

К ВОПРОСУ О ПОСТРОЕНИИ ВАРИАЦИОННЫХ МЕТОДОВ РАСЧЕТА

И. В. Свирский

(Казань)

Простейшим из вариационных методов является метод Релея. При его применении к определению частот колебаний упругих тел частота колебаний определяется как минимальное значение подходящим образом подобранного функционала $\nu = \Phi[f(x)]$. Здесь $f(x)$ — функция, характеризующая форму колебаний тела. Вместо этой функции для приближенного определения частоты подставляют функцию, характеризующую интуитивно ожидаемую форму колебаний, например форму колебаний тела, близкого по своей конфигурации к рассматриваемому, но конфигурации более простой, для которой форма колебаний известна. При этом оказывается, что неточность предварительного интуитивного определения формы колебаний сравнительно мало сказывается на точности результата вычислений. Это благоприятное обстоятельство, обеспечившее широкое применение метода в технических расчетах, объясняется тем, что при функции, доставляющей минимум функционалу, его функциональная производная обращается в нуль (равна нулю первая вариация функционала) и поэтому функционал в окрестности этой функции меняется сравнительно медленно.

В этой работе сделана попытка построения таких вариационных формул для приближенного решения различных задач, при применении которых погрешность результата сравнительно мало зависит от погрешностей подбора аппроксимирующих функций, точнее говоря, при которых первая вариация погрешности результата по погрешностям выбора аппроксимирующих функций обращается в нуль.

§ 1. Мы начнем с примера построения вариационного метода для приближенного определения емкости проводников.

Емкостью Φ проводника относительно земли называется то количество электричества, которое накопится на проводнике, если повысить его потенциал относительно земли на единицу. Согласно теореме Гаусса количество электричества, находящееся на теле, равно деленному на -4π потоку градиента потенциала φ через любую замкнутую поверхность, окружающую проводник. В качестве такой поверхности выберем поверхность Γ , непосредственно прилегающую к проводнику:

$$\Phi(\varphi) = -\frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma} \frac{\partial \varphi}{\partial n} ds \quad (1.1)$$

Нашей задачей будет построение вариационного метода для приближенного определения емкости Φ . Потенциал в пространстве v вне тела и на его поверхности Γ удовлетворяет системе уравнений:

$$\Delta \varphi = 0 \text{ внутри } v; \quad \varphi - 1 = 0 \text{ на } \Gamma \quad (1.2)$$

При этом предполагается, что функция φ равна нулю на бесконечности и на поверхности земли и что ее градиент убывает при удалении в бесконечность не медленнее, чем величина, обратно пропорциональная

квадрату расстояния до начала координат. Мы будем предполагать, что эти условия выполняются также и для всех встречающихся далее функций. Так же, как при применении метода Релея, приближенное решение системы уравнений мы будем разыскивать в следующем виде:

$$\varphi = c \varphi_0 \quad (1.3)$$

где φ_0 — некоторая функция, характеризующая ожидаемую форму решения; в качестве этой функции можно принять, например, известное нам решение задачи для проводника с поверхностью простой формы (например, шаровой), близкой к поверхности нашего тела; c — числовой коэффициент. Для его определения подставим выражение (1.3) в уравнения (1.2), помножим их соответственно на некоторые функции ψ и ψ_1 , проинтегрируем их соответственно по объему v пространства, лежащего вне проводника, и по его поверхности Γ и, сложив результаты, будем определять коэффициент c из уравнения

$$J(c\varphi_0) = \int_v \psi \Delta(c\varphi_0) dv + \int_\Gamma \psi_1 (c\varphi_0 - 1) ds = 0 \quad (1.4)$$

Для того чтобы полученная к концу вычислений величина емкости мало зависела от предварительного интуитивного определения функции φ_0 , мы поставим себе задачу подобрать функции ψ и ψ_1 по возможности так, чтобы при отклонениях $c\varphi_0$ от истинного значения потенциала, не нарушающих условия (1.4), первая вариация $\Phi(c\varphi_0)$ обращалась в нуль. Согласно правилу множителей Лагранжа для этого достаточно существования некоторого числа λ , при котором свободная вариация функционала $\Phi(c\varphi_0) + \lambda J(c\varphi_0)$ обратилась бы в нуль. Производя варьирование и применяя при этом теорему Грина, мы получим

$$\begin{aligned} \delta[\Phi + \lambda J] = & \int_v \lambda \Delta \psi \delta(c\varphi_0) dv + \int_\Gamma \left[\left(-\lambda \psi - \frac{1}{4\pi} \right) \frac{\partial \delta(c\varphi_0)}{\partial n} + \right. \\ & \left. + \left(\lambda \frac{\partial \psi}{\partial n} + \lambda \psi_1 \right) \delta(c\varphi_0) \right] ds = 0 \end{aligned} \quad (1.5)$$

Производные, входящие в эту формулу, берутся по внешним нормальям к поверхности проводника; эти нормали являются внутренними по отношению к объему v . Для того чтобы вышло это соотношение, желательно возможно более точное выполнение следующих условий:

$$\begin{aligned} \Delta \psi &= 0 && \text{внутри } v \\ \psi + \frac{1}{4\pi\lambda} &= 0, && \frac{\partial \psi}{\partial n} + \psi_1 = 0 \text{ на } \Gamma \end{aligned} \quad (1.6)$$

Сравнивая первые два из этих уравнений с уравнениями (1.2), замечаем, что в качестве функции ψ желательно было бы принять функцию $-\varphi/4\pi$. Но так как ее величина нам точно неизвестна, то согласно (1.3) положим $\psi = -c\varphi_0/4\pi$. Если мы, кроме того, определим ψ_1 при помощи последнего из уравнений (1.6) и подставим полученные величины в уравнение (1.4), то, сокращая на $-c/4\pi$, получим искомую вариационную

формулу для определения коэффициента c :

$$\int \varphi_0 \Delta (c\varphi_0) dv - \int_{\Gamma} \frac{\partial \varphi_0}{\partial n} (c\varphi_0 - 1) ds = 0 \quad (1.7)$$

Для получения более точного результата приближенное значение потенциала мы могли бы разыскивать не в форме (1.3), а в виде линейной комбинации нескольких функций. На этом мы более подробно остановимся в следующем параграфе.

Применим полученную вариационную формулу для выяснения, как меняется емкость проводника при малых изменениях его формы. Для этого подставим в формулу (1.7) вместо φ_0 известное нам точное значение потенциала заряженного проводника с поверхностью Γ' простой формы, близкой к поверхности Γ нашего проводника.

При этом предполагается, что поверхность Γ' лежит внутри объема тела с поверхностью Γ . Учитывая, что функция φ_0 удовлетворяет в нашем случае уравнению $\Delta \varphi_0 = 0$, получим из (1.7)

$$c \int_{\Gamma} \varphi_0 \frac{\partial \varphi_0}{\partial n} ds - \int_{\Gamma} \frac{\partial \varphi_0}{\partial n} ds = 0$$

Учтя это соотношение, получаем следующее приближенное выражение для емкости:

$$\Phi = -\frac{1}{4\pi} c \int_{\Gamma} \frac{\partial \varphi_0}{\partial n} ds = -\frac{1}{4\pi} \left[\int_{\Gamma} \frac{\partial \varphi_0}{\partial n} ds \right]^2 \left(\int_{\Gamma} \varphi_0 \frac{\partial \varphi_0}{\partial n} ds \right)^{-1} \quad (1.8)$$

Интеграл $\int \varphi_0 / \partial n ds$ в формуле представляет собой умноженную на -4π емкость Φ' проводника с поверхностью Γ' .

Если применить теорему Грина к интегралу по объему Δv , заключенному между поверхностями Γ' и Γ , то интеграл, стоящий в знаменателе формулы (1.8), можно представить в следующем виде:

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} \varphi_0 \frac{\partial \varphi_0}{\partial n} ds &= \int_{\Gamma'} \varphi_0 \frac{\partial \varphi_0}{\partial n} ds + \left(\int_{\Gamma} \varphi_0 \frac{\partial \varphi_0}{\partial n} ds - \int_{\Gamma'} \varphi_0 \frac{\partial \varphi_0}{\partial n} ds \right) = \\ &= \int_{\Gamma'} \varphi_0 \frac{\partial \varphi_0}{\partial n} ds + \int_{\Delta v} (\varphi_0 \Delta \varphi_0 + |\nabla \varphi_0|^2) dv = -4\pi \Phi' + \int_{\Delta v} |\nabla \varphi_0|^2 ds \end{aligned}$$

При выводе этой формулы следует учесть, что в третьем интеграле формулы дифференцирование происходит по внешней относительно объема Δv нормали, в четвертом интеграле — по внутренней нормали, что $\varphi_0 = 1$ на Γ' и поэтому пятый интеграл формулы равен умноженной на 4π емкости проводника с поверхностью Γ' и что $\Delta \varphi_0 = 0$. Учитывая все предыдущие соображения, получим

$$\begin{aligned} \Phi &= 4\pi \Phi'^2 \left(4\pi \Phi' - \int_{\Delta v} |\nabla \varphi_0|^2 dv \right)^{-1} = \\ &= \Phi' \left(1 - \frac{1}{4\pi \Phi'} \int_{\Delta v} |\nabla \varphi_0|^2 dv \right)^{-1} \approx \Phi' + \frac{1}{4\pi} \int_{\Delta v} |\nabla \varphi_0|^2 dv \end{aligned}$$

В следующем параграфе мы рассмотрим вопрос о построении вариационных методов для уравнений более общего типа.

§ 2. Пусть дано соотношение

$$Af = 0 \quad (2.1)$$

где A — нелинейный оператор. Формула (2.1) может символизировать, например, совокупность дифференциальных уравнений, которые должны выполняться внутри некоторой области, и уравнений, которые должны выполняться на ее границе; f символизирует некоторую совокупность чисел и функций, входящих в уравнения.

Поставим задачу: построить вариационную формулу для приближенного определения искомой величины $\Phi(f)$, зависящей от совокупности функций и чисел f . Так же как и при применении метода Релея, приближенное решение уравнений (2.1) мы будем разыскивать в виде

$$f \approx c\varphi_0 \quad (2.2)$$

где φ_0 характеризует ожидаемую форму решения, например решение задачи, близкой к заданной, но более простой, а c — численный коэффициент. Для его определения постараемся найти подходящий функционал ψ , с тем, чтобы определить c из уравнения

$$\psi(Ac\varphi_0) = 0 \quad (2.3)$$

Функционал ψ может представить, например, сумму интегралов по соответствующим областям от уравнений системы (2.1), предварительно умноженных на некоторые функции. Этот функционал, однако, можно взять и в более общем виде. При этом предполагается, что функционал ψ удовлетворяет условию $\psi(0) = 0$. Для того чтобы погрешности ожидаемой формы решения φ_0 мало сказывались на приближенном значении величины Φ , мы поставим задачу подобрать функционал ψ так, чтобы при отклонении функции φ_0 от точного решения (2.1) и соответствующем изменении c , определяемом из условия, чтобы уравнение (2.3) не нарушалось, первая вариация $\Phi(c\varphi_0)$ обращалась в нуль, т. е. нужно так подобрать функционал ψ , чтобы выражение $\Phi(c\varphi_0)$ принимало стационарное значение при вариациях $c\varphi_0$, не нарушающих уравнений (2.3).

Достаточным условием для этого согласно правилу множителей Лагранжа является существование некоторого числа λ , при котором обратилась бы в нуль свободная вариация функционала

$$\Phi(c\varphi_0) + \lambda\psi(Ac\varphi_0) \quad (2.4)$$

при малых отклонениях $c\varphi_0$ от решения уравнений (2.1). Условием стационарности этого выражения будет соотношение

$$L\Phi(c\varphi_0) + \lambda L\psi(Ac\varphi_0) = 0 \quad \text{при } c\varphi_0 = f \quad (2.5)$$

Эта формула символизирует совокупность уравнений Эйлера и естественных граничных условий стационарности выражения (2.4).

Уравнения (2.5) являются уравнениями, которые определяют ψ . Заметим, что эти уравнения содержат неизвестные нам функции f — решения уравнения (2.1).

Однако можно поступить следующим образом: можно интуитивно наметить приближенное решение φ_0 уравнения (2.1) и, подставив его в (2.5), разыскивать каким-либо приближенным способом приближенное решение ψ этого уравнения. Это можно сделать, например, так: к данному уравнению подобрать близкое к нему уравнение так, чтобы оно, а также соответствующее ему уравнение типа (2.5), решалось достаточно просто. Эти решения мы примем в качестве приближенных выражений для φ и ψ . Их мы подставим в уравнение (2.2) и решим полученное уравнение с одним неизвестным числом c . Тогда величина $\Phi(c\varphi_0)$ даст нам искомое приближенное значение $\Phi(f)$. При этом первая вариация погрешности определения Φ при малых отклонениях φ_0 от точного решения уравнения (2.1), если ψ удовлетворяет уравнению (2.5) согласно предыдущему, равна нулю.

С другой стороны, если φ_0 точно удовлетворяет уравнению $A\varphi_0 = 0$, то отклонения ψ от точного решения уравнения (2.5) совсем не влияют на результаты определения величины c из уравнения (2.3), а следовательно, и на результат определения величины Φ , ибо в этом случае всегда будет иметь место решение (2.3): $c = 1$. Используя предыдущие результаты, можно, например, доказать, что если сделать несколько специальное предположение о том, что погрешность φ_0 есть $\varepsilon_1\varphi_1$, а погрешность ψ есть $\varepsilon_2\psi_1$, где φ_1 и ψ_1 фиксированы, а числа ε_1 и ε_2 стремятся к нулю, и если предположить, что погрешность определения величины Φ есть функция ε_1 и ε_2 , обладающая в окрестности нулевой точки непрерывными производными первых двух порядков, то тогда погрешность определения величины Φ окажется величиной второго порядка малости по сравнению с порядком малости наибольшего из чисел ε_1 и ε_2 .

Укажем на некоторое обобщение предыдущих результатов. Для того чтобы получить большую точность решения уравнения (2.1), его можно разыскивать в виде линейной комбинации нескольких функций:

$$f \approx c_1\varphi_1 + \dots + c_n\varphi_n \quad (2.6)$$

где φ_i выбираются при этом так, чтобы при помощи их линейной комбинации можно было по возможности лучше приблизиться к точному решению. При этом неопределенные коэффициенты следует определить из системы уравнений

$$\psi_k(A[c_1\varphi_1 + \dots + c_n\varphi_n]) = 0 \quad (k = 1, \dots, n) \quad (2.7)$$

Здесь ψ_k ($k = 1, \dots, n$) — некоторые функционалы, которые желательно подобрать так, чтобы при помощи их линейной комбинации можно было возможно ближе подойти к решению ψ уравнений (2.5). В самом деле, рассмотрим соотношение, которое получается, если каждое из уравнений (2.7) помножить на некоторый коэффициент d_k и результаты сложить

$$\sum_{k=1}^n d_k \psi_k \left(A \sum_{i=1}^n c_i \varphi_i \right) = 0 \quad (2.8)$$

При этом подберем коэффициенты d_k так, чтобы сумма $d_1\psi_1 + \dots + d_n\psi_n$ возможно ближе подошла к решению ψ уравнений (1.5).

Из результатов предыдущего параграфа следует, что отклонения $c_1\varphi_1 + \dots + c_n\varphi_n$ от точного значения f будут тем меньше сказываться на погрешности определения величины Φ , чем меньше отклонение $d_1\psi_1 + \dots + d_n\psi_n$ от точного решения уравнений (2.5).

Заметим, что иногда может оказаться удобным разыскивать приближенное значение для f не в виде линейных комбинаций φ_i , как это указывается формулой (2.7), а в более общем виде:

$$f = \varphi(c_1, \dots, c_n)$$

Правая часть этого соотношения, символизирующая совокупность чисел и функций, зависит нелинейно от n параметров. Эти параметры следует определять из системы уравнений

$$\varphi_k[A\varphi(c_1, \dots, c_n)] = 0 \quad (k=0, \dots, n)$$

§ 3. *Пример.* Рассмотрим систему уравнений относительно отличной от нуля функции φ и собственного числа Φ оператора $a(x, y)\Delta$:

$$\begin{aligned} a(x, y)\Delta\varphi - \Phi\varphi &= 0 && \text{(внутри данной области } D) \\ \frac{\partial\varphi}{\partial n} + k\varphi &= 0 && \text{(на ее границе } \Gamma) \end{aligned} \quad (3.1)$$

Поставим задачу построения вариационной формулы для приближенного определения величины Φ . В нашем случае роль искомой величины $\Phi(\varphi, \Phi)$, зависящей от решения уравнений, т. е. от совокупности функций φ и собственного числа оператора Φ , будет играть собственное число оператора.

Приближенное решение будем разыскивать в следующем виде:

$$\varphi = \varphi_0, \quad \Phi = c \quad (3.2)$$

При этом заранее не будем требовать, чтобы функция φ_0 обязательно удовлетворяла граничным условиям, а будем подбирать ее так, чтобы она по возможности лучше одновременно удовлетворяла уравнениям как внутри области, так и на ее границе. В качестве такой функции можно принять, например, решение задачи для области, близкой к данной, но более простой, для которой решение нашей задачи известно. Подставим выражение (3.2) в уравнения (3.1) и, помножив каждое из них на некоторые функции ψ_1 и ψ_2 и, проинтегрировав первое уравнение по области D , а второе по контуру Γ , будем определять постоянную c из уравнения

$$J = \iint_D (a\Delta\varphi_0 - c\varphi_0)\psi_1 dx dy + \int_\Gamma \left(\frac{\partial\varphi_0}{\partial n} + k\varphi_0\right)\psi_2 ds = 0 \quad (3.3)$$

При этом поставим задачу так подобрать функции ψ_1 и ψ_2 , чтобы при отклонениях φ_0 и значениях c , связанных с φ_0 условием (3.3), первая вариация величины Φ равнялась нулю.

Согласно правилу множителей Лагранжа об условном экстремуме достаточным условием для этого является наличие такого числа λ , при

котором вариация функционала

$$\Phi + \lambda J = c + \lambda \left[\iint_D (a\Delta\varphi_0 - c\varphi_0) \psi_1 dx dy + \int_{\Gamma} \left(\frac{\partial\varphi_0}{\partial n} + k\varphi \right) \psi_2 ds \right] \quad (3.4)$$

по φ_0 и c обратилась бы в нуль. Произведя варьирование и интегрируя по частям, получим

$$\begin{aligned} & \lambda \iint_D (\Delta a\psi_1 - c\psi_1) \delta\varphi_0 dx dy + \lambda \int_{\Gamma} \left[(a\psi_1 + \psi_2) \frac{\partial(\delta\varphi_0)}{\partial n} + \right. \\ & \left. + \left(k\psi_2 - \frac{\partial}{\partial n} \right) \varphi_0 \right] ds + \delta c \left[1 - \lambda \iint_D \varphi_0 \psi_1 dx dy \right] = 0 \end{aligned} \quad (3.5)$$

Для выполнения этого соотношения желательно выполнение следующих условий:

$$\Delta a\psi_1 - c\psi_1 = 0 \quad \text{в области } D \quad (3.6)$$

$$a\psi_1 + \psi_2 = 0 \quad \text{или} \quad \psi_2 = -a\psi_1 \quad \text{на } \Gamma \quad (3.7)$$

$$k\psi_2 - \frac{\partial a\psi_1}{\partial n} = 0 \quad \text{или} \quad \psi_2 = \frac{1}{k} \frac{\partial a\psi_1}{\partial n} \quad \text{на } \Gamma \quad (3.8)$$

Из (3.7) и (3.8) следует, что желательно выполнение соотношения

$$ka\psi_1 + \frac{\partial a\psi_1}{\partial n} = 0 \quad \text{на } \Gamma \quad (3.9)$$

Последний член формулы (3.5) можно обратить в нуль подбором величины λ . Подставляя (3.7) в уравнение (3.3), получим из него вариационную формулу

$$\iint_D (a\Delta\varphi_0 - c\varphi_0) \psi_1 dx dy - \oint_{\Gamma} \left(\frac{\partial\varphi_0}{\partial n} + k\varphi_0 \right) a\psi_1 ds = 0 \quad (3.10)$$

$$\Phi = c = \frac{\iint_D a\psi_1 \Delta\varphi_0 dx dy - \oint_{\Gamma} \left(\frac{\partial\varphi_0}{\partial n} + k\varphi_0 \right) a\psi_1 ds}{\iint_D \varphi_0 \psi_1 dx dy} \quad (3.11)$$

Если определить ψ_2 из (3.8) и подставить в (3.3), то из этого уравнения получается другая вариационная формула:

$$\iint_D \psi_1 (a\Delta\varphi_0 - c\varphi_0) dx dy + \oint_{\Gamma} \left(\frac{1}{k} \frac{\partial\varphi_0}{\partial n} \frac{\partial a\psi_1}{\partial n} + \varphi_0 \frac{\partial a\psi_1}{\partial n} \right) ds = 0 \quad (3.12)$$

и, следовательно,

$$\Phi \approx c = \frac{\iint_D a\psi_1 \Delta\varphi_0 dx dy + \oint_{\Gamma} \left(\frac{1}{k} \frac{\partial\varphi_0}{\partial n} \frac{\partial a\psi_1}{\partial n} + \varphi_0 \frac{\partial a\psi_1}{\partial n} \right) ds}{\iint_D \varphi_0 \psi_1 dx dy} \quad (3.13)$$

Для приближенного определения величины Φ вместо φ и ψ следует подставить интуитивно ожидаемые решения уравнений (3.1), (3.6), полученные, например, путем решения более простых уравнений для областей более простой формы.

Если величина a постоянна, то очевидно, что уравнения (3.1) и (3.6) по своей форме совпадают; в этом случае можно положить $\psi = \varphi$, и вариационная формула (3.11) совпадает с вариационной формулой, которая получается при применении обобщенного метода Галеркина [1].

Если величина k велика или равна бесконечности, что имеет место при решении задачи Дирихле, когда условие на границе сводится к $\varphi = 0$, то очевидно, что лучше пользоваться вариационной формулой (3.13), так как формула (3.10) уже при малых ошибках в предварительном определении функций φ и ψ , будет давать большие погрешности. Наоборот, при малых величинах k выгоднее пользоваться формулой (3.11).

Для более общего случая, когда приближенное значение функции φ и числа Φ мы будем разыскивать в виде

$$\varphi = \varphi_0 + c_1\varphi_1 + \dots + c_{n-1}\varphi_{n-1}, \quad \Phi = c_n$$

приближенное значение собственного числа рационально определять из системы уравнений

$$\sum_{i=0}^{n-1} c_i \left[\iint (a\Delta\varphi_i - c_n\varphi_i)\psi_k dx dy - \int \left(\frac{\partial\varphi_i}{\partial n} + k\varphi_i \right) \psi_k ds \right] = 0 \quad (k=0,1,\dots,[n-1]),$$

где $c_0 = 1$. Для того чтобы эта система уравнений имела ненулевое решение, необходимо, чтобы ее определитель равнялся нулю:

$$\left| \iint (a\Delta\varphi_i - c_n\varphi_i)\psi_k dx dy - \int \left(\frac{\partial\varphi_i}{\partial n} + k\varphi_i \right) \psi_k ds \right| = 0 \quad (i,k=0,\dots,[n-1]) \quad (3.14)$$

Решая это уравнение, мы определим искомую приближенную величину собственного значения $\Phi = c_n$. Таким же образом можно обобщить формулу (3.12):

$$\left| \iint \psi_k (a\Delta\varphi_i - c_n\varphi_i) dx dy + \int \left(\frac{1}{k} \frac{\partial\varphi_i}{\partial n} \frac{\partial a\psi_k}{\partial n} + \varphi_i \frac{\partial a\psi_k}{\partial n} \right) ds \right| = 0 \quad (i,k=0,\dots,[n-1]) \quad (3.15)$$

§ 4. Используем предыдущие результаты, чтобы выяснить, как меняется собственное значение оператора при малых изменениях границы области.

При этом предположим, что при деформации граничного контура собственные функции и их производные меняются непрерывно. Нам представляется, что этого можно ожидать, если вырождение собственного значения отсутствует. Допустим при этом, что исходная область является достаточно простой, например является кругом или прямоугольником, и что $a = 1$. Поэтому точные решения φ и ψ уравнений (3.1) будут нам известны. Предположим, что область D заменяется областью D' , лежащей внутри D и имеющей границу Γ' , близкую к границе Γ области D . Для приближенного определения собственного значения $\Phi \approx c + \delta c$ измененной краевой задачи применим формулу (3.12), причем в качестве функций φ и ψ примем точные решения уравнений (3.1), (3.6) и (3.9) для исходной области:

$$\iint_{D'} \psi [\Delta\varphi_0 - (c + \Delta c)\varphi_0] dx dy + \int_{\Gamma'} \left(\frac{1}{k} \frac{\partial\varphi_0}{\partial n} \frac{\partial\psi}{\partial n} + \varphi_0 \frac{\partial\psi}{\partial n} \right) ds = 0 \quad (4.1)$$

Ввиду того что функция φ_0 удовлетворяет уравнениям (3.1), имеет место соотношение

$$\iint_{D'} \psi (\Delta\varphi_0 - c\varphi_0) dx dy + \int_{\Gamma} \left(\frac{1}{k} \frac{\partial\varphi_0}{\partial n} \frac{\partial\psi}{\partial n} + \varphi_0 \frac{\partial\psi}{\partial n} \right) ds = 0 \quad (4.2)$$

Вычитая из (4.2) (4.1) и учитывая, что согласно (3.1)

$$\Delta \varphi_0 - c \varphi_0 = 0$$

имеем

$$\delta c \iint_{D'} \psi \varphi_0 dx dy + \int_{\Gamma} \left(\frac{1}{k} \frac{\partial \varphi_0}{\partial n} \frac{\partial \psi}{\partial n} + \varphi \frac{\partial \psi}{\partial n} \right) ds - \int_{\Gamma'} \left(\frac{1}{k} \frac{\partial \varphi_0}{\partial n} \frac{\partial \psi}{\partial n} + \varphi_0 \frac{\partial \psi}{\partial n} \right) ds = 0 \quad (4.3)$$

Следовательно, величина δc определяется вариацией интеграла

$$J = \int_{\Gamma} \left(\frac{1}{k} \frac{\partial \varphi_0}{\partial n} \frac{\partial \psi}{\partial n} + \varphi_0 \frac{\partial \psi}{\partial n} \right) ds \quad (4.4)$$

происходящей при изменении контура:

$$\delta \Phi \approx \delta c = \delta J \left(\iint_{D'} \psi \varphi_0 dx dy \right)^{-1}$$

Пусть уравнение контура в декартовых координатах имеет вид: $y = f(x)$. Учитывая, что косинусы углов между нормалью к кривой и осями координат равны

$$\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}, \quad -\frac{1}{\sqrt{1+y'^2}}$$

нетрудно получить

$$ds = \sqrt{1+y'^2} dx, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial n} = \varphi_x(x, y) \frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}} - \varphi_y(x, y) \frac{1}{\sqrt{1+y'^2}}$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial n} = \psi_x(x, y) \frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}} - \psi_y(x, y) \frac{1}{\sqrt{1+y'^2}} \quad \left(\varphi_x(x, y) = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \text{ и т. д.} \right)$$

Если мы подставим эти выражения в правую часть формулы (4.4), то величина интеграла (4.4) окажется известным нам функционалом от функции $y(x)$:

$$J = \int_{\Gamma} g(x, y, y') dx$$

Здесь $g(x, y, y')$ обозначает результат подстановки формул (4.5) в подынтегральное выражение формулы (4.4). Вариация этого интеграла легко вычисляется путем применения хорошо известной из вариационного исчисления формулы Эйлера

$$\delta J = \oint \left[\frac{\partial g}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial g}{\partial y'} \right) \right] \delta y dx.$$

Учитывая, что $\delta y dx$ характеризует величину элемента площади, ограниченной кривыми Γ и Γ' , можно заключить, что каждой единице площади между кривыми Γ и Γ' соответствует изменение интеграла (3.4), равное

$$\frac{\partial g}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial g}{\partial y'} \right)$$

Следует заметить, что при применении только что описанного способа вычисления могут встретиться трудности при вычислении вариаций для участков кривой Γ , проходящих параллельно оси координат. Этих

трудностей легко избежать, если при вычислении вариации интеграла (4.4) воспользоваться представлением кривой Γ в параметрической форме, положив, например, $y = y(s)$, $x = x(s)$, где s — параметр, совпадающий для исходного положения кривой с длиной дуги между рассматриваемой точкой и некоторой другой фиксированной точкой. Вычисления показывают, что на каждую единицу площади между кривыми приходится изменение величины интеграла (4.4), равное

$$-\frac{1}{k} \left[2 \frac{\partial \varphi}{\partial n} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial n^2} + \frac{1}{R} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial n} \right)^2 + 2 \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial n} \frac{\partial \varphi}{\partial s} \right) \right] - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial n} \right)^2 - \varphi \frac{\partial^2 \varphi}{\partial n^2} + \frac{\partial}{\partial s} \left(\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial s} \right)$$

Здесь R — радиус кривизны контура.

Легко заметить, что приведенные выше рассуждения не связаны со специальным видом оператора, для которого разыскиваются собственные значения; они могут непосредственно применяться при построении вариационных формул для других задач, где участвуют несимметричные дифференциальные операторы высших порядков.

Поступила 4 XII 1954

ЛИТЕРАТУРА

1. П р а т у с е в и ч Я. А. Вариационные методы в строительной механике, Гостехиздат, 1948