Прикладная математика и механика. Том XIX, 1955
Институт механики Академии наук Союза ССР

ПЕРВАЯ ОСНОВНАЯ ЗАДАЧА ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ДЛЯ ПРОСТРАНСТВА С ПЛОСКОЙ КРУГЛОЙ ЩЕЛЬЮ

В. И. Моссаковский

(Днепропетровск)

Изотропное упругое тело бесконечно больших размеров (упругое пространство) ослаблено плоской круглой щелью. Введем систему координат таким образом, чтобы щель лежала в плоскости $z=0$, начало координат поместим в центре щели. Для полного решения первой основной задачи теории упругости для пространства, ослабленного плоской круглой щелью, достаточно рассмотреть четыре частных случая, когда на сторонах щели задано

$$\begin{gathered}\sigma_z(x,y,+0)=\sigma_z(x,y,-0)=F_1(x,y)\\ \tau_{xz}(x,y,+0)=\tau_{xz}(x,y,-0)=\tau_{yz}(x,y+0)=\tau_{yz}(x,y)=0\end{gathered}\tag{0.1}$$

$$\begin{gathered}\sigma_z(x,y,+0)=-\sigma_z(x,y,-0)=F_2(x,y)\\ \tau_{xz}(x,y,+0)=\tau_{xz}(x,y,+0)=\tau_{yz}(x,y,+0)=\tau_{yz}(x,y,-0)=0\end{gathered}\tag{0.2}$$

$$\begin{gathered}\tau_{xz}(x,y,+0)=\tau_{xz}(x,y,-0)=F_3(x,y)\\ \sigma_z(x,y,+0)=\sigma_z(x,y,-0)=\tau_{yz}(x,y,+0)=\tau_{yz}(x,y,-0)=0\end{gathered}\tag{0.3}$$

$$\begin{gathered}\tau_{xz}(x,y,+0)=-\tau_{xz}(x,y,-0)=F_4(x,y)\\ \sigma_z(x,y,-0)=\sigma_z(x,y,-0)=\tau_{yz}(x,y,+0)=\tau_{yz}(x,y,-0)=0\end{gathered}\tag{0.4}$$

и на бесконечности отсутствуют напряжения.

Первый из указанных частных случаев рассмотрен в работе М. Я. Леонова [1]. Четвертый может быть сведен к решению одной смешанной задачи теории упругости для полупространства, исследованной в статье М. Я. Леонова [2]. Решение остальных случаев проводится в настоящей работе. Как будет показано ниже, решение С. Г. Михлина [3] более общей задачи о напряжениях в пространстве, ослабленном одной или несколькими щелями, лежащими в одной плоскости, является ошибочным.

1. Рассмотрим второй случай. Нетрудно видеть, что напряженное состояние является антисимметричным относительно плоскости $z=0$. Для полупространства $z\leqslant 0$ имеем граничные условия

$$\begin{gathered}\sigma_z(x,y,0)=F_2(x,y),\qquad \tau_{xz}(x,y,0)=\tau_{yz}(x,y,0)=0 \quad \text{в } S\\ \sigma_z(x,y,0)=u(x,y,0)=v(x,y,0)=0 \quad \text{в } S^*\end{gathered}\tag{1.1}$$

где S — часть плоскости $z=0$, занятая щелью, S^* — остальная часть.

Решение ищем в виде [4]

$$u=\varphi_1+z\frac{\partial\psi}{\partial x},\qquad v=\varphi_2+z\frac{\partial\psi}{\partial y},\qquad w=\varphi_3+z\frac{\partial\psi}{\partial z}\tag{1.2}$$

где φ_1, φ_2, φ_3, ψ — гармоничные функции, связанные соотношением

$$\frac{\partial\psi}{\partial z}=\frac{1}{4\nu-3}\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}+\frac{\partial\varphi_2}{\partial y}+\frac{\partial\varphi_3}{\partial z}\right)\tag{1.3}$$

На плоскости $z = 0$ имеет место

$$\sigma_z(x, y, 0) = (2\mu + \lambda)\frac{\partial}{\partial z}(\varphi_3 + \psi) + \lambda\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial x} + \frac{\partial\varphi_2}{\partial y}\right)$$

$$\tau_{xz}(x, y, 0) = \mu\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial z} + \frac{\partial\varphi_3}{\partial x} + \frac{\partial\psi}{\partial x}\right), \qquad \tau_{yz}(x, y, 0) = \mu\left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial z} + \frac{\partial\varphi_3}{\partial y} + \frac{\partial\psi}{\partial y}\right)$$

Введем гармоническую в полупространстве $z \leqslant 0$ функцию $\varphi_4(x, y, z)$ соотношением

$$\psi = \frac{1}{4\nu - 3}(\varphi_4 + \varphi_3)$$

Тогда из (1.3) следует

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial x} + \frac{\partial\varphi_2}{\partial y} = \frac{\partial\varphi_4}{\partial z}$$

Из условий (1.1) получим

$$\frac{\partial}{\partial z}[(2\mu + \lambda)(\varphi_3 + \psi) + \lambda\varphi_4] = \begin{cases} F_2(x, y) & \text{в } S \\ 0 & \text{в } S^* \end{cases}$$

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial z} + \frac{\partial\varphi_3}{\partial x} + \frac{\partial\psi}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial\varphi_2}{\partial z} + \frac{\partial\varphi_3}{\partial y} + \frac{\partial\psi}{\partial y} = 0 \quad \text{в } S \tag{1.4}$$

$$\varphi_1 = \varphi_2 = 0 \quad \text{в } S^* \tag{1.5}$$

Условия (1.4) и (1.5) дают

$$\varphi_3 + \psi - \varphi_4 = \Phi(x, y) \quad \text{в } S, \qquad \frac{\partial\varphi_4}{\partial z} = 0 \quad \text{в } S^*$$

где $\Phi(x, y)$ — гармоническая в S неизвестная функция.

Пусть $F_2(x, y)$ представляет собой тригонометрический полином:

$$F_2(x, y) = F_0(\rho) + F_1^s(\rho)\sin\varphi + F_1^c(\rho)\cos\varphi + \cdots$$
$$\cdots + F_n^s(\rho)\sin n\varphi + F_n^c(\rho)\cos n\varphi$$

Гармонические функции φ_1, φ_2, φ_3, φ_4, ψ будем искать в виде суммы двух гармонических функций

$$\psi = \psi_1 + \psi_2, \qquad \varphi_i = \varphi_{i1} + \varphi_{i2} \qquad (i = 1, 2, 3, 4) \tag{1.6}$$

в следующей последовательности.

а) Решая задачу Неймана для полупространства $z \leqslant 0$, из условия

$$\frac{\partial}{\partial z}[(2\mu + \lambda)(\varphi_{31} + \psi_1) + \lambda\varphi_{41}] = \begin{cases} F_2(x, y) & \text{в } S \\ 0 & \text{в } S^* \end{cases} \tag{1.7}$$

находим

$$(2\mu + 1)(\varphi_{31} + \psi_1) + \lambda\varphi_{41} = P(x, y) \quad \text{в } S \tag{1.8}$$

где

$$P(x, y) = P_0(\rho) + P_1^s(\rho)\sin\varphi + P_1^c(\rho)\cos\varphi + \cdots$$
$$\cdots + P_n^s(\rho)\sin n\varphi + P_n^c(\rho)\cos n\varphi$$

Формула для определения $P_i(\rho)$ по известным $F_i(\rho)$ выведена в § 2.

б) Положив

$$\psi_1 = \frac{1}{4\nu - 3}(\varphi_{41} + \varphi_{31}), \qquad \varphi_{31} + \psi_1 - \varphi_{41} = 0 \tag{1.9}$$

из формул (1.8), (1.9) находим

$$\varphi_{31} + \psi_1 = \frac{1}{2(\mu+\lambda)} P(x, y) \qquad \text{в } S$$

в) Из условий

$$\varphi_{11} = 0, \quad \frac{\partial \varphi_{11}}{\partial z} = \frac{-1}{2(\mu+\lambda)} \frac{\partial P}{\partial x}, \quad \varphi_{21} = 0, \quad \frac{\partial \varphi_{21}}{\partial z} = \frac{-1}{2(\mu+1)} \frac{\partial P}{\partial y} \quad \text{в } S^* \qquad (1.10)$$

находим значения функций φ_{11}, φ_{21} в S.

Найденные функции φ_{11}, φ_{21}, φ_{31}, φ_{41} и ψ_1 удовлетворяют всем условиям задачи, кроме, может быть, условия

$$\frac{\partial \varphi_{11}}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_{21}}{\partial y} = \frac{\partial \varphi_{41}}{\partial z} \qquad (1.11)$$

Если окажется, что найденная система удовлетворяет условию (1.11), то задача решена.

г) Рассмотрим функцию $U(x, y, z)$, введенную соотношением

$$\frac{\partial U}{\partial z} = \frac{\partial \varphi_{41}}{\partial z} - \frac{\partial \varphi_{11}}{\partial x} - \frac{\partial \varphi_{21}}{\partial y}$$

Из (1.7), (1.9), (1.10) имеем

$$\frac{\partial U}{\partial z} = 0 \quad \text{в } S^*, \qquad \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 0 \quad \text{в } S$$

Функция $U(x, y, z)$ представляет собой тригонометрический полином порядка не выше $n+2$; следовательно, $U(x, y, z)$ в S имеет вид:

$$U(x, y) = \sum_{k=0}^{n+2} (\alpha_k \cos k\varphi + \beta_k \sin k\varphi) \rho^k$$

Отсюда следует [5], [6], что (a — радиус щели)

$$\frac{\partial U}{\partial z} = \sum_{k=0}^{n+2} \frac{\alpha_k' \cos k\varphi + \beta_k' \sin k\varphi}{\sqrt{a^2 - \rho^2}} \rho^k \qquad \text{в } S \qquad (1.12)$$

д) Положив

$$\Phi(x, y) = \sum_{k=0}^{n+2} (\alpha_k \cos k\varphi + \beta_k \sin k\varphi) \rho^k c_k$$

находим функции $\partial \varphi_{42} / \partial z$, φ_{12}, φ_{22} в области S из условий

$$\frac{\partial \varphi_{42}}{\partial z} = 0, \qquad \varphi_{12} = 0, \qquad \varphi_{22} = 0 \qquad \text{в } S^*$$

$$\varphi_{42} = -\frac{2\mu + \lambda}{2(\mu+\lambda)} \Phi(x, y), \quad \frac{\partial \varphi_{12}}{\partial z} = -\frac{\lambda}{2(\mu+\lambda)} \frac{\partial \Phi}{\partial x}, \quad \frac{\varphi_{22}}{\partial z} = -\frac{\lambda}{2(\mu+\lambda)} \frac{\partial \Phi}{\partial y} \quad \text{в } S$$

е) Находим выражение

$$\left(\frac{\partial \varphi_{42}}{\partial z} - \frac{\partial \varphi_{12}}{\partial x} - \frac{\partial \varphi_{22}}{\partial y}\right)_{z=0} = \sum_{k=0}^{n+2} \frac{\alpha_k' \cos k\varphi + \beta_k' \sin k\varphi}{\rho^k / \sqrt{\rho^2 - a^2}} c_k d_k \qquad \text{в } S$$

Если выбрать c_k из условия $c_k d_k = -1$, то функции φ_1, φ_2, φ_3, ψ будут удовлетворять всем условиям задачи.

2. Для $z \leqslant 0$ задана гармоническая функция $U(x, y, z)$, удовлетворяющая условиям

$$\left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)_{z=0} = \begin{cases} F_n(\rho)\cos n\varphi & (\rho < a) \\ 0 & (\rho > a) \end{cases} \tag{2.1}$$

Требуется определить значения $U(x, y, 0)$.

Эта задача представляет частный случай задачи Неймана для полупространства, решение которой известно[7]. Ниже выводятся формулы, более удобные для вычислений в данной задаче.

Очевидно, что искомая функция имеет вид:

$$U(x, y, z) = U_n(\rho, z)\cos n\varphi$$

Функция $U_n(\rho_{10})$, $(\partial U_n / \partial z)_{z=0}$ представим в виде[8]

$$\begin{gathered} U_n(\rho, 0) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{c-i\infty}^{c+i\infty} F(s)\,\frac{2^{-s}\Gamma(^1/_2 - {}^1/_2 s + {}^1/_2 n)}{\Gamma(^1/_2 + {}^1/_2 s + {}^1/_2 n)}\,\rho^{s-1}ds \\ \left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)_{z=0} = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{c-i\infty}^{c+i\infty} F(s)\,\frac{2^{1-s}\Gamma(1 - {}^1/_2 s + {}^1/_2 n)}{\Gamma(^1/_2 s + {}^1/_2 n)}\,\rho^{s-2}ds \end{gathered} \tag{2.2}$$

Из (2.1), (2.2) получим

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{c-i\infty}^{c+i\infty} F(s)\,\frac{2^{1-s}\Gamma(1 - {}^1/_2 s + {}^1/_2 n)}{\Gamma(^1/_2 s + {}^1/_2 n)}\,\rho^{s-2}ds = \begin{cases} F_n(\rho) & (\rho < a) \\ 0 & (\rho > a) \end{cases} \tag{2.3}$$

Воспользовавшись формулой

$$\int\limits_t^\infty \rho^{-2\alpha-2\beta-1}(\rho^2 - t^2)^{\beta-1}d\rho = \frac{1}{2}\,\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}\,t^{-2\alpha} \tag{2.4}$$

приведем (2.3) к виду (2.5)

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{c-i\infty}^{c+i\infty} F(s)\,\frac{2^{-s}\Gamma(^1/_2)\Gamma(^1/_2 - {}^1/_2 s + {}^1/_2 n)}{\Gamma(^1/_2 s + {}^1/_2 n)}\,t^{s-n-1}ds = \begin{cases} \displaystyle\int\limits_t^a \frac{F_n(\rho)\,\rho^{1-n}d\rho}{\sqrt{\rho^2 - t^2}} & (t < a) \\ 0 & (t > a) \end{cases}$$

Из (2.5), используя формулу

$$\int\limits_0^r t^{2\alpha-1}(r^2 - t^2)^{\beta-1}dt = \frac{1}{2}\,\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}\,r^{2\alpha+2\beta-2} \tag{2.6}$$

получим

$$\begin{gathered} \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{c-i\infty}^{c+i\infty} F(s)\,\frac{2^{-1-s}\Gamma(^1/_2)^2\,\Gamma(^1/_2 - {}^1/_2 s + {}^1/_2 n)}{\Gamma(^1/_2 + {}^1/_2 s + {}^1/_2 n)}\,r^{s+n-1}\,ds = \\ = \int\limits_0^{\min(r,a)} \frac{t^{2n}dt}{\sqrt{r^2 - t^2}}\int\limits_t^a \frac{F_n(\rho)\,\rho^{1-n}d\rho}{\sqrt{\rho^2 - t^2}} \end{gathered} \tag{2.7}$$

Сравнивая формулы (2.2) и (2.7), получаем формулу для $U_n(r, 0)$:

$$U_n(r, 0) = \frac{2}{\pi r^n}\int\limits_0^{\min(r,a)} \frac{t^{2n}dt}{\sqrt{r^2 - t^2}}\int\limits_t^a \frac{F_n(\rho)\,\rho^{1-n}}{\sqrt{\rho^2 - t^2}}\,d\rho \tag{2.8}$$

При $r < a$ (2.8) можно привести к виду

$$U_n(r, 0) = \frac{2}{\pi r^n}\left\{\int_0^r F_n(\rho)\rho^{1+n}\int_0^{1/2\pi}\frac{\sin^{2n}x dx}{\sqrt{r^2-\rho^2\sin^2 x}} + \right.$$

$$\left. + r^{2n}\int_r^a F_n(\rho)\rho^{1-n}\int_0^{1/2\pi}\frac{\sin^{2n}x dx}{\sqrt{\rho^2-r^2\sin^2 x}}\right\} \tag{2.9}$$

Формула (2.9) для случая $n = 0$ выведена Шлейхером [9].

3. В дальнейшем нам понадобится решение одной смешанной задачи теории потенциала для полупространства. Имеем граничные условия для гармонической в полупространстве $z \leqslant 0$ функции $U_n(\rho, z)\cos n\varphi$:

$$\left(\frac{\partial U_n}{\partial z}\right)_{z=0} = f_n(\rho) \quad (\rho < a), \qquad U_n(\rho, 0) = \varphi_n(\rho) \quad (\rho > a) \tag{3.1}$$

Требуется определить $U_n(\rho, 0)$ при $\rho < a$ и $(\partial U_n / \partial z)_{z=0}$ при $\rho > a$. Подставив представления $U_n(\rho, 0)$, $(\partial U_n / \partial z)_{z=0}$ согласно (2.3) в условия (3.1), получим «парное» интегральное уравнение [10]:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} F(s)\frac{2^{1-s}\Gamma(1-{}^1/_2 s+{}^1/_2 n)}{\Gamma({}^1/_2 s+{}^1/_2 n)}\rho^{s-2}ds = f_n(\rho) \quad (\rho < a) \\ \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} F(s)\frac{2^{-s}\Gamma({}^1/_2-{}^1/_2 s+{}^1/_2 n)}{\Gamma({}^1/_2+{}^1/_2 s+{}^1/_2 n)}\rho^{s-1}ds = \varphi_n(\rho) \quad (\rho > a) \end{aligned} \tag{3.2}$$

Воспользовавшись формулами (2.4), (2.6), приведем (3.2) к виду

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} F(s)\frac{2^{1-s}\Gamma({}^1/_2)\Gamma(1-{}^1/_2 s+{}^1/_2 n)}{\Gamma({}^1/_2+{}^1/_2 s+{}^1/_2 n)}x^s ds = A_n(x) \tag{3.3}$$

где

$$A_n(x) = 2x^{1-n}\int_0^x \frac{f_n(\rho)\rho^{1+n}}{\sqrt{x^2-\rho^2}}d\rho \qquad (x < a)$$

$$A_n(x) = -2x^{2+n}\frac{d}{dx}\,x\int_x^\infty \frac{\varphi_n(\rho)\rho^{-1-n}}{\sqrt{\rho^2-x^2}}d\rho \quad (a < x)$$

Для нахождения значений $U_n(\sigma, 0)$ умножим обе части равенства (3.3) на $x(x^2-\rho^2)^{-1/2}$ и проинтегрируем в интервале $\rho < x < \infty$, воспользовавшись при этом (2.4). Сравнив полученный контурный интеграл с интегралом в (3.2), будем иметь

$$U_n(\rho, 0) = \frac{\rho^n}{\pi}\int_\rho^\infty \frac{A_n(x)x^{-1-n}}{\sqrt{x^2-\rho^2}}dx \tag{3.4}$$

Аналогично получим формулу

$$\left(\frac{\partial U_n}{\partial z}\right)_{z=0} = \frac{\rho^{-1-n}}{\pi}\frac{d}{d\rho}\int_0^\rho \frac{A_n(x)x^n}{\sqrt{\rho^2-x^2}}dx \tag{3.5}$$

4. В виде примера решения задачи § 1 рассмотрим случай $F_2(x, y) = q$ (где q — постоянная). Функцию $P(x, y)$ (в нашем случае осесимметричную) представим в виде

$$P(x, y) = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} F(s)\frac{2^{-s}\Gamma({}^1/_2-{}^1/_2 s)}{\Gamma({}^1/_2+{}^1/_2 s)}\rho^{s-1}ds$$

где $F(s)$ определяется из уравнения

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{c-i\infty}^{c+i\infty} F(s)\frac{2^{1-s}\Gamma(1-{}^1/_2 s)}{\Gamma({}^1/_2 s)}\rho^{s-2}ds=\begin{cases} q & (\rho<a)\\ 0 & (\rho>a)\end{cases} \tag{4.1}$$

Используя (3.4), (3,5) для значений φ_{11} и φ_{21} в S получаем формулы

$$\varphi_{11}=-\frac{\rho\cos\varphi}{(\mu+\lambda)\pi}\int\limits_{\rho}^{a}\frac{x^{-2}dx}{\sqrt{x^2-\rho^2}}\left[\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{c-i\infty}^{c+i\infty}F(s)\frac{2^{-1-s}(s-1)\Gamma({}^1/_2)\Gamma({}^1/_2-{}^1/_2 s)}{\Gamma(1+{}^1/_2 s)}x^s ds\right]$$

$$\varphi_{21}=-\frac{\rho\sin\varphi}{(\mu+\lambda)\pi}\int\limits_{\rho}^{a}\frac{x^{-2}dx}{\sqrt{x^2-\rho^2}}\left[\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{c-i\infty}^{c+i\infty}F(s)\frac{2^{-1-s}(s-1)\Gamma({}^1/_2)\Gamma({}^1/_2-{}^1/_2 s)}{\Gamma(1+{}^1/_2 s)}x^s ds\right]$$

Отсюда находим

$$\frac{\partial\varphi_{11}}{\partial x}+\frac{\partial\varphi_{21}}{\partial y}=\frac{1}{(\mu+\lambda)\pi}\frac{-1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\rho^2\int\limits_{\rho}^{a}\frac{x^{-2}dx}{\sqrt{x^2-\rho^2}}\times$$

$$\times\left[\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{c-i\infty}^{c+i\infty}F(s)\frac{2^{-1-s}(s-1)\Gamma({}^1/_2)\Gamma({}^1/_2-{}^1/_2 s)}{\Gamma(1-{}^1/_2 s)}x^s ds\right]$$

$$=\frac{1}{2(\mu+\lambda)}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{c-i\infty}^{c+i\infty}F(s)\frac{2^{1-s}\Gamma(1-{}^1/_2 s)\rho^{s-2}}{\Gamma({}^1/_2 s)}ds+\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left\{\frac{\rho^2}{\pi(\mu+\lambda)}\int\limits_{a}^{\infty}\frac{x^{-2}dx}{\sqrt{x^2-\rho^2}}\times\right.$$

$$\left.\times\left[\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{c-i\infty}^{c+i\infty}F(s)\frac{2^{-1-s}(s-1)\Gamma({}^1/_2)\Gamma({}^1/_2-{}^1/_2 s)}{\Gamma(1+{}^1/_2 s)}x^s ds\right]\right\} \tag{4.2}$$

Значения первого интеграла находим из (4.2). Для вычисления второго интеграла умножим (4.2) на ρ и проинтегрируем от 0 до ρ:

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{c-i\infty}^{c+i\infty}F(s)\frac{2^{-s}\Gamma(1-{}^1/_2 s)}{\Gamma(1+{}^1/_2 s)}\rho^s ds=\begin{cases}{}^1/_2 q\rho^2 & (\rho<a)\\ {}^1/_2 qa^2 & (\rho>a)\end{cases} \tag{4.3}$$

Из (4.5), используя (2.5), получим

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{c-i\infty}^{c+i\infty}F(s)\frac{2^{-1-s}\Gamma({}^1/_2-{}^1/_2 s)\Gamma({}^1/_2)(s-1)}{\Gamma(1+{}^1/_2 s)}x^s ds=-\frac{qa^2\pi}{4}\qquad(a<x<\infty) \tag{4.4}$$

Подставив значение интеграла из (4.4) в (4.2), найдем

$$\frac{\partial\varphi_{11}}{\partial x}+\frac{\partial\varphi_{12}}{\partial y}=\frac{q}{2(\mu+\lambda)}-\frac{qa}{4(\mu+\lambda)\sqrt{a^2-\rho^2}}$$

С другой стороны, из (1.8) и (1.9), принимая во внимание, что $F_2(x,y)=q$, имеем

$$\left(\frac{\partial\varphi_{41}}{\partial z}\right)_{z=0}=\frac{q}{2(\mu+\lambda)}\qquad \text{в } S$$

Отсюда

$$\left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)_{z=0}=\frac{qa}{4(\mu+\lambda)\sqrt{a^2-\rho^2}}\qquad \text{в } S$$

Выбирая $\Phi(x,y)$ в виде $\Phi(x,y)=\alpha$, имеем условия

$$\varphi_{42}(x,y,0)=-\frac{2\mu+\lambda}{2(\mu+\lambda)}\alpha\quad \text{в } S,\qquad \left(\frac{\partial\varphi_{42}}{\partial z}\right)_{z=0}=0\quad \text{в } S^*$$

Воспользовавшись формулами статьи [6], получим

$$\left(\frac{\partial\varphi_{42}}{\partial z}\right)_{z=0} = -\frac{\alpha\,(2\mu+\lambda)}{\pi\,(\mu+\lambda)}\frac{1}{\sqrt{a^2-\rho^2}}$$

С другой стороны, φ_{12}, φ_{22} равны нулю. Таким образом,

$$\alpha = \frac{q\alpha\pi}{4\,(2\mu+\lambda)}$$

Определим касательные напряжения на плоскости $z=0$. Из условий (1.10) найдем значение $(\partial\varphi_{11}/\partial z)_{z=0}$ в S^*:

$$\left(\frac{\partial\varphi_{11}}{\partial z}\right)_{z=0} = -\frac{\cos\varphi}{\pi\,(\mu+\lambda)\,\rho^2}\frac{\partial}{\partial\rho}\int_0^a\frac{x\,dx}{\sqrt{\rho^2-x^2}}\times$$

$$\times\left[\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}F(s)\,\frac{2^{-1-s}\,(s-1)\,\Gamma(^1/_2)\,\Gamma(^1/_2-{}^1/_2\,s)\,s}{\Gamma(1+{}^1/_2\,s)}\,x\,ds\right] = -\frac{\cos\varphi}{2\,(\mu+\lambda)}\frac{\partial P}{\partial\rho} +$$

$$+\frac{\cos\varphi}{\pi\rho^2\,(\mu+\lambda)}\frac{\partial}{\partial\rho}\int_a^\rho\frac{x\,dx}{\sqrt{\rho^2-x^2}}\left[\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}F(s)\,\frac{2^{-1-s}\,(s-1)\,\Gamma(^1/_2)\,\Gamma(^1/_2-{}^1/_2\,s)}{\Gamma(1+{}^1/_2\,s)}\,x^s ds\right]$$

Контурный интеграл вычислен и равен $-{}^1/_4\,qa^2\pi$. Таким образом,

$$\left(\frac{\partial\varphi_{11}}{\partial z}\right)_{z=0} = -\frac{\cos\varphi}{2\,(\mu+\lambda)}\frac{\partial P}{\partial\rho} - \frac{qa^2\cos\varphi}{4\rho\,(\mu+\lambda)\sqrt{\rho^2-a^2}}\qquad \text{в } S^*$$

С другой стороны,

$$\varphi_{31}+\psi_1 = \frac{P}{2\,(\mu+\lambda)}$$

и, следовательно, в силу независимости $P(x, y)$ от φ

$$\frac{\partial\varphi_{31}}{\partial x}+\frac{\partial\psi_1}{\partial x} = \frac{\cos\varphi}{2\,(\mu+\lambda)}\frac{\partial P}{\partial\rho}$$

Из условий

$$\varphi_{32}+\psi_2 = \frac{\alpha\lambda}{2\,(\mu+\lambda)}\quad \text{в } S,\qquad \left[\frac{\partial}{\partial z}\left(\varphi_{32}+\psi_2\right)\right]_{z=0} = 0\quad \text{в } S^*$$

находим

$$\varphi_{32}+\psi_2 = \frac{\alpha\lambda}{2\,(\mu+\lambda)}\frac{2}{\pi}\arcsin\frac{a}{\rho}\qquad \text{в } S^*$$

Отсюда

$$\frac{\partial\varphi_{32}}{\partial x}+\frac{\partial\psi_2}{\partial x} = -\frac{a\alpha\lambda\cos\varphi}{\pi\,(\mu+\lambda)\,\rho\sqrt{\rho^2-a^2}}$$

Таким образом, окончательно

$$\tau_{xz} = -\frac{\mu\,qa^2\cos\varphi}{2\,(2\mu+\lambda)\,\rho\sqrt{\rho^2-a^2}}\quad \text{в } S^* \tag{4.5}$$

5. В третьем случае напряженное состояние является антисимметричным относительно плоскости $z=0$. Для полупространства $z\leqslant 0$ имеем

$$\tau_{xz} = F_3(x, y),\qquad \tau_{yz}=\sigma_z=0\quad \text{в } S,\qquad \sigma_z = u = v = 0\quad \text{в } S^*$$

Переходя к функциям напряжения, получим

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial z}+\frac{\partial\varphi_3}{\partial x}+\frac{\partial\psi}{\partial x} = \frac{F_3(x, y)}{\mu},\qquad \frac{\partial\varphi_2}{\partial z}+\frac{\partial\varphi_3}{\partial y}+\frac{\partial\psi}{\partial y} = 0\quad \text{в } S \tag{5.1}$$

$$\varphi_1 = \varphi_2 = 0\qquad \text{в } S^*$$

Равенства

$$(2\mu+\lambda)(\varphi_3+\psi)+\lambda\varphi_4=0, \quad \psi=\frac{1}{4\nu-3}(\varphi_3+\psi) \tag{5.2}$$

выполняются при $z\leqslant 0$ тождественно. Из (5.1) получим

$$-\varphi_4+\varphi_3+\psi=P(x, y)+\Phi(x, y) \quad \text{в } S, \qquad \left(\frac{\partial\varphi_4}{\partial z}\right)_{z=0}=0 \quad \text{в } S^*$$

где $P(x, y)$ — частное решение уравнения

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 P}{\partial y^2}=\frac{1}{\mu}\frac{\partial F_3}{\partial x}$$

$\Phi(x, y)$ — неизвестная пока гармоническая в S функция.

Функции φ_1, φ_2, φ_3, φ_4, ψ, как и в § 1, ищем в виде суммы двух гармонических функций (1.6) в следующей последовательности.

а) Из условий

$$\varphi_{31}+\psi-\varphi_{41}=P(x, y) \quad \text{в } S, \qquad \left[\frac{\partial}{\partial z}(\varphi_{31}+\psi-\varphi_{41})\right]_{z=0}=0 \quad \text{в } S^* \tag{5.3}$$

находим значения

$$\frac{\partial}{\partial z}(\varphi_{31}+\psi-\varphi_{41})\Big|_{z=0}=Q(x, y) \quad \text{в } S$$

б) По формулам § 3 находим значения φ_{11} и φ_{21} в S из условий

$$\frac{\partial\varphi_{11}}{\partial z}=\frac{F_3}{\mu}-\frac{\lambda}{2(\mu+\lambda)}\frac{\partial P}{\partial x}, \qquad \frac{\partial\varphi_{21}}{\partial z}=-\frac{\lambda}{2(\mu+\lambda)}\frac{\partial P}{\partial y} \quad \text{в } S$$

$$\varphi_{11}=\varphi_{21}=0 \quad \text{в } S^* \tag{5.4}$$

в) Составляем разность

$$\frac{\partial U}{\partial z}=\frac{\partial\varphi_{41}}{\partial z}-\frac{\partial\varphi_{11}}{\partial x}-\frac{\partial\varphi_{21}}{\partial y} \tag{5.5}$$

причем

$$\left(\frac{\partial\varphi_{41}}{\partial z}\right)_{z=0}=\frac{Q(x, y)}{2(\mu+\lambda)} \quad \text{в } S$$

Из (5.1), (5.2), (5.3) имеем

$$\frac{\partial U}{\partial z}=0 \quad \text{в } S^*, \qquad \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}=0 \quad \text{в } S$$

Таким образом, функция dU/dz в S имеет форму (1.12).

г) Выбрав $\Phi(x, y)$, как в § 1 (1.12), находим последовательно φ_{42}, φ_{22}, φ_{12} из условий типа (5.3), (5.4), (5.5). Коэффициенты C_k подбираются так, чтобы выполнялось условие

$$\frac{\partial\varphi_4}{\partial z}-\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}-\frac{\partial\varphi_2}{\partial y}=0 \quad \text{в } S$$

В качестве примера рассмотрим тот случай, когда к краям щели приложены постоянные по величине касательные напряжения τ_{xz} интенсивностью τ. В этом случае $F_3(x, y)=\tau$ (τ — постоянная). Теперь $\partial F_3/\partial x=0$ и, следовательно, $P(x, y)$ можно принять равной нулю.

Функции φ_{41}, φ_{31}, ψ равны нулю тождественно. Из условий (5.4) имеем

$$\varphi_{11} = \frac{2\tau}{\mu\pi}\sqrt{a^2 - \rho^2}, \qquad \varphi_{21} = 0 \qquad \text{в } S$$

Таким образом,

$$\left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)_{z=0} = \frac{2\tau\rho\cos\varphi}{\mu\pi\sqrt{a^2-\rho^2}} \qquad \text{в } S$$

Выберем функцию $\Phi(x, y)$ в виде

$$\Phi(x, y) = \alpha x$$

Имеем условия для φ_{12}, φ_{22}

$$\frac{\partial\varphi_{12}}{\partial z} = -\frac{\lambda\alpha}{2(\mu+\lambda)} \quad \text{в } S, \qquad \varphi_{12} = 0 \quad \text{в } S^* \tag{5.6}$$

$$\frac{\partial\varphi_{22}}{\partial z} = 0 \quad \text{в } S, \qquad \varphi_{22} = 0 \quad \text{в } S^*$$

Из условий (5.6) находим, что

$$\varphi_{12} = \frac{-\lambda\alpha}{\pi(\mu+\lambda)}\sqrt{a^2 - \rho^2}, \qquad \varphi_{22} = 0 \qquad \text{в } S$$

Находим $\partial\varphi_{12}/\partial z$ в S из условий

$$\varphi_{12} = -\frac{2\mu+\lambda}{2(\mu+\lambda)}\alpha x \quad \text{в } S, \qquad \frac{\partial\varphi_{42}}{\partial z} = 0 \quad \text{в } S^*$$

в виде

$$\frac{\partial\varphi_{42}}{\partial z} = -\frac{2(2\mu+\lambda)\alpha\rho\cos\varphi}{\pi(\mu+\lambda)\sqrt{a^2-\rho^2}}$$

Таким образом, имеем

$$\frac{\partial\varphi_4}{\partial z} - \frac{\partial\varphi_1}{\partial x} - \frac{\partial\varphi_2}{\partial y} = \frac{\rho\cos\varphi}{\sqrt{a^2-\rho^2}}\left[\frac{2\tau}{\mu\pi} - \frac{\lambda\alpha}{\pi(\mu+\lambda)} - \frac{2(2\mu+\lambda)\alpha}{\pi(\mu-\lambda)}\right]$$

Приравнивая выражение в скобках нулю, получим

$$\alpha = \frac{2\tau(\mu+\lambda)}{\mu(4\mu+3\lambda)}$$

После несложных вычислений для перемещений получаем

$$u(x, y) = \frac{4\tau(2\mu+\lambda)}{\pi\mu(4\mu+3\lambda)}\sqrt{a^2 - \rho^2} \qquad v(x, y) = 0 \qquad \text{в } S \tag{5.7}$$

6. В четвертом случае напряженное состояние является симметричным относительно плоскости $z = 0$ и, следовательно, для полупространства $z \leqslant 0$ будем иметь граничные условия

$$\sigma_z = \tau_{yz} = 0, \qquad \tau_{xz} = F_4(x, y) \quad \text{в } S, \qquad w = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0 \quad \text{в } S^* \tag{6.1}$$

Задача теории упругости для полупространства с граничными условиями типа (6.1) рассмотрена в статье М. Я. Леонова [2].

7. В статье С. Г. Михлина [3] рассмотрена первая основная задача теории упругости для пространства, разрезанного вдоль конечного числа плоских щелей, расположенных в плоскости $z=0$. К обеим сторонам щелей приложена непрерывно распределенная нормальная нагрузка. Совокупность областей плоскости $z=0$, соответствующих щелям, обозначена через S, дополнительная к ним область — через Σ, а бесконечное пространство, разрезанное вдоль S, через D. С. Г. Михлин доказывает следующую лемму.

Лемма. Если касательные напряжения τ_{xz} и τ_{yz} равны нулю на S, то они равны нулю на всей плоскости $z=0$.

Воспользовавшись общим интегралом в форме (1.2) и использовав условие, что τ_{xz}, τ_{yz} равны нулю на S, имеем

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial z}+\frac{\partial\psi}{\partial x}+\frac{\partial\varphi_3}{\partial x}=0, \qquad \frac{\partial\varphi_2}{\partial z}+\frac{\partial\psi}{\partial y}+\frac{\partial\varphi_3}{\partial y}=0 \qquad \text{на } S \tag{7.1}$$

Функции в левых частях (7.1) гармонические в D и равны нулю на S. Отсюда С. Г. Михлин ошибочно заключает, что они равны тождественно нулю в D и, следовательно, равны нулю на Σ. В дальнейшем доказывается следующее положение, также являющееся ошибочным.

На верхних и нижних краях щелей приложены только нормальные усилия:

$$\sigma_z \begin{cases} f^{(1)}(x, y) & \text{на верхней стороне } S \\ -f^{(1)}(x, y) & \text{на нижней стороне } S \end{cases}$$

тогда для получения решения достаточно проинтегрировать известное решение Буссине — задачи о сосредоточенной силе, приложенной нормально к границе полупространства.

Пример из § 4 показывает ошибочность как леммы, так и этого утверждения.

В заключение статьи С. Г. Михлин пишет: «Мы рассматривали до сих пор случай, когда на S действуют нормальные силы. В общем случае дело сводится к трехкратному решению смешанной задачи для полупространства». Это утверждение в общем случае также неверно. Как показывают примеры из § 4 и § 5, трудность решения заключается не только в решении смешанной задачи теории потенциала для полупространства, но и в нахождении функции $\Phi(x, y)$ (исключение представляют лишь случаи напряженного состояния, симметричного относительно плоскости щелей).

Поступила 27 XII 1954

ЛИТЕРАТУРА

1. Леонов М. Я. Некоторые задачи и приложения теории потенциала. ПММ, т. IV вып. 5—6, 1940.
2. Леонов М. Я. Общая задача о давлении кругового штампа на упругое полупространство. ПММ, т. XVII, вып. 1, 1953.
3. Михлин С. Г. Решение одной трехмерной задачи теории упругости. ПММ, т. X, вып. 2, 1946.
4. Треффтц Е. Математическая теория упругости, ГТТИ, 1934.
5. Кочин Н. Е. «Теория круглого крыла». ПММ, т. IX, вып. 1, 1945.
6. Моссаковский В. И. Общее решение задачи об определении давления под подошвой круглого в плане штампа без учета сил трения. ИМА АН УССР. Научные записки, т. II, вып. 1, 1953.
7. Соболев С. Л. Уравнения математической физики. ОГИЗ, 1947.
8. Моссаковский В. И. Давление круглого штампа на упругое полупространство. ИМА АН УССР. Научные записки, т. II, вып., 1953.
9. Ишкова А. Г. Точное решение задачи об изгибе круглой пластинки, лежащей на упругом полупространстве, под действием симметричной равномерно распределенной нагрузки. ДАН СССР, т. LVI. № 2, 1947.
10. Титчмарш Е. Введение в теорию интегралов Фурье. ОГИЗ, Гос. изд-во техн.-теорет. литературы, М.—Л., 1948.