Прикладная математика и механика. Том XIX, 1955
Институт механики Академии наук Союза ССР

НЕКОТОРЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ ОТНОСИТЕЛЬНО РАСПРОСТРАНЕНИЯ ПЛАСТИЧЕСКИХ ВОЛН В ПЛАСТИНКАХ
(ОСЕСИММЕТРИЧНЫЙ СЛУЧАЙ)

Н. Кристеску
(Бухарест)

Рассматривается бесконечная пластинка с круглым отверстием. В определенный момент по контуру отверстия внезапно возникает очень большое давление; материал пластинки, первоначально находящийся в упругом состоянии, переходит за предел упругости и становится пластическим. Таким образом, возникают распространяющиеся волны, на которых терпят разрыв производные перемещения u_r и напряжения σ_r. Эта задача, но при помощи других соображений, рассматривалась Фрейбергером [1].

Если же в круглое отверстие пластинки впаян жесткий цилиндрический стержень и к этому стержню внезапно прилагается крутящий момент и если стержень в своем вращении увлекает за собой частицы пластинки, то в этом случае возникают волны сдвига. На этих волнах терпят разрыв производные от u_θ и от $\tau_{r\theta}$. Аналогичную задачу, но для случая плоских деформаций бесконечного пластического тела и бесконечного цилиндрического стержня рассматривали Х. А. Рахматулин [2] и В. В. Соколовский [3].

В указанных задачах пренебрегают одной из составляющих перемещения (u_θ или соответственно u_r). Ниже рассматривается случай, при котором нельзя пренебрегать ни одной из этих составляющих; а также изучается влияние, которое оказывает пренебрежение одной из указанных составляющих перемещений в существующих решениях. Следуя указаниям, данным еще Гугонио [4], рассмотрим лишь те свойства волн, которые непосредственно вытекают из дифференциальных уравнений, оставляя в стороне вопрос их интегрирования. При этом мы сопоставим результаты, которые получаются применением теории малых упруго-пластических деформаций, теории Прандтля-Рейсса и теории Сен-Венана-Леви-Мизеса. Будем считать материал пластинки несжимаемым, так как в этом случае существенно упрощаются расчеты; однако мы дадим некоторые указания для случая сжимаемого материала.

Будем пользоваться цилиндрическими координатами, в которых плоскость $z = 0$ является средней плоскостью пластинки. Ось $0z$ перпендикулярна к этой плоскости, а 0 является центром окружности. Будем считать составляющие напряжения σ_z, τ_{rz} и $\tau_{\theta z}$ малыми по сравнению с остальными. Предположим также, что пластинка является достаточно тонкой, так что составляющие σ_r, σ_θ и $\tau_{r\theta}$ мало изменяются по толщине и, следовательно, их можно заменить со средними значениями.

§ 1. Теория малых упруго-пластических деформаций. Так как напряжения полагаются плоскими, то примем

$$\sigma_z = \tau_{rz} = \tau_{\theta z} = 0 \tag{1.1}$$

При этом среднее нормальное напряжение будет

$$\sigma = \frac{\sigma_r + \sigma_\theta}{3} \tag{1.2}$$

Так как задача является осесимметричной, то, учитывая (1.1), для компонент деформаций имеем

$$\varepsilon_r = \frac{\partial u_r}{\partial r}, \qquad \varepsilon_\theta = \frac{u_r}{r}, \qquad \varepsilon_{r\theta} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r}\right) \tag{1.3}$$

Так как материал считается несжимаемым, то компоненты деформации будут удовлетворять соотношению

$$\varepsilon_r + \varepsilon_\theta + \varepsilon_z = 0 \tag{1.4}$$

Имея в виду (1.4) и (1.2), соотношения между напряжениями и деформациями в рамках теории малых упруго-пластических деформаций можно представить в виде

$$\sigma_r = \frac{S}{E}\left(2\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_r}{r}\right), \quad \tau_{r\theta} = \frac{S}{2E}\left(\frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r}\right) \tag{1.5}$$

где S и E — квадратичные инварианты девиаторов напряжений и деформаций. Инвариант E можно записать в виде

$$E^2 = \varepsilon_r^2 + \varepsilon_\theta^2 + \varepsilon_r\varepsilon_\theta + \varepsilon_{r\theta}^2 \tag{1.6}$$

а инвариант S связан с ним общей зависимостью вида

$$S = F(E) \tag{1.7}$$

Функция F является общей, но монотонно возрастающей. Она будет уточнена позже для некоторых частных случаев.

Дифференцируя соотношения (1.5) по времени и добавляя к ним уравнения движения, для четырех неизвестных u_r, u_θ, σ_r, $\tau_{r\theta}$ получим систему уравнений

$$\rho\frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2} - \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} = \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r}, \qquad \rho\frac{\partial^2 u_\theta}{\partial t^2} - \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} = \frac{2\tau_{r\theta}}{r} \tag{1.8}$$

$$\left[\frac{2S}{E} + \frac{ES' - S}{2E^3}(2\varepsilon_r + \varepsilon_\theta)^2\right]\frac{\partial^2 u_r}{\partial r\partial t} + \left[\frac{S}{2E} + \frac{ES' - S}{2E^3}(2\varepsilon_r + \varepsilon_\theta)\,\varepsilon_{r\theta}\right]\frac{\partial^2 u_\theta}{\partial r\partial t} - \frac{\partial\sigma_r}{\partial t} = \ldots$$

$$\frac{ES' - S}{2E^3}(2\varepsilon_r + \varepsilon_\theta)\,\varepsilon_{r\theta}\frac{\partial^2 u_r}{\partial r\partial t} + \left[\frac{S}{2E} + \frac{ES' - S}{2E^3}\,\varepsilon_{r\theta}^2\right]\frac{\partial^2 u_\theta}{\partial r\partial t} - \frac{\partial\tau_{r\theta}}{\partial t} = \ldots$$

Опущенные члены являются величинами малого порядка и в дальнейшем не имеют существенного значения.

Пусть $V(r, t) = 0$ — уравнение поверхности волны; характеристики системы (1.8) будут представлены определителем

$$\left(\frac{\partial V}{\partial t}\right)^2 \begin{vmatrix} \rho\left(\frac{\partial V}{\partial t}\right)^2 & 0 & -\frac{\partial V}{\partial r} & 0 \\ 0 & \rho\left(\frac{\partial V}{\partial t}\right)^2 & 0 & -\frac{\partial V}{\partial r} \\ L\frac{\partial V}{\partial r} & P\frac{\partial V}{\partial r} & -1 & 0 \\ P\frac{\partial V}{\partial r} & M\frac{\partial V}{\partial r} & 0 & -1 \end{vmatrix} = 0 \tag{1.9}$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$L = \frac{2S}{E} + \frac{ES' - S}{2E^3}(2\varepsilon_r + \varepsilon_\theta)^2, \qquad P = \frac{ES' - S}{2E^3}(2\varepsilon_r + \varepsilon_\theta)\,\varepsilon_{r\theta} \tag{1.10}$$

$$M = \frac{S}{2E} + \frac{ES' - S}{2E^3}\,\varepsilon_{r\theta}^2$$

Раскрывая определитель (1.9), получим

$$\left(\frac{\partial V}{\partial t}\right)^2\left[\rho^2\left(\frac{\partial V}{\partial t}\right)^4 - \rho(M + L)\left(\frac{\partial V}{\partial t}\right)^2\left(\frac{\partial V}{\partial r}\right)^2 + (LM - P^2)\left(\frac{\partial V}{\partial r}\right)^4\right] = 0 \tag{1.11}$$

Отметим, что систему (1.8) можно заменить системой двух уравнений с двумя неизвестными: u_r и u_θ, подставляя выражения напряжения σ_r и $\tau_{r\theta}$ из (1.5) в уравнениях движения. Полученные таким образом характеристики даются попрежнему соотношениями (1.11) с той лишь разницей, что множитель $(\partial V/\partial t)^2$ перед квадратной скобкой будет отсутствовать. Приравнивая этот множитель к нулю, получаем стационарные разрывы для производных

$$\frac{\partial^2 u_r}{\partial r \partial t}, \qquad \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial r \partial t}, \qquad \frac{\partial \sigma_r}{\partial t}, \qquad \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial t}$$

Этот случай исключаем из рассмотрения.

Из (1.11) следует, что единственные распространяющиеся волны, существующие в рассматриваемом случае, даются соотношениями

$$\rho\left(\frac{\partial V}{\partial t}\right)^2 - \lambda_{1,2}\left(\frac{\partial V}{\partial r}\right)^2 = 0, \qquad \left.\begin{matrix}\lambda_1\\ \lambda_2\end{matrix}\right\} = \frac{M + L \pm \sqrt{(M-L)^2 + 4P^2}}{2} \tag{1.12}$$

Таким образом, получаем два типа распространяющихся волн, причем их скорости распространения соответственны:

$$v_{\mathrm{I}}^2 = \frac{\lambda_1}{\rho}, \qquad v_{\mathrm{II}}^2 = \frac{\lambda_2}{\rho} \tag{1.13}$$

Обратим внимание, что эти волны являются действительными лишь при $\lambda_1 > 0$ и $\lambda_2 > 0$. Чтобы доказать это, воспользуемся очевидными соотношениями

$$\lambda_1\lambda_2 = LM - P^2, \qquad \lambda_1 + \lambda_2 = M + L \tag{1.14}$$

Очевидно, что $L > 0$ и $M > 0$, так как эти неравенства приводятся к виду

$$3\varepsilon_\theta^2 + 4\varepsilon_{r\theta}^2 > 0, \qquad (\varepsilon_r + \tfrac{1}{2}\varepsilon_\theta)^2 + \tfrac{3}{4}\varepsilon_\theta^2 > 0$$

Покажем также, что $LM - P^2 > 0$, или

$$\left[\frac{2S}{E} + \frac{ES' - S}{2E^3}(2\varepsilon_r + \varepsilon_\theta)^2\right]\left[\frac{S}{2E} + \frac{ES' - S}{2E^3}\varepsilon_{r\theta}^2\right] - \frac{(ES' - S)^2}{4E^6}(2\varepsilon_r + \varepsilon_\theta)^2\varepsilon_{r\theta}^2 > 0$$

Это неравенство сводится к

$$\left[\frac{2S}{E} + \frac{ES' - S}{2E^3}(2\varepsilon_r + \varepsilon_\theta)^2\right]\frac{S}{2E} + \frac{2S}{E}\,\frac{ES' - S}{2E^3}\varepsilon_{r\theta}^2 > 0$$

и для того, чтобы доказать его, достаточно показать, что

$$\frac{2S}{E} - \frac{S}{2E^3}(2\varepsilon_r + \varepsilon_\theta)^2 - \frac{2S}{E^3}\varepsilon_{r\theta}^2 > 0 \tag{1.15}$$

Но последнее неравенство очевидно, так как оно сводится к $\varepsilon_{r\theta}^2 > 0$. Отсюда следует, что волны (1.12) являются действительными.

Из (1.12) следует, что $\lambda_1 > \lambda_2$ и, следовательно, $v_{\mathrm{I}} > v_{\mathrm{II}}$. Семейства бихарактеристик, соответствующие (1.12), суть

$$\frac{dr}{\lambda_\nu \partial V/\partial r} = \frac{dt}{\rho \partial V/\partial t}, \qquad \text{или} \qquad \frac{dr}{\sqrt{\lambda_\nu}} = \frac{dt}{\pm\sqrt{\rho}} \qquad (\nu = 1, 2) \tag{1.16}$$

Отсюда следует, что они перпендикулярны волнам и являются радиусами-векторами ($\theta = \mathrm{const}$, $z = \mathrm{const}$).

Поверхность волн, как и следовало ожидать, представляют собой круглые цилиндры.

Чтобы установить характер разрывов для указанных выше двух типов волн, рассмотрим условия динамической совместности. Обозначая через α, β, γ, δ коэффициенты скачка, соответственно для производных от u_r, u_θ, σ_r, $\tau_{r\theta}$, условия совместности запишем в виде

$$\begin{aligned} &\rho\left(\frac{\partial V}{\partial t}\right)^2\alpha-\frac{\partial V}{\partial r}\gamma=0, \qquad &&\rho\left(\frac{\partial V}{\partial t}\right)^2\beta-\frac{\partial V}{\partial r}\delta=0 \\ &(L\alpha+P\beta)\frac{\partial V}{\partial r}-\gamma=0, &&(P\alpha+M\beta)\frac{\partial V}{\partial r}-\delta=0 \end{aligned} \tag{1.17}$$

Из первых двух соотношений (1.17) следует, что оба типа волн являются продольными (см. [5] и указанную литературу). Из соотношений (1.17) следует также, что между коэффициентами скачка существуют условия совместности

$$(\lambda_1-L)\alpha-P\beta=0, \qquad (\lambda_1-L)\gamma-P\delta=0 \quad \text{(для волны I)} \tag{1.18}$$

$$P\alpha+(M-\lambda_2)\beta=0, \qquad P\gamma+(M-\lambda_2)\delta=0 \quad \text{(для волны II)} \tag{1.19}$$

Однако, поскольку мы имеем

$$|\lambda_1-L|=\left|\frac{L+M+\sqrt{(L-M)^2+4P^2}}{2}-L\right|\leqslant\left|\frac{L+M+(L-M)+2P}{2}-L\right|=|P|$$

$$|M-\lambda_2|=\left|M-\frac{L+M-\sqrt{(L-M)^2+4P^2}}{2}\right|\leqslant\left|\frac{2M-L-M+(L-M)+2P}{2}\right|=|P|$$

на волне типа I преобладают разрывы производных от u_r и σ_r над производными от u_θ и $\tau_{r\theta}$ $(\alpha>\beta,\ \gamma>\delta)$. На волне типа II имеем обратную картину. Соответствующие отношения преобладания равны (1.20)

$$\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta}=\frac{|P|}{|\lambda_1-L|}>1 \quad \text{(на волне I)}, \qquad \frac{\beta}{\alpha}=\frac{\delta}{\gamma}=\frac{|P|}{|\lambda_2-M|}>1 \quad \text{(на волне II)}$$

Из этих отношений вытекает непосредственно, что чем больше значение множителя $|P|$, тем больше являются некоторые разрывы по сравнению с другими, а также чем меньше значения выражений $|\lambda_1-L|$ и $|\lambda_2-M|$, тем больше разность между разрывами производных от u_r и σ_r и производных от u_θ и $\tau_{r\theta}$. Заметим, что выражения λ_1-L и λ_2-M представляют собой в некотором смысле, как будет видно ниже, разность между скоростями (1.13) общего случая, в котором учитывались обе компоненты перемещения, и скоростям соответствующих частных случаев, когда пренебрегалось одной из компонент перемещения ($u_\theta=0$ и соответственно $u_r=0$).

Из соотношений (1.20) можно найти, зная значения напряжений, соотношения скачков на этих волнах. Однако обратим внимание, что, несмотря на то что на волне I преобладают разрывы производных от u_r и σ_r по отношению к разрывам производных от u_θ и $\tau_{r\theta}$, а на волне II преобладают разрывы производных от u_θ и $\tau_{r\theta}$ над разрывами производных от u_r и σ_r, все же, вообще говоря, на обеих волнах имеем разрывы как для производных от u_r и σ_r, так и для производных от u_θ и $\tau_{r\theta}$.

§ 2. Частные случаи. Для рассмотрения некоторых частных случаев, приведенных ниже, необходимо возвратиться к системе (1.8) и повторить расчеты для каждого частного случая, так как их решение нельзя получить непосредственно путем партикуляризации общего случая, рассмотренного в § 1, из-за того, что часть уравнений (1.8), как будет видно ниже, совершенно исчезает.

1. Случай $u_\theta = 0$. Первый рассматриваемый нами частный случай соответствует равенству

$$u_\theta = 0 \tag{2.1}$$

Этот частный случай соответствует физической задаче, в которой силы, действующие по контуру отверстия, являются нормальными к окружности. Эти силы не сообщают крутящего момента пластинке, а вызывают лишь расширение круглого отверстия. Возникающие таким образом волны не подвергаются более влиянию составляющей напряжения $\tau_{r\theta}$. Следовательно, в этом случае будем иметь $\tau_{r\theta} = \varepsilon_{r\theta} = P_1 = 0$. (Обозначим индексом 1 частное значение соответствующего выражения при равенстве нулю составляющей перемещения u_0.)

При этом оказывается, что система (1.8) сводится к двум уравнениям: первому и третьему. Характеристики этих двух уравнений суть

$$L_1\left(\frac{\partial V}{\partial r}\right)^2 - \rho\left(\frac{\partial V}{\partial t}\right)^2 = 0 \tag{2.2}$$

и, следовательно, скорость распространения равна

$$v_{\mathrm{I}_1}{}^2 = \frac{L_1}{\rho} = \frac{1}{\rho}\left(\frac{3S_1}{2E_1{}^3}\,\varepsilon_\theta{}^2 + \frac{S_1'}{2E_1{}^2}\right) \tag{2.3}$$

Что касается второго и четвертого уравнений системы (1.8), они совершенно исчезают. Таким образом, единственной распространяющейся волной является волна типа I, которую мы будем обозначать через I_1. Волна типа II_1 исчезает. Полученные волны также являются цилиндрическими; условия динамической совместности суть

$$\rho\left(\frac{\partial V}{\partial t}\right)^2 \alpha - \frac{\partial V}{\partial r}\gamma = 0, \qquad L_1\frac{\partial V}{\partial r}\alpha - \gamma = 0 \tag{2.4}$$

На этой волне, следовательно, терпят разрыв только производные от u_r и σ_r. Они второго порядка для u_r и первого порядка для σ_r. Следует отметить, что на волне I_1 существуют лишь разрывы, преобладавшие на волне I.

2. Случай $u_r = 0$. Второй рассматриваемый нами случай соответствует равенству

$$u_r = 0 \tag{2.5}$$

т. е. он является случаем, когда в круглое отверстие пластинки вводится, как было показано выше, цилиндрический стержень, к которому в определенный момент внезапно прилагается крутящий момент, вызывающий появление распространяющихся волн сдвига.

Из (2.5) следует, что в данном случае имеют место также равенства $\sigma_r = \sigma_0 = \varepsilon_r = \varepsilon_\theta = 0$ и $P_2 = 0$. (Обозначим индексом 2 частное значение соответствующего выражения при равенстве нулю составляющей перемещения u_r.) При этом система (1.8) сводится лишь к двум уравнениям: второму и четвертому. Характеристики этой системы даются соотношением

$$M_2\left(\frac{\partial V}{\partial r}\right)^2-\rho\left(\frac{\partial V}{\partial t}\right)^2=0 \tag{2.6}$$

Следовательно, скорость распространения равна

$$v_{\mathrm{II}_2}=\frac{M_2}{\rho}=\frac{S_2'}{2\rho\varepsilon_{r0}^2} \tag{2.7}$$

Что касается первого и третьего из уравнений (1.8), они полностью исчезают. Таким образом в этом случае распространяющейся является волна типа II, которую в данном частном случае будем обозначать через II_2. Волна I_2 исчезает. На волне II_2, как нетрудно увидеть, существуют лишь разрывы производных от u_θ и $\tau_{r\theta}$, т. е. разрывы, преобладавшие на волне II. Эти волны также являются цилиндрическими и продольными. Отметим, что частные скорости (2.3) и (2.7) вообще отличаются от скоростей (1.13), причем они могут быть больше или меньше последних.

§ 3. Материалы различного типа. Возвращаясь к соображениям общего порядка, изложенным в § 1 и 2, посмотрим, что произойдет с ними при некоторых частных случаях соотношения (1.7).

Для идеально-пластических материалов положим $S=\tau_s$ и, следовательно, $S'=0$. Скорости (1.13) принимают вид:

$$\left.\begin{matrix} v_{\mathrm{I}}^2 \\ v_{\mathrm{II}}^2 \end{matrix}\right\}=\frac{\tau_s}{4\rho E^3}\left[\varepsilon_r^2+4\varepsilon_\theta^2+\varepsilon_r\varepsilon_\theta+4\varepsilon_{r\theta}^2\pm\right. \tag{3.1}$$
$$\left.\pm\sqrt{9E^4-6E^2\left[(2\varepsilon_r+\varepsilon_\theta)^2-\varepsilon_{r\theta}^2\right]+(2\varepsilon_r+\varepsilon_\theta)^2+\varepsilon_{r\theta}^2}\;\right]$$

Отсюда следует, что скорости падают при возрастании деформации.

Таким образом, для идеально пластических материалов остаются в силе все соображения § 1, так как существуют оба типа распространяющихся волн. Возвратимся теперь к частным случаям § 2.

Так, например, при $u_\theta=0$ исчезают волны типа II_1, а волны типа I_1 распространяются со скоростью

$$v_{\mathrm{I}_1}^2=\frac{3\tau_s}{2\rho E_1^3}\varepsilon_0^2 \tag{3.2}$$

как следует из (2.3). На этих волнах имеем лишь разрывы, относящиеся к производным от u_r и σ_r. Если же u_r можно считать равным нулю, согласно (2.7) волна типа II_2 перестает распространяться (скорость равна нулю), а волна типа I_2 полностью исчезает.

Следовательно, для идеально пластических материалов существуют, вообще говоря, когда нельзя пренебрегать ни одной из составляющих перемещения, два типа распространяющихся волн. Если же пренебрегаем одной из этих составляющих, волна сдвига II_2 исчезает и продолжает распространяться лишь волна типа I_1. Для материалов с упрочнением, например линейным или степенным, все соображения § 1 и 2 остаются в силе. В отличие от идеально пластических материалов волна сдвига II_3 продолжает распространяться в материалах с упрочнением.

§ 4. Теория Прандтля-Рейсса. Применим к рассматриваемой задаче и теорию Прандтля-Рейсса. При этом соотношения между напряжениями и деформациями представляются в виде

$$2G\frac{\partial e_r}{\partial t}=\frac{\partial s_r}{\partial t}+\omega s_r,\qquad 2G\frac{\partial \varepsilon_{r\theta}}{\partial t}=\frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial t}+\omega\tau_{r\theta} \tag{4.1}$$

Считая материал идеально пластическим, удовлетворяющим условию пластичности Р. Мизеса

$$6S^2=s_r^2+s_\theta^2+s_z^2+6\tau_{r0}^2=6\tau_s^2 \tag{4.2}$$

множитель ω можно представить в виде

$$\omega=\frac{G}{3\tau_s}\left[\frac{\partial^2 u_r}{\partial r\partial t}\sigma_r+3\frac{\partial^2 u_\theta}{\partial r\partial t}\tau_{r0}\right]+\ldots \tag{4.3}$$

В (4.3) опущенные члены являются величинами малого порядка и в дальнейшем не играют существенной роли. Подставляя (4.3) в (4.1) и добавляя уравнения движения, получим систему

$$\begin{gathered}\rho\frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2}-\frac{\partial\sigma_r}{\partial r}=\frac{\sigma_r-\sigma_0}{r},\qquad \rho\frac{\partial^2 u_\theta}{\partial t^2}-\frac{\partial\tau_{r\theta}}{\partial r}=\frac{2\tau_{r0}}{r}\\ \left[4G-\frac{G\sigma_r^2}{3\tau_s^2}\right]\frac{\partial^2 u_r}{\partial r\partial t}-\frac{G\sigma_r\tau_{r0}}{\tau_s^2}\frac{\partial^2 u_\theta}{\partial r\partial t}-\frac{\partial\sigma_r}{\partial t}=\ldots\\ -\frac{G\sigma_r\tau_{r\theta}}{3\tau_s^2}\frac{\partial^2 u_r}{\partial r\partial t}+\left[G-\frac{G\tau_{r\theta}^2}{\tau_s^2}\right]\frac{\partial^2 u_\theta}{\partial r\partial t}-\frac{\partial\tau_{r\theta}}{\partial t}=\ldots\end{gathered} \tag{4.4}$$

опущенные члены также являются величинами малого порядка. Пусть

$$A=4G-\frac{G\sigma_r^2}{3\tau_s^2},\qquad B=-\frac{G\sigma_r\tau_{r\theta}}{\tau^{\ 2}},\qquad C=G-\frac{G\tau_{r\theta}^2}{\tau_s^2} \tag{4.5}$$

Тогда, обозначая попрежнему через $V(r,t)=0$ уравнение поверхность волны, получим для характеристик системы (4.4)

$$\left(\frac{\partial V}{\partial t}\right)^2\begin{vmatrix}\rho\left(\frac{\partial V}{\partial t}\right)^2 & 0 & -\frac{\partial V}{\partial r} & 0\\ 0 & \rho\left(\frac{\partial V}{\partial t}\right)^2 & 0 & -\frac{\partial V}{\partial r}\\ A\frac{\partial V}{\partial r} & B\frac{\partial V}{\partial r} & -1 & 0\\ \frac{B}{3}\frac{\partial V}{\partial r} & C\frac{\partial V}{\partial r} & 0 & -1\end{vmatrix}=0 \tag{4.6}$$

множитель $(\partial V/\partial t)^2$ перед определителем опускаем,— он приводит к некоторым стационарным разрывам. Раскрывая определитель (4.6), получим

$$\rho^2\left(\frac{\partial V}{\partial t}\right)^4-\rho(A+C)\left(\frac{\partial V}{\partial t}\right)^2\left(\frac{\partial V}{\partial r}\right)^2+\left(AC-\frac{B^2}{3}\right)\left(\frac{\partial V}{\partial r}\right)^4=0 \tag{4.7}$$

Это выражение разлагается, так же как и аналогичное ему из § 1, приводя к двум типам распространяющихся волн. На волнах типа I и типа II удовлетворяются соответственно соотношения

$$\varphi_{1,2}\left(\frac{\partial V}{\partial r}\right)^2-\rho\left(\frac{\partial V}{\partial t}\right)^2=0,\qquad \left.\begin{matrix}\varphi_1\\ \varphi_2\end{matrix}\right\}=\tfrac{1}{2}\left(A+C\pm\sqrt{(A-C)^2+\tfrac{4}{3}B^2}\right) \tag{4.8}$$

Соответствующие скорости распространения равны

$$v_I^2 = \frac{\varphi_1}{\rho}, \qquad v_{II}^2 = \frac{\varphi_2}{\rho} \tag{4.9}$$

Для того чтобы эти волны действительно существовали, необходимо показать, что $\varphi_1 > 0$ и $\varphi_2 > 0$, пользуясь соотношениями

$$\varphi_1\varphi_2 = AC - \tfrac{1}{3} B^2, \qquad \varphi_1 + \varphi_2 = A + C \tag{4.10}$$

Легко показать, что $A > 0$ и $C > 0$, так как эти неравенства на основании (4.5), учитывая (4.2), приводятся к следующим:

$$(\sigma_r - 2\sigma_\theta)^2 + 36\tau_{r\theta}^2 > 0, \qquad \frac{G}{6\tau_s^2}(s_r^2 + s_\theta^2 + s_z^2) > 0$$

Кроме того, $AC - {}^1/_3 B^2 > 0$, так как это неравенство принимает вид

$$\left(4G - \frac{G\sigma_r^2}{3\tau_s^2}\right) G - \frac{4G^2\tau_{r\theta}^2}{\tau_s^2} > 0, \qquad \text{или} \qquad \frac{G^2}{9\tau_s^2}(\sigma_r - 2\sigma_\theta)^2 > 0$$

Оказывается, что обе волны действительно существуют и способны распространяться. О них можно сказать все то, что было сказано и о волнах в § 1. Они обладают теми же самыми свойствами, как и предыдущие волны. Естественно, что коэффициенты будут различными и, следовательно, будут различными и скорости. В сущности волны (4.8) будут иметь лишь формальное сходство с волнами (1.12). Отметим вкратце лишь некоторые из их свойств.

Волна типа I распространяется быстрее волны типа II ($\varphi_1 > \varphi_2$). Обе волны являются продольными и цилиндрической формы, а их бихарактеристики суть радиусы-векторы.

Обозначая через α, β, γ, δ коэффициенты скачка, соответственно для производных от u_r, u_θ, σ_r и $\tau_{r\theta}$, условия динамической совместности представим в следующем виде:

$$\begin{aligned} &\rho\left(\frac{\partial V}{\partial t}\right)^2 \alpha - \frac{\partial V}{\partial r}\gamma = 0, \qquad && A\frac{\partial V}{\partial r}\alpha + B\frac{\partial V}{\partial r}\beta - \gamma = 0 \\ &\rho\left(\frac{\partial V}{\partial t}\right)^2 \beta - \frac{\partial V}{\partial r}\delta = 0, \qquad && \frac{B}{3}\frac{\partial V}{\partial r}\alpha + C\frac{\partial V}{\partial r}\beta - \delta = 0 \end{aligned} \tag{4.11}$$

Между коэффициентами скачка существуют соотношения

$$(\varphi_1 - A)\alpha - B\beta = 0, \qquad (\varphi_1 - A)\gamma - B\delta = 0 \quad \text{(на волне I)} \tag{4.12}$$

$$\frac{B}{3}\alpha - (\varphi_2 - C)\beta = 0, \qquad \frac{B}{3}\gamma - (\varphi_2 - C)\delta = 0 \quad \text{(на волне II)} \tag{4.13}$$

Заметим, однако, что мы имеем

$$|\varphi_1 - A| = \left|\tfrac{1}{2}\left(A + C + \sqrt{(A-C)^2 + \tfrac{4}{3}B^2}\right) - A\right| \leqslant$$

$$\leqslant \left|\tfrac{1}{2}\left[A + C + (A - C) + \tfrac{2}{\sqrt{3}}B\right] - A\right| = \tfrac{1}{\sqrt{3}}|B|$$

$$|\varphi_2 - C| < \tfrac{1}{3}|B|$$

Последнее неравенство выполняется, так как путем возведений в квадрат оно сводится к неравенству

$$80(C - A)^4 + \tfrac{212}{3}B^2(C - A)^2 + 16B^4 > 0$$

Из этого замечания вытекает, что на первой волне $\alpha > \beta$ и $\gamma > \delta$, а на второй волне $\alpha < \beta$ и $\gamma < \delta$. Следовательно, как это вытекает из (4.11), на волне I существуют разрывы, относящиеся к производным всех составляющих (u_r, u_θ, σ_r, $\tau_{r\theta}$), но на этой волне разрывы производных от u_r и σ_r имеют преобладающую роль по сравнению с разрывами производных от u_θ и $\tau_{r\theta}$. На волне типа II, хотя также существуют разрывы производных всех составляющих, преобладание разрывов становится обратным. Величину отношений преобладания α/β и γ/δ можно найти из (4.12) и (4.13) лишь после того, как известны значения напряжений.

В частном случае $u_\theta = 0$ волна типа II_1 вырождается, а волна типа I_1 распространяется со скоростью

$$v_{\mathrm{I}_1}{}^2 = \frac{A}{\rho}$$

причем на ней существуют лишь разрывы, относящиеся к производным от u_r и σ_r.

При $u_r = 0$ волна типа I_2 вырождается, а волна типа II_2 распространяется со скоростью

$$v_{\mathrm{II}_2}{}^2 = \frac{C}{\rho}$$

Единственные существующие на ней разрывы относятся к производным от u_θ и $\tau_{r\theta}$. Следует отметить, что в рамках теории Прандтля-Рейсса выражения A и C остаются неизменными для частных случаев, приведенных выше.

Относительно выражений A, B, C можно отметить, что A измеряет скорость волны I_1, выражение C измеряет скорость волны II_2, а выражение B измеряет в некотором смысле разность скоростей v_{I} и v_{I_1}, а также скоростей v_{II} и v_{II_2}. Необходимо подчеркнуть, что из (4.8) непосредственно вытекает, что $v_{\mathrm{I}} > v_{\mathrm{I}_1}$ и $v_{\mathrm{II}} < v_{\mathrm{II}_2}$. Следовательно, пренебрежение составляющими u_θ и $\tau_{r\theta}$ приводит к тому, что волна типа I распространяется медленнее, а пренебрежение составляющими u_r и σ_r приводит к тому, что волна типа II распространяется быстрее. Сравнивая между собой скорости v_{I_1} и v_{II_2}, получаем

$$\begin{aligned}
&v_{\mathrm{I}_1} > v_{\mathrm{II}_2} \qquad \text{при} \qquad 3\tau_s{}^2 + 3\tau_{r\theta}{}^2 - \sigma_r{}^2 > 0\\
&v_{\mathrm{I}_1} < v_{\mathrm{II}_2} \qquad \text{при} \qquad 3\tau_s{}^2 + 3\tau_{r\theta}{}^2 - \sigma_r{}^2 < 0\\
&v_{\mathrm{I}_1} = v_{\mathrm{II}_2} \qquad \text{при} \qquad 3\tau_s{}^2 + 3\tau_{r\theta}{}^2 - \sigma_r{}^2 = 0
\end{aligned}$$

§ 5. Теория Сен-Венана-Леви-Мизеса. В дальнейшем покажем вкратце, что примененная к нашей задаче теория Сен-Венана-Леви-Мизеса не приводит к распространяющимся волнам. Соотношения между напряжениями и скоростями принимают в этом случае следующий вид

$$\frac{\partial v_r}{\partial r} = \lambda\,(2\sigma_r - \sigma_\theta), \qquad \frac{v_r}{r} = \lambda\,(2\sigma_\theta - \sigma_r), \qquad \frac{\partial v_\theta}{\partial r} - \frac{v_\theta}{r} = 6\lambda\tau_{r\theta} \tag{5.1}$$

Исключим множитель пропорциональности λ, вынимая его из последнего соотношения (5.1) и подставляя в остальные два.

Добавляя также уравнения движения, получим систему

$$\rho \frac{\partial v_r}{\partial t} - \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} = \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r}, \qquad \rho \frac{\partial v_\theta}{\partial t} - \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} = \frac{2\tau_{r\theta}}{r} \tag{5.2}$$

$$\frac{\partial v_r}{\partial r} - \frac{2\sigma_r - \sigma_\theta}{6\tau_{r\theta}} \frac{\partial v_\theta}{\partial r} = - \frac{2\sigma_r - \sigma_\theta}{6\tau_{r\theta}} \frac{v_\theta}{r}, \qquad \frac{2\sigma_\theta - \sigma_r}{6\tau_{r\theta}} \frac{\partial v_\theta}{\partial r} = \frac{v_r}{r} + \frac{2\sigma_\theta - \sigma_r}{6\tau_{r\theta}} \frac{v_\theta}{r}$$

Характеристики системы (5.2) даются определителем, разложение которого приводит к

$$\frac{2\sigma_\theta - \sigma_r}{6\tau_{r\theta}} \left(\frac{\partial V}{\partial r}\right)^4 = 0 \tag{5.3}$$

Таким образом, применяя метод характеристик и теорию Сен-Венана-Леви-Мизеса, получаем так называемые вырожденные случаи распространения волн: стационарные разрывы, если помимо (5.3) имеем также $\partial V / \partial t = 0$, или мгновенные распространения, если $\partial v / \partial t \neq 0$. Как и следовало ожидать, тело Сен-Венана-Леви-Мизеса обладает с точки зрения распространения волн теми же свойствами, как и жидкости.

§ 6. Некоторые примечания. Мы пользовались выше тремя теориями, разработанными в сущности для статического случая. Результаты, полученные применением их к динамическим задачам, можно считать первым приближением.

Относительно первых двух используемых теорий, теории малых упруго-пластических деформаций и теории Прандтля-Рейсса, заметим, что обе они приводят в рамках нашей задачи к двум цилиндрическим распространяющимся волнам. Эти волны в общих чертах обладают одинаковыми свойствами и сходственны между прочим с полученными в [6] для случая плоских деформаций волнами. Что касается теории Сен-Венана-Леви-Мизеса, она приводит лишь к крайним случаям распространения волн. Это не происходит, повидимому, вследствие условия несжимаемости, так как и в первых двух теориях мы также считали материал несжимаемым. Дело в том, что в теории Сен-Венана-Леви-Мизеса, в отличие от первых двух, отношение порядков дифференцирования скоростей и напряжения отличается от вытекающего из уравнений движения отношения. В первых двух теориях эти отношения одинаковы.

Во всех приведенных выше рассуждениях мы предполагали материал несжимаемым. Если же предположим материал упругим — сжимаемым, как нетрудно увидеть, при помощи первых двух теорий также получаются два типа распространяющихся волн, но при этом расчеты и коэффициенты сильно усложняются.

Поступила 9 V 1955

ЛИТЕРАТУРА

1. Freiberger W. A Problem in dynamic plasticity: the enlargement of a circular hole in a flat Sheet. Proc. Cambridge Phil. Soc. v. 48, part 1. Jan. 1952.
2. Рахматулин Х. А. О распространении цилиндрических волн при пластических деформациях скручивающий удар. ПММ, т. XII, вып. 1, 1948.
3. Соколовский В. В. Одномерные нестационарные движения вязко-пластической среды. ПММ, т. XIII, вып. 6, 1948.
4. Hugoniot H. Mémoire sur la propagation du mouvement dans un fluide indéfini (première Partie) Journ. de Math. pures et appl., t. III. 1887. Mémoire sur la propagation du mouvement dans un fluide indéfini (seconde Partie) Journ. de Math. pures et appl. v. IV, 1888.
5. Кристеску Н. О волнах нагрузки и разгрузки, возникающих при движении упругой или пластической гибкой нити. ПММ, XVIII, вып. 3, 1954.
6. Cristescu N. Cîteva observatii privind cazul deformatiilor plane axial simetrice, al problemei dinamice a teoriei plasticitatii (teoria Prandtl — Reuss) Com. Acad. RPR, 1955.