbf{r}_u^* \times \mathbf{r}_v^*| = \sqrt{E^* G^* - F^{*2}} =$$

$$= \sqrt{(E - 2\varepsilon\eta L + \cdots)(G - 2\varepsilon\eta N + \cdots) - (F - 2\varepsilon\eta M + \cdots)^2} =$$

$$= \sqrt{EG - F^2}\,(1 - \varepsilon\eta H + \cdots) = |\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|\,(1 - \varepsilon\eta H + \cdots)$$

где

$$H = \frac{EN + GL - 2FM}{EG - F^2}$$

средняя кривизна поверхности S, для нормали $\mathbf{n}^*$ получаем

$$\mathbf{n}^* = \mathbf{n} + \varepsilon\left[\eta H \mathbf{n} + \frac{\eta(\mathbf{r}_u \times \mathbf{n}_v + \mathbf{n}_u \times \mathbf{r}_v) + (\eta_v \mathbf{r}_u - \eta_u \mathbf{r}_v) \times \mathbf{n}}{|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|}\right] + \cdots$$

Если линии $u = \mathrm{const}$ и $v = \mathrm{const}$ — линии кривизны поверхности S, то по формуле Родрига

$$\mathbf{n}_u = -\frac{1}{R_1}\mathbf{r}_u, \qquad \mathbf{n}_v = -\frac{1}{R_2}\mathbf{r}_v$$

где R_1 и R_2 — главные радиусы кривизны, так что

$$\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = H, \qquad \mathbf{r}_u \times \mathbf{n}_v + \mathbf{n}_u \times \mathbf{r}_v = -(\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v) H$$

$$(\eta_v \mathbf{r}_u - \eta_u \mathbf{r}_v) \times \mathbf{n} = -\frac{\eta_u(\mathbf{r}_v \cdot \mathbf{r}_v)\mathbf{r}_u + \eta_v(\mathbf{r}_u \cdot \mathbf{r}_u)\mathbf{r}_v}{|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|}$$

В этом случае

$$\mathbf{n}^* = \mathbf{n} - \varepsilon\frac{\eta_u(\mathbf{r}_v \cdot \mathbf{r}_v)\mathbf{r}_u + \eta_v(\mathbf{r}_u \cdot \mathbf{r}_u)\mathbf{r}_v}{|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|^2} + \cdots \tag{2.2}$$

Заметим, что коэффициент при ε в формуле (2.2) может быть равен нулю для всех точек поверхности только при условии, что одновременно $\eta_u = 0$ и $\eta_v = 0$ для всех точек поверхности или $\eta(u, v) = \mathrm{const}$ для всех точек поверхности, т. е. в том случае, когда варьированная поверхность S^* является поверхностью, параллельной первоначальной поверхности S.

При выполнении этого условия $\mathbf{n}^* = \mathbf{n}$. В общем случае, если в качестве координатных линий приняты линии кривизны поверхности:

$$\mathbf{n}^* = \mathbf{n} + \varepsilon\mathbf{h} + \cdots \qquad \left(\mathbf{h}(u, v) = -\frac{\eta_u(\mathbf{r}_v \cdot \mathbf{r}_v)\mathbf{r}_u + \eta_v(\mathbf{r}_u \cdot \mathbf{r}_u)\mathbf{r}_v}{|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|^2}\right)$$

Очевидно, что вектор $\mathbf{h}$ лежит в касательной плоскости к поверхности S. Из приведенного выражения для вектора $\mathbf{h}$ следует, что $\mathbf{h} = -\operatorname{grad}\eta$ и квадрат модуля $\mathbf{h}$ является дифференциальным параметром (Бельтрами) первого порядка функции η.

Пусть далее Φ есть некоторая функция, заданная на поверхности S и в некоторой ее окрестности. Тогда

$$\frac{\partial\Phi}{\partial n^*} = (\operatorname{grad}\Phi)^*\cdot\mathbf{n}^* = \left(\operatorname{grad}\Phi + \varepsilon\eta\frac{\partial\operatorname{grad}\Phi}{\partial n} + \cdots\right)(\mathbf{n} + \varepsilon\mathbf{h} + \cdots) =$$

$$= \operatorname{grad}\Phi\cdot\mathbf{n} + \varepsilon\left(\eta\frac{\partial\operatorname{grad}\Phi}{\partial n}\cdot\mathbf{n} + \operatorname{grad}\Phi\cdot\mathbf{h}\right) + \cdots$$

или

$$\frac{\partial\Phi}{\partial n^*} = \frac{\partial\Phi}{\partial n} + \varepsilon\left(\eta\frac{\partial^2\Phi}{\partial n^2} + \operatorname{grad}\Phi\cdot\mathbf{h}\right) + \cdots \tag{2.3}$$

В частном случае, когда вектор $\mathbf{h}$ равен нулю:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial n^*} = \frac{\partial\Phi}{\partial n} + \varepsilon\eta\frac{\partial^2\Phi}{\partial n^2} + \cdots \tag{2.4}$$

Это же выражение (2.4) будет справедливо и в том случае, когда поверхность S есть поверхность уровня функции Φ. В этом случае вектор $\operatorname{grad}\Phi$ будет направлен по нормали к поверхности S и, следовательно, скалярное произведение $\operatorname{grad}\Phi$ на $\mathbf{h}$ будет равно нулю.

Отличие, однако, будет в том, что в формуле (2.4) η в случае $\mathbf{h} = 0$ является постоянной: $\eta = \eta_c = \text{const}$, а во втором случае $\eta = \eta(u, v)$ — некоторая функция координат u и v.

§ 3. Обозначим через φ^* значение потенциала, получаемого при решении той же задачи Неймана для варьированной граничной поверхности S^*, и представим его в виде ряда по степеням ε:

$$\varphi^* = \varphi^*(p;\varepsilon) = \varphi(p) + \varepsilon\varphi^{(1)}(p) + \cdots \tag{3.1}$$

Покажем, что линейная часть разложения (3.1) представляет линейный функциональный оператор над функцией $\eta(u, v)$, зависящий также в общем случае от функции $F(p)$.

Сохраняя первоначальную поверхность S в качестве области интегрирования, для потенциала $\varphi^*(p;\ \varepsilon)$ будем иметь выражение вида

$$\varphi^*(p;\varepsilon) = \int\limits_S L^*(p, q;\varepsilon)\,\gamma^*(q;\varepsilon)\,dq_\varepsilon^* \tag{3.2}$$

Варьированные значения $L^*(p,\ q;\ \varepsilon)$, $\gamma_\varepsilon^*(p;\ \varepsilon)$ и dq_ε^* представим в виде рядов по степеням ε.

Для $L^*(p,\ q;\ \varepsilon)$ представление в виде ряда очевидно:

$$L^*(p, q;\varepsilon) = L(p, q) + \varepsilon\eta_Q\frac{\partial L(p,\ q)}{\partial n_Q} + \cdots$$

Здесь n_Q — направление внешней нормали в точке $Q(q)$ поверхности S, а η_Q — значение функции $\eta(u,\ v)$ в той же точке. Для dq_ε^* справедливо представление

$$dq_\varepsilon^* = \sqrt{E^*G^* - F^{*2}}\,du\,dv = \sqrt{EG - F^2}\,(1 - \varepsilon\eta H + \cdots)\,du\,dv =$$

$$= (1 - \varepsilon\eta_Q H(q) + \cdots)\,dq \tag{3.3}$$

где $H(q)$ — средняя кривизна поверхности S в точке $Q(q)$.

Обратимся к нахождению разложения для $\gamma^*(p;\ \varepsilon)$. Поступая таким же образом, как и в случае потенциала $\varphi^*(p;\ \varepsilon)$, имеем

$$\gamma^*(p;\varepsilon)=\int\limits_{S} K^*(p,q;\varepsilon)\,\gamma^*(q;\varepsilon)\,dq^*_\varepsilon+F^*(p;\varepsilon) \tag{3.4}$$

Функцию $\gamma^*(p;\ \varepsilon)$ и ядро $K^*(p,\ q;\ \varepsilon)$ представим в виде

$$\gamma^*(p;\varepsilon)=\gamma(p)+\varepsilon\gamma^{(1)}(p)+\cdots,$$

$$K^*(p,q;\varepsilon)=K(p,q)+\varepsilon\eta_Q\,\frac{\partial K(p,\,q)}{\partial n_Q}+\cdots$$

Учитывая, что

$$F(p)=\partial\varphi(p)\,/\,\partial n_P$$

используя формулу (2.3) и замечая, что

$$\operatorname{grad} F\cdot\mathbf{h}=\frac{\partial F}{\partial h}\cdot|\,\mathbf{h}\,|$$

для свободного члена $F^*(p;\ \varepsilon)$ будем иметь разложение вида

$$F^*(p;\varepsilon)=F(p)+\varepsilon\left[\eta_P\,\frac{\partial F(p)}{\partial n_P}+|\,\mathbf{h}_P\,|\,\frac{\partial F(p)}{\partial h_P}\right]+\cdots \tag{3.5}$$

где η_P — значение функции $\eta(u,\ v)$ в точке $P(p)$ поверхности S, n_P — направление внешней нормали в той же точке, h_P — направление вектора $\mathbf{h}$ в той же точке, $|\,\mathbf{h}\,|$ — модуль вектора $\mathbf{h}$, равный

$$|\,\mathbf{h}\,|=\frac{|\,\mathbf{r}_u\,|\,|\,\mathbf{r}_v\,|\sqrt{\eta_u^2\,(\mathbf{r}_v\cdot\mathbf{r}_v)+\eta_v^2\,(\mathbf{r}_u\cdot\mathbf{r}_u)}}{|\,\mathbf{r}_u\times\mathbf{r}_v\,|}$$

Для случая, когда S — поверхность уровня функции F или когда вектор $\mathbf{h}$ равен нулю, формула (3.5) будет иметь вид:

$$F^*(p;\,\varepsilon)=F(p)+\varepsilon\eta_P\frac{\partial F(p)}{\partial n_P}+\cdots$$

Нетрудно проследить, что такой же вид будет иметь разложение в ряд свободного члена интегрального уравнения для задачи Дирихле.

Подставляя в (3.4) полученные выражения для $\gamma^*(p;\ \varepsilon)$, $K^*(p,q;\varepsilon)$, dq_ε^* и $F^*(p;\ \varepsilon)$ и выделяя линейную часть, получаем интегральное уравнение для определения $\gamma^{(1)}(p)$:

$$\gamma^{(1)}(p)=\int\limits_{S} K(p,q)\,\gamma^{(1)}(q)\,dq+F^{(1)}(p) \tag{3.6}$$

где

$$F^{(1)}(p)=\int\limits_{S}\left[\frac{\partial K(p,\,q)}{\partial n_Q}-K(p,q)\,H(q)\right]\gamma(q)\,\eta_Q dq+\eta_P\,\frac{\partial F(p)}{\partial n_P}+$$

$$+\,|\,\mathbf{h}_P\,|\,\frac{\partial F(p)}{\partial h_P} \tag{3.7}$$

Интегральное уравнение (3.6) отличается от уравнения (1.2) для определения $\gamma(p)$ только значением свободного члена.

Так как $R(p, q)$ есть резольвента ядра $K(p,q)$, то

$$\gamma^{(1)}(p) = F^{(1)}(p) + \int\limits_S R(p,q)\, F^{(1)}(q)\, dq$$

Подставляя сюда выражение (3.7) для $F^{(1)}(p)$, имеем

$$\gamma^{(1)}(p) = \int\limits_S \frac{\partial K(p,q)}{\partial n_Q} \gamma(q)\, \eta_Q dq - \int\limits_S K(p,q)\, H(q)\, \gamma(q)\, \eta_Q dq +$$

$$+ \eta_P \frac{\partial F(p)}{\partial n_P} + |\mathbf{h}_P| \frac{\partial F(p)}{\partial h_P} + \iint\limits_{SS} R(p,q) \frac{\partial K(q,r)}{\partial n_R} \gamma(r)\, \eta_R dr\, dq -$$

$$- \iint\limits_{SS} R(p,q)\, K(q,r)\, H(r)\, \gamma(r)\, \eta_R dr dq +$$

$$+ \int\limits_S R(p,q) \frac{\partial F(q)}{\partial n_Q} \eta_Q\, dq + \int\limits_S R(p,q) \frac{\partial F(q)}{\partial h_Q} |\mathbf{h}_Q|\, dq$$

Замечая, что

$$\int\limits_S R(p,q)\, K(q,s)\, dq = R(p,s) - K(p,s)$$

для интеграла

$$J_1 = \int\limits_S \int\limits_S R(p,q)\, K(q,r)\, H(r)\, \gamma(r)\, \eta_R dr\, dq$$

получим

$$J_1 = \int\limits_S [R(p,r) - K(p,r)]\, H(r)\, \gamma(r)\, \eta_R dr$$

Меняя здесь обозначение переменной интегрирования и подставляя в выражение для $\gamma^{(1)}(p)$, получим

$$\gamma^{(1)}(p) = \int\limits_S \frac{\partial K(p,q)}{\partial n_Q} \gamma(q)\, \eta_Q dq + \int\limits_S \int\limits_S R(p,q) \frac{\partial K(q,r)}{\partial n_R} \gamma(r)\, \eta_R dr\, dq -$$

$$- \int\limits_S R(p,q)\, H(q)\, \gamma(q)\, \eta_Q dq + \int\limits_S R(p,q) \frac{\partial F(q)}{\partial n_Q} \eta_Q dq +$$

$$+ \int\limits_S R(p,q) \frac{\partial F(q)}{\partial h_Q} |\mathbf{h}_Q|\, dq + \eta_P \frac{\partial F(p)}{\partial n_P} + |\mathbf{h}_P| \frac{\partial F(p)}{\partial h_P}$$

Изменяя обозначение переменной интегрирования в двойном интеграле и группируя члены, имеем

$$\gamma^{(1)}(p) = \int\limits_S \Big[\frac{\partial K(p,q)}{\partial n_Q} - R(p,q)\, H(q) + \int\limits_S R(p,r) \frac{\partial K(r,q)}{\partial n_Q}\, dr \Big] \gamma(q)\, \eta_Q dq +$$

$$+ \int\limits_S R(p,q) \frac{\partial F(q)}{\partial n_Q} \eta_Q dq + \eta_P \frac{\partial F(p)}{\partial n_P} + \int\limits_S R(p,q) \frac{\partial F(q)}{\partial h_Q} |\mathbf{h}_Q|\, dq + |\mathbf{h}_P| \frac{\partial F(p)}{\partial h_P}$$

Учитывая, что

$$\int\limits_S R(p,r) \frac{\partial K(r,q)}{\partial n_Q}\, dr = \frac{\partial}{\partial n_Q} \int\limits_S R(p,r)\, K(r,q)\, dq = \frac{\partial}{\partial n_Q} [R(p,q) - K(p,q)]$$

для $\gamma^{(1)}(p)$ имеем окончательно

$$\gamma^{(1)}(p)=\int\limits_S\left\{\frac{\partial R(p,q)}{\partial n_Q}\gamma(q)+\left[\frac{\partial F(q)}{\partial n_Q}-H(q)\gamma(q)\right]R(p,q)\right\}\eta_Q dq+$$
$$+\eta_P\frac{\partial F(p)}{\partial n_P}+\int\limits_S R(p,q)\frac{\partial F(q)}{\partial h_Q}|\mathbf{h}_Q|\,dq+|\mathbf{h}_P|\frac{\partial F(p)}{\partial h_P} \tag{3.8}$$

В случае, когда S — поверхность уровня функции $\varphi(p)$ или когда вектор $\mathbf{h}$ равен нулю, последние два члена в выражении (3.8) будут отсутствовать. В случае задачи Дирихле для $\mu^{(1)}(p)$ получили бы выражение такого же типа, как выражение (3.8) для $\gamma^{(1)}(p)$, только без двух последних членов.

Подставляя полученные выражения для $L^*(p,q;\varepsilon)$, $\gamma^*(p;\varepsilon)$ и dq_ε^* в формулу (3.2), получим

$$\varphi^*(p;\varepsilon)=\varphi(p)+\varepsilon\varphi^{(1)}(p)+\cdots=\int\limits_S\left[L(p,q)+\varepsilon\eta_Q\frac{\partial L(p,q)}{\partial n_Q}+\cdots\right]\times$$
$$\times[\gamma(q)+\varepsilon\gamma^{(1)}(q)+\cdots][1-\varepsilon\eta_Q H(q)+\cdots]\,dq$$

Выделяя здесь линейную часть, имеем для $\varphi^{(1)}(p)$:

$$\varphi^{(1)}(p)=\int\limits_S\frac{\partial L(p,q)}{\partial n_Q}\gamma(q)\eta_Q dq+\int\limits_S L(p,q)\gamma^{(1)}(q)\,dq-$$
$$-\int\limits_S L(p,q)H(q)\gamma(q)\eta_Q dq \tag{3.9}$$

Рассмотрим интеграл

$$J_2=\int\limits_S L(p,q)\gamma^{(1)}(q)\,dq$$

Подставляя сюда выражение для $\gamma^{(1)}(p)$ по формуле (3.8), получим

$$J_2=\int\limits_S\int\limits_S L(p,q)\frac{\partial R(q,r)}{\partial n_R}\gamma(r)\eta_R dr\,dq+\int\limits_S\int\limits_S L(p,q)R(q,r)\frac{\partial F(r)}{\partial n_R}\eta_R dr dq-$$
$$-\int\limits_S\int\limits_S L(p,q)R(q,r)H(r)\gamma(r)\eta_R dr\,dq+\int\limits_S L(p,q)\frac{\partial F(q)}{\partial n_Q}\eta_Q dq+$$
$$+\int\limits_S\int\limits_S L(p,q)R(q,r)\frac{\partial F(r)}{\partial h_R}|\mathbf{h}_R|\,dr\,dq+\int\limits_S L(p,q)\frac{\partial F(q)}{\partial h_Q}|\mathbf{h}_Q|\,dq$$

Меняя в двойных интегралах обозначения переменных интегрирования и группируя члены, имеем

$$J_2=\int\limits_S\left\{\left[L(p,q)+\int\limits_S L(p,r)R(r,q)\,dr\right]\frac{\partial F(q)}{\partial n_Q}+\gamma(q)\int\limits_S L(p,r)\times\right.$$
$$\left.\times\left[\frac{\partial R(r,q)}{\partial n_Q}-R(r,q)H(q)\right]dr\right\}\eta_Q dq+\int\limits_S\left[L(p,q)+\right.$$
$$\left.+\int\limits_S L(p,r)R(r,q)\,dr\right]\frac{\partial F(q)}{\partial h_Q}|\mathbf{h}_Q|\,dq$$

Отсюда, используя формулу (1.3), для J_2 получаем окончательно

$$J_2 = \int_S \left\{ G(p,q) \frac{\partial F(q)}{\partial n_Q} + \gamma(q) \int_S L(p,r) \left[\frac{\partial R(r,q)}{\partial n_Q} - R(r,q) H(q) \right] dr \right\} \eta_Q dq + $$

$$+ \int_S G(p,q) \frac{\partial F(q)}{\partial h_Q} |\mathbf{h}_Q| \, dq$$

Подставляя полученное выражение для интеграла J_2 в формулу (3.9) и группируя члены, получим для $\varphi^{(1)}(p)$:

$$\varphi^{(1)}(p) = \int_S \left[\frac{\partial L(p,q)}{\partial n_Q} + \frac{\partial}{\partial n_Q} \int_S L(p,r) R(r,q) \, dr \right] \gamma(q) \eta_Q dq -$$

$$- \int_S \left[L(p,q) + \int_S L(p,r) R(r,q) \, dr \right] H(q) \gamma(q) \eta_Q dq +$$

$$+ \int_S G(p,q) \frac{\partial F(q)}{\partial n_Q} \eta_Q dq + \int_S G(p,q) \frac{\partial F(q)}{\partial h_Q} |\mathbf{h}_Q| \, dq$$

Используя снова формулу (1.3) для функции Грина и замечая, что для рассматриваемой задачи Неймана

$$\frac{\partial L(p,q)}{\partial n_Q} + \frac{\partial}{\partial n_Q} \int_S L(p,r) R(r,q) \, dr = \frac{\partial G(p,q)}{\partial n_Q} = 0, \qquad Q(q) \in S$$

для линейной части $\varphi^{(1)}(p)$ разложения потенциала $\varphi^*(p;\varepsilon)$ в ряд по степеням ε при указанном способе изменения поверхности, получаем окончательное выражение

$$\varphi^{(1)}(p) = \int_S G(p,q) \left[\frac{\partial F(q)}{\partial n_Q} - H(q) \gamma(q) \right] \eta_Q dq + \int_S G(p,q) \frac{\partial F(q)}{\partial h_Q} |\mathbf{h}_Q| \, dq$$

которое и доказывает наше утверждение.

В том случае, когда поверхность S есть поверхность уровня функции $\varphi(p)$, $\varphi^{(1)}(p)$ равно

$$\varphi^{(1)}(p) = \int_S G(p,q) \left[\frac{\partial F(q)}{\partial n_Q} - H(q) \gamma(q) \right] \eta_Q dq$$

В случае же, когда вектор $\mathbf{h}$ равен нулю, выражение для $\varphi^{(1)}(p)$ принимает вид:

$$\varphi^{(1)}(p) = \eta_c \int_S G(p,q) \left[\frac{\partial F(q)}{\partial n_Q} - H(q) \gamma(q) \right] dq$$

Нетрудно проследить, что в случае краевой задачи Дирихле выражение для первой вариации потенциала будет вида

$$\varphi^{(1)}(p) = \int_S \frac{\partial G(p,q)}{\partial n_Q} \mu(q) \eta_Q dq$$

Поступила 1 VI 1954

ЛИТЕРАТУРА

1. Смирнов В. И. Курс высшей математики, т. IV. Гостехиздат, 1951.
2. Сретенский Л. Н. Теория ньютоновского потенциала. Гостехиздат, 1946.