

## К ЗАДАЧЕ О СТРУЙНОМ ОБТЕКАНИИ КРИВОЛИНЕЙНОЙ ДУГИ В ОГРАНИЧЕННОМ И БЕЗГРАНИЧНОМ ПОТОКЕ ИДЕАЛЬНОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

Г. Н. Пыхтеев

(Москва)

В работе решается обратная задача отрывного обтекания тел в ограниченном и безграничном потоке, т. е. задается закон изменения скорости и ищется форма обтекаемого тела и форма струй. Задачи такого типа для безотрывного обтекания рассмотрены в работах Г. Г. Тумашева [2,3].

### § 1. Струйное обтекание криволинейного контура в канале.

*1. Постановка задачи.* Рассмотрим отрывное обтекание некоторой симметричной дуги  $L$  потоком идеальной несжимаемой жидкости (фиг. 1), ограниченным двумя параллельными стенками (схема Кирхгофа).

Величина скорости  $v_\infty$  набегающего потока меньше величины скорости  $v_0$  на свободных струях. Обозначим через  $2s_0$  длину дуги обтекаемого контура между точками  $A_1$  и  $A_2$  отрыва струй, а через  $H$  обозначим расстояние между стенками, которое будем называть в дальнейшем шириной канала.

Пусть распределение скоростей по контуру  $L$  задано в виде

$$V = v_0 f(s/s_0) \quad (1.1)$$

где  $f(s/s_0)$  — непрерывная однозначная положительная и ограниченная функция дуговой абсциссы  $s$ , удовлетворяющая условиям  $f(0) = 0$ ,  $f(1) = 1$ ; требуется определить форму обтекаемого контура и найти уравнение струй.

*2. Построение общего решения.* Комплексный потенциал скорости  $W = \varphi + i\psi$  в точке  $O$  разветвления потока, а также функцию тока  $\psi$  на струях примем равными нулю. Тогда область изменения  $W$  будет представлять собой полосу шириной  $Q$ , где  $Q = v_\infty H$  — расход жидкости, с разрезом по положительной полуоси (фиг. 2).

Отобразим область изменения  $W$  на верхнюю полуплоскость переменного  $\zeta$  с соответствием точек, указанным на фиг. 2:

$$W = -\frac{Q}{2\pi} \ln \frac{a^2 - \zeta^2}{a^2}, \quad \ln \frac{a^2 - 1}{a^2} = -\frac{2\varphi_a \pi}{v_\infty H} \quad (1.2)$$

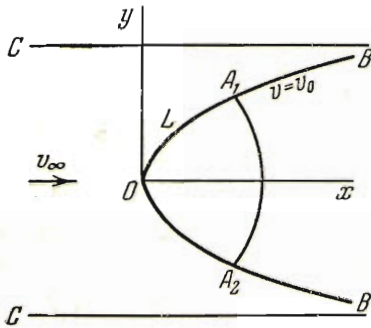
Введем вспомогательную функцию

$$\chi = \ln \left( \frac{dW}{dz} \frac{1}{v_0} \right) = \ln \frac{V}{v_0} - i\vartheta \quad (1.3)$$

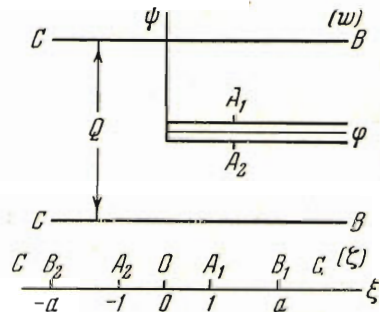
На участках  $(-\infty, -1)$ ,  $(1, \infty)$  известна мнимая часть этой функции  $\vartheta = 0$ , а на участках  $(-a, -1)$ ,  $(1, a)$  известна ее действительная часть  $\text{Re} \chi = 0$ . На отрезке  $(-1, 1)$  из соотношения

$$\frac{Q}{2\pi} \ln \frac{a^2 - \zeta^2}{a^2} + v_0 s_0 \int_0^{s/s_0} f(t) dt = 0 \quad (1.4)$$

находим  $s(\zeta)$ ; следовательно, на этом участке известна  $\text{Re} \chi$ .



Фиг. 1



Фиг. 2

Решение полученной обычной смешанной задачи имеет вид:

$$\chi(\zeta) = \frac{1}{\pi} \sqrt{\zeta^2 - a^2} \int_{-1}^1 \frac{\ln f dt}{\sqrt{a^2 - t^2}(t - \zeta)} \quad (1.5)$$

при этом для  $\sqrt{\zeta^2 - a^2}$  берется та ветвь, которая принимает действительные отрицательные значения на отрезке  $(a, \infty)$ . Условие разрешимости смешанной задачи

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\ln f dt}{\sqrt{a^2 - t^2}} = \ln \frac{v_\infty}{v_0} \quad (1.6)$$

в данном случае выполняется, являясь просто соотношением, определяющим  $v_0$  по заданной величине  $v_\infty$ .

Функция, отображающая верхнюю полуплоскость на область течения, имеет вид:

$$z(\zeta) = \frac{Q}{\pi v_0} \int e^{-\chi(\zeta)} \frac{\zeta d\zeta}{a^2 - \zeta^2} \quad (1.7)$$

Для того чтобы получить уравнение искомого контура, достаточно положить в (1.7)  $\zeta = \xi$  и отделить вещественную часть от мнимой.

Можно показать, что решение задачи будет единственным. Зависимость между величиной потенциала скорости в точках отрыва струй и

длиной дуги обтекаемого контура между этими точками дается, как легко видеть из (1.4) и (1.2), равенством

$$\varphi_a = v_0 s_0 \int_0^1 f(t) dt \quad (1.8)$$

Сопротивление искомого контура набегающему потоку жидкости можно получить, используя интеграл Бернулли

$$P = \rho v_0^2 s_0 \int_0^1 [1 - f^2(t)] \sin \vartheta(t) dt \quad (1.9)$$

При решении конкретных задач основная трудность состоит в вычислении интеграла

$$J = \sqrt{a^2 - \xi^2} \int_{-1}^1 \frac{\ln f dt}{\sqrt{a^2 - t^2} (t - \xi)} \quad (1.10)$$

который при  $-1 \leq \xi \leq 1$  является сингулярным интегралом.

Отметим, что функция  $z(\xi)$  может оказаться неоднолистной; это будет означать, что заданное распределение скорости неосуществимо; критерии однолистности  $z(\xi)$  в настоящее время не установлены.

3. *Вычисление интеграла (1.10).* Введем в интеграле  $J$  для случая, когда  $|\xi| < 1$ , замену переменных:

$$t = \frac{a \cos \varphi}{\sqrt{a^2 - \sin^2 \varphi}}, \quad \xi = \frac{a \cos \theta}{\sqrt{a^2 - \sin^2 \theta}} \quad (1.11)$$

тогда последний, если принять во внимание равенства

$$\int_0^{2\pi} \frac{\sin \mu \varphi d\varphi}{\cos \varphi - \cos \theta} = 0, \quad \int_0^{\pi} \frac{\cos \mu \varphi d\varphi}{\cos \varphi - \cos \theta} = \pi \frac{\sin \mu \theta}{\sin \theta} \quad (1.12)$$

примет вид:

$$J = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \ln f \frac{\sin \varphi d\varphi}{\cos \varphi - \cos \theta}$$

Функцию  $f$  в интервале  $(0, \pi)$  можно представить в виде

$$f = |\cos^\lambda \theta| f_0(\theta) \quad (1.13)$$

где  $\lambda$  — порядок нуля скорости в точке разветвления потока, а  $f_0(\theta)$  — непрерывная и не обращающаяся в нуль на отрезке  $(0, \pi)$  функция. Легко видеть, что  $f_0(\pi - \theta) = f_0(\theta)$ , откуда имеем равенство

$$\ln [f_0(\theta) (1 + \sin \theta)^\lambda] = \sum_{k=1}^{\infty} a_{2k-1} \sin (2k-1) \theta \quad (0 \leq \theta \leq \pi) \quad (1.14)$$

где

$$a_{2k-1} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \ln [f_0(\theta) (1 + \sin \theta)^\lambda] \sin (2k-1) \theta d\theta \quad (1.15)$$

Если подставим (1.13) в  $J$  и воспользуемся формулой

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\ln |\cos \varphi| \sin \varphi d\varphi}{\cos \varphi - \cos \theta} = \pm \frac{\pi}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\ln (1 + \sin \varphi) \sin \varphi d\varphi}{\cos \varphi - \cos \theta} \quad (1.16)$$

(где знак плюс берется для  $0 \leq \theta \leq \frac{1}{2}\pi$ , а знак минус — для  $\frac{1}{2}\pi < \theta \leq \pi$ ), справедливость которой легко установить, а также соотношениями (1.14) и (1.12), то получим

$$J = \pm \frac{\lambda\pi}{2} - \sum_{k=1}^{\infty} a_{2k-1} \cos(2k-1)\theta \quad (|\xi| < 1) \quad \left( \begin{array}{l} 0 \leq \theta < \frac{1}{2}\pi \text{ для знака } + \\ \frac{1}{2}\pi < \theta \leq \pi \text{ для знака } - \end{array} \right) \quad (1.17)$$

Для случая, когда  $|\xi| > 1$ , воспользуемся для вычисления  $J$  подстановкой

$$t = \frac{a \cos \theta}{\sqrt{a^2 - \sin^2 \theta}}, \quad \xi = \frac{a \operatorname{ch} \theta_0}{\sqrt{a^2 + \operatorname{sh}^2 \theta_0}} \quad \left( \begin{array}{l} 0 \leq \theta \leq \pi \\ 0 \leq \theta_0 \leq \infty \end{array} \right) \quad (1.18)$$

формулами

$$\int_0^{2\pi} \frac{\sin \mu \varphi d\varphi}{\cos \varphi - \operatorname{ch} \theta_0} = 0, \quad \int_0^{\pi} \frac{\cos \mu \varphi d\varphi}{\cos \varphi - \operatorname{ch} \theta_0} = -\pi \frac{e^{-\mu\theta_0}}{\operatorname{sh} \theta_0} \quad (1.19)$$

полученными в работе [4], соотношениями (1.13), (1.14), а также равенством

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\ln |\cos \varphi| \sin \varphi d\varphi}{\cos \varphi - \operatorname{ch} \theta_0} = \operatorname{arc} \cos \operatorname{th} \theta_0 + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\ln(1 + \sin \varphi) \sin \varphi d\varphi}{\cos \varphi - \operatorname{ch} \theta_0} \quad (1.20)$$

справедливость которого легко проверить.

После преобразований получим

$$J = \lambda \operatorname{arc} \cos \operatorname{th} \theta_0 - \sum_{k=1}^{\infty} a_{2k-1} e^{-(2k-1)\theta_0}, \quad \left( \begin{array}{l} |\xi| > 1 \\ 0 \leq \theta_0 \leq \infty \end{array} \right) \quad (1.21)$$

В полученном выше решении (1.7) перейдем теперь от переменной  $\zeta = \xi$ ,  $|\xi| < 1$ , к переменной  $\theta$ , заменив содержащийся там интеграл  $J$  выражением (1.17); тогда для координат искомого контура будем иметь

$$x = -\frac{Q}{\pi v_0} \int_{\frac{1}{2}\pi}^{\theta} \frac{|\cos^{1-\lambda} \varphi| \sin \varphi}{f_0(\varphi)(a^2 - \sin^2 \varphi)} \cos \left( \frac{\lambda\pi}{2} - \sum_{k=1}^{\infty} a_{2k-1} \cos(2k-1)\varphi \right) d\varphi \quad (1.22)$$

$$(0 \leq \theta \leq \frac{1}{2}\pi)$$

$$y = -\frac{Q}{\pi v_0} \int_{\frac{1}{2}\pi}^{\theta} \frac{|\cos^{1-\lambda} \varphi| \sin \varphi}{f_0(\varphi)(a^2 - \sin^2 \varphi)} \sin \left( \frac{\lambda\pi}{2} - \sum_{k=1}^{\infty} a_{2k-1} \cos(2k-1)\varphi \right) d\varphi$$

Точно так же, переходя при  $|\xi| > 1$  от переменной  $\xi$  к переменной  $\theta_0$  и учитывая (1.21), получим уравнение струй

$$x = x_a + \frac{Q}{\pi v_0} \int_0^{\theta_0} \frac{\operatorname{ch} \varphi \operatorname{sh} \varphi}{a^2 + \operatorname{sh}^2 \varphi} \cos \left( \lambda \operatorname{arc} \cos \operatorname{th} \varphi - \sum_{k=1}^{\infty} a_{2k-1} e^{-(2k-1)\varphi} \right) d\varphi \quad (1.23)$$

$$(0 \leq \theta_0 \leq \infty)$$

$$y = y_a + \frac{Q}{\pi v_0} \int_0^{\theta_0} \frac{\operatorname{ch} \varphi \operatorname{sh} \varphi}{a^2 + \operatorname{sh}^2 \varphi} \sin \left( \lambda \operatorname{arc} \cos \operatorname{th} \varphi - \sum_{k=1}^{\infty} a_{2k-1} e^{-(2k-1)\varphi} \right) d\varphi$$

Для определения зависимости  $s(\theta)$  мы имеем (1.4), где следует положить  $\xi = \cos \theta$ . Сходимость ряда в формулах (1.22) можно усилить, применяя, например, метод А. Н. Крылова [5].

Отметим еще, что иногда зависимость скорости  $V$  от дуги  $s$  на искомом контуре приходится задавать в форме

$$V = v_0 F(t), \quad s = \frac{\varphi_a}{v_0} \Phi(t) \quad (t_0 \leq t \leq t_a) \quad (1.24)$$

где  $t$  — некоторый параметр, а  $F(t)$ ,  $\Phi(t)$  — непрерывные, ограниченные и однозначные функции в интервале  $(t_0, t_a)$ , удовлетворяющие условиям

$$F(t_0) = \Phi(t_0) = 0, \quad F(t_a) = 1$$

В этом случае решение задачи дается также формулами (1.22) и (1.23), а коэффициенты  $a_{2k-1}$ , давление  $P$  и  $s_0$  — соответственно формулами ( $\lambda$  — кратность нуля скорости)

$$a_{2k-1} = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \ln [F_0(t) (1 + \sin \varphi)^\lambda] \sin (2k-1) \varphi d\varphi$$

$$F_0(t) = F(t) \cos^{-\lambda} \varphi \quad (1.25)$$

$$P = -\frac{\rho v_0^2 s_0}{\Phi(t_0)} \int_{t_0}^{t_a} [1 - F^2(t)] \Phi'(t) \sin \vartheta(t) dt, \quad s_0 = \frac{\varphi_a}{v_a} \Phi(t_a) \quad (1.26)$$

Зависимость  $t = t(\theta)$  находится из уравнения

$$\frac{Q}{2\pi} \ln \left( \frac{a^2 - \sin^2 \theta}{a^2 - 1} \right) - \varphi_a \int_{t_0}^t F(t) \Phi'(t) dt = 0 \quad (1.27)$$

4. Частный случай задания скорости. Пусть на контуре

$$V = v_0 \operatorname{tg} \left( \frac{\pi s}{4s_0} \right) \quad (a = \sqrt{2}) \quad (1.28)$$

Из соотношений (1.2), (1.4), (1.8), (1.11) имеем тогда

$$Q = v_\infty H = \frac{2\pi}{\ln 2} \varphi_a, \quad \varphi_a = \frac{2 \ln 2}{\pi} v_0 s_0, \quad \operatorname{tg} \left( \frac{\pi s}{4s_0} \right) = \cos \theta \quad (1.29)$$

Отсюда  $f = \cos \theta$  и, следовательно,  $\lambda = 1$ ,  $f_0(\theta) = 1$ .

Применяя последовательно формулы (1.6), (1.9) и (1.15), найдем  $v_0 = v_\infty \exp(2G/\pi)$ , где  $G$  — постоянная Каталана,

$$a_{2k-1} = \frac{(-1)^{k+1}}{2k-1} - \frac{2}{\pi(2k-1)^2} + \frac{4}{\pi} \frac{(-1)^{k+1}}{2k-1} \sum_{m=1}^{k-1} \frac{(-1)^m}{2m-1}$$

Можно показать, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left[ \frac{(-1)^{k+1}}{2k-1} - \frac{2}{\pi(2k-1)^2} + \frac{4}{\pi} \frac{(-1)^{k+1}}{2k-1} \sum_{m=1}^{k-1} \frac{(-1)^m}{2m-1} \right] \cos(2k-1)\theta =$$

$$= -\frac{1}{\pi} \int_{\frac{1}{2}\pi}^{\theta} \operatorname{tg} \varphi \ln \left| \operatorname{ctg} \frac{\varphi}{2} \right| d\varphi \quad (1.30)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left[ \frac{(-1)^{k+1}}{2k-1} - \frac{2}{\pi(2k-1)^2} + \frac{4}{\pi} \frac{(-1)^{k+1}}{2k-1} \sum_{m=1}^{k-1} \frac{(-1)^m}{2m-1} \right] e^{-(2k-1)\theta_0} =$$

$$= \frac{1}{2} \operatorname{arc} \cos \operatorname{th} \theta_0 + \frac{1}{\pi} \int_0^{\exp(-\theta_0)} \frac{1-t^2-1}{t-t^2+1} \ln \frac{1+t}{1-t} dt \quad (1.31)$$

Если подставим теперь полученные выражения в формулы (1.22) и (1.23), то после преобразований получим уравнение искомого контура в виде

$$x = \frac{4s_0}{\pi} \int_0^{\cos \theta} \frac{1}{1+t^2} \sin \frac{\pi}{4} g(t) dt$$

$$(0 \leq \theta \leq \frac{1}{2} \pi) \quad (1.32)$$

$$y = \frac{4s_0}{\pi} \int_0^{\cos \theta} \frac{1}{1+t^2} \cos \frac{\pi}{4} g(t) dt$$

а уравнение струй в виде

$$x = x_a + \frac{4s_0}{\pi} \int_1^{\operatorname{ch} \theta_0} \frac{t}{1+t^2} \cos \left( \frac{1}{2} \operatorname{arc} \sin \frac{1}{t} + \frac{\pi}{4} g(t^{-1}) \right) dt$$

$$(0 \leq \theta_0 \leq \infty) \quad (1.33)$$

$$y = y_a + \frac{4s_0}{\pi} \int_1^{\operatorname{ch} \theta_0} \frac{t}{1+t^2} \sin \left( \frac{1}{2} \operatorname{arc} \sin \frac{1}{t} + \frac{\pi}{4} g(t^{-1}) \right) dt$$

где функция  $f(t)$  дается интегралом

$$g(t) = \frac{2}{\pi^2} \int_0^t \frac{1}{t} \ln \frac{1+t}{1-t} dt$$

Для этой функции в работе [6] составлены таблицы для значений аргумента  $0 \leq t \leq 1$ ; следовательно, найденный контур нетрудно построить.

**§ 2. Струйное обтекание криволинейного контура безграничным потоком. I. Решение задачи.** Эта задача есть частный случай предыдущей, когда стенки канала удаляются в бесконечность. Полагая в предыдущих формулах  $H = \infty$ ,  $a = \infty$ , и замечая, что

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \frac{Q}{a^2} = 2\pi\psi_a, \quad \lim_{a \rightarrow \infty} v_0 = v_\infty$$

получим следующие зависимости

Выражение для комплексного потенциала скорости

$$W = \varphi_a \zeta^2 \quad (2.1)$$

Функцию, отображающую плоскость течения на верхнюю полуплоскость  $\zeta$

$$Z(\zeta) = \frac{2\varphi_a}{v_\infty} \int e^{-\chi(\zeta)} \zeta d\zeta + C, \quad \chi(\zeta) = \frac{1}{\pi i} \int_{-1}^1 \ln f \frac{dt}{t-\zeta} \quad (2.2)$$

Сопротивление искомого контура

$$P = \rho v_{\infty}^2 s_0 \int_0^1 [1 - f^2(t)] \sin \vartheta(t) dt \quad (2.3)$$

Соотношения между величиной потенциала скорости в точке отрыва и длиной дуги контура и уравнение для определения  $s(\theta)$

$$\varphi_a = v_{\infty} s_0 \int_0^1 f(t) dt, \quad \varphi_a \cos^2 \theta - v_{\infty} s_0 \int_0^{s/s_0} f(t) dt = 0 \quad (2.4)$$

Уравнение контура

$$x = -\frac{2\varphi_a}{v_{\infty}} \int_{\frac{1}{2}\pi}^{\theta} \frac{|\cos^{1-\lambda} \varphi| \sin \varphi}{f_0(\varphi)} \cos \left( \frac{\pi\lambda}{2} - \sum_{k=1}^{\infty} a_{2k-1} \cos(2k-1)\varphi \right) d\varphi$$

$$y = -\frac{2\varphi_a}{v_{\infty}} \int_{\frac{1}{2}\pi}^{\theta} \frac{|\cos^{1-\lambda} \varphi| \sin \varphi}{f_0(\varphi)} \sin \left( \frac{\pi\lambda}{2} - \sum_{k=1}^{\infty} a_{2k-1} \cos(2k-1)\varphi \right) d\varphi \quad (0 \leq \theta \leq \frac{1}{2}\pi) \quad (2.5)$$

Уравнение струй

$$x = x_a + \frac{2\varphi_a}{v_{\infty}} \int_0^{\theta_0} \text{ch } \varphi \text{ sh } \varphi \cos(\lambda \text{ arccosth } \varphi - \sum_{k=1}^{\infty} a_{2k-1} e^{-(2k-1)\varphi}) d\varphi$$

$$(0 \leq \theta_0 \leq \infty) \quad (2.6)$$

$$y = y_a + \frac{2\varphi_a}{v_{\infty}} \int_0^{\theta_0} \text{ch } \varphi \text{ sh } \varphi \sin(\lambda \text{ arc costh } \varphi - \sum_{k=1}^{\infty} a_{2k-1} e^{-(2k-1)\varphi}) d\varphi$$

Если скорость  $V(s)$  на контуре задана в форме

$$V = v_{\infty} F(t), \quad s = \frac{\varphi_a}{v_{\infty}} \Phi(t) \quad (2.7)$$

$$\Phi(t_0) = F(t_0) = 0, \quad F(t_a) = 1$$

то в этом случае также справедливы уравнения (2.5) и (2.6), где следует положить  $f_0(\varphi) = F_0(\varphi)$ , а  $a_{2k-1}$  найти по формуле (1.25), и формула (1.26), где следует положить  $v_0 = v_{\infty}$ .

2. Условие обтекания по схеме Кирхгофа. Для того чтобы полученное решение определяло обтекание по схеме Кирхгофа, т. е. струи не пересекались, необходимо и достаточно, чтобы функция  $f(s/s_0)$ , кроме (2.4), удовлетворяла еще условию

$$\int_0^1 f(t) \ln f(t) \left( \int_0^t f(t) dt \right)^{-1/2} dt = C_2 \neq 0 \quad (2.8)$$

где  $C_2$  — мнимая часть произвольной постоянной в разложении  $z(\zeta)$  в окрестности бесконечно удаленной точки. Действительно, из уравнений

(2.4), (2.2) нетрудно получить разложение (2.9)

$$Z(\zeta) = \frac{\varphi_a}{v_\infty} \left[ \zeta^2 + 2iA_1\zeta - A_1^2 \ln \zeta + \sum_1^\infty \left( \frac{B_{2k}}{\zeta^{2k}} + i \frac{B_{2k-1}}{\zeta^{2k-1}} \right) \right] + C_1 + iC_2 \frac{s_0}{2\pi}$$

Здесь

$$A_1 = -\frac{1}{\pi} \left( \frac{v_\infty s_0}{\varphi_a} \right)^{1/2} \int_0^1 f(t) \ln f(t) \left( \int_0^t f(t) dt \right)^{-1/2} dt$$

где  $B_{2k}$ ,  $B_{2k-1}$ ,  $C_1$ ,  $C_2$  — действительные числа, а тогда необходимость (2.8) следует из формулы В. В. Голубева [1], применяя которую, имеем

$$P = \pi v_\infty \varphi_a A_1^2$$

Таким образом, если  $A_1 = 0$ , то и  $P = 0$ .

Если возьмем теперь  $C_2$ , как в (2.8), то, как легко видеть, для любого  $\zeta = \xi$  будем иметь

$$-x(\xi) = x(-\xi), \quad y(\xi) = -y(-\xi), \quad y(\xi) \neq 0$$

и, следовательно, струи нигде не пересекаются.

3. Частный случай задания скорости. Пусть на контуре

$$V = v_\infty \left( \frac{s}{s_0} \right)^\alpha \quad (2.10)$$

где  $\alpha$  — любое число  $> 0$ . Из соотношения (2.4) имеем

$$\varphi_a = \frac{v_\infty s_0}{1 + \alpha}, \quad s = s_0 (\cos \theta)^{\frac{2}{1+\alpha}}$$

Отсюда

$$f = (\cos \theta)^{\frac{2\alpha}{1+\alpha}}, \quad \lambda = \frac{2\alpha}{1+\alpha}, \quad f_0(\theta) = 1$$

$$a_{2k-1} = \frac{2\alpha}{1+\alpha} \left[ \frac{(-1)^{k+1}}{2k-1} - \frac{2}{\pi(2k-1)^2} + \frac{4}{\pi} \frac{(-1)^{k+1}}{2k-1} \sum_{m=1}^{k-1} \frac{(-1)^m}{2m-1} \right]$$

Если теперь воспользоваться (1.30), (1.31), то получим: уравнение контура

$$x = \frac{2\varphi_a \cos \theta}{v_\infty} \int_0^\sigma t^\sigma \cos \frac{\alpha\pi}{1+\alpha} \left( 1 - \frac{1}{2} g(t) \right) dt \quad \left( \sigma = \frac{1-\alpha}{1+\alpha}, \quad 0 \leq \theta \leq \frac{1}{2}\pi \right) \quad (2.11)$$

$$y = \frac{2\varphi_a \cos \theta}{v_\infty} \int_0^\sigma t^\sigma \sin \frac{\alpha\pi}{1+\alpha} \left( 1 - \frac{1}{2} g(t) \right) dt$$

уравнение струй

$$x = x_a + \frac{2\varphi_a \operatorname{ch} \theta_0}{v_\infty} \int_1^t t \cos \frac{\alpha}{1+\alpha} \left( \operatorname{arc} \sin \frac{1}{t} + \frac{\pi}{2} g(t^{-1}) \right) dt \quad (2.12)$$

$$y = y_a + \frac{2\varphi_a \operatorname{ch} \theta_0}{v_\infty} \int_1^t t \sin \frac{\alpha}{1+\alpha} \left( \operatorname{arc} \sin \frac{1}{t} + \frac{\pi}{2} g(t^{-1}) \right) dt$$



Для сопротивления найденного контура имеем

$$P = \rho v_\infty^2 \cdot s_0 \int_0^1 (1 - t^{2\alpha}) \sin \frac{\pi\alpha}{1 + \alpha} \left(1 - \frac{1}{2} g(t^{\frac{1+\alpha}{2}})\right) dt$$

§ 3. Решения для некоторых криволинейных контуров. 1. Точное решение задачи отрывного обтекания в канале для одного класса кривых. Пользуясь формулами (1.22), (1.23), (1.25), (1.26), нетрудно установить, что закону распределения скорости  $V(s)$  в виде

$$V = v_0 \sqrt{\frac{(1-t)(\beta+t)}{(1+t)(\beta-t)}} \quad (1 \leq \beta \leq \infty) \tag{3.1}$$

$$s = \frac{2\varphi_\alpha}{v_0 [\ln(a^2 - 1) - \ln a^2]} \int_1^t \frac{(1+t)(\beta-t) t dt}{(a^2 - t^2) V(\beta^2 - t^2) (1 - t^2)}$$

соответствует контур, заданный уравнением

$$x = \frac{Q}{\pi v_0 (a^2 - \beta^2)} \left[ \frac{a^2 - \beta}{2} \ln \frac{a^2 - \sin^2 \theta}{a^2 - 1} - \frac{a(\beta - 1)}{2} \cdot \frac{a + 1}{a - 1} \ln \frac{a - \sin \theta}{a + \sin \theta} - \beta(\beta - 1) \ln \frac{\beta + \sin \theta}{\beta + 1} \right]$$

$$y = \frac{Q}{\pi v_0 (a^2 - \beta^2)} \sqrt{\frac{\beta^2 - 1}{a^2 - 1}} \left[ a(\beta - 1) \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left( \frac{\sqrt{a^2 - 1}}{a} \operatorname{tg} \theta \right) + (a^2 - \beta) \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{\cos \theta}{\sqrt{a^2 - 1}} - \frac{\beta(\beta - 1) \sqrt{a^2 - 1}}{\sqrt{\beta^2 - 1}} \operatorname{arc} \sin \frac{1 + \beta \sin \theta}{\beta + \sin \theta} + \sqrt{a^2 - 1} y_\alpha^\beta \right]$$

$$y_\beta^a = \frac{\pi}{2} (\beta - 1) \left( \frac{\beta}{\sqrt{\beta^2 - 1}} - \frac{a}{\sqrt{a^2 - 1}} \right) \tag{3.2}$$

Кривая эта при малых  $\theta$  близка к параболе, а при малых значениях

$$|\theta - \frac{1}{2}\pi|$$

она близка к циклоиде. Из (1.26) имеем

$$P = \frac{\pi\beta(a\sqrt{\beta^2 - 1} - \beta\sqrt{a^2 - 1})\rho v_0^2 s_0}{(a^2 - \beta^2)\sqrt{a^2 - 1} \left[ K\left(\frac{1}{\beta}\right) - \Pi\left(\frac{1}{\beta}, -\frac{1}{a^2}\right) + \frac{\beta}{\beta - 1} \left( L_\alpha^\beta - \operatorname{ar} \operatorname{th} \frac{1}{\beta} \right) \right]} \tag{3.3}$$

где

$$L_\alpha^\beta = \frac{a^2 - \beta}{\sqrt{(\beta^2 - a^2)(a^2 - 1)}} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{\sqrt{\beta^2 - a^2}}{\beta\sqrt{a^2 - 1}} \tag{3.4}$$

Из формул (1.23) получим уравнение струй

$$x = x_a + \frac{Q}{\pi v_0 (a^2 - \beta^2)} \frac{a(\beta - 1)\sqrt{\beta^2 - 1}}{\sqrt{a^2 - 1}} \operatorname{ar} \operatorname{th} \left( \frac{\sqrt{a^2 - 1}}{a} \operatorname{th} \theta_0 \right) - \beta(\beta - 1) \ln \frac{\beta \operatorname{ch} \theta_0 + \sqrt{\beta^2 - 1} \operatorname{sh} \theta_0}{\beta} + \frac{a^2 - \beta}{2} \ln \left( 1 + \frac{\operatorname{sh}^2 \theta_0}{a^2} \right)$$

$$y = y_a + \frac{Q}{\pi v_0 (a^2 - \beta^2)} \left[ \frac{V\beta^2 - 1}{V a^2 - 1} (a^2 - \beta) \left( \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{\operatorname{ch} \theta_0}{V a^2 - 1} - \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{1}{V a^2 - 1} \right) - \right. \\ \left. - a(\beta - 1) \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{\operatorname{sh} \theta_0}{a} + \beta(\beta - 1) \left( \operatorname{arc} \sin \frac{\beta \operatorname{sh} \theta_0 + V\beta^2 - 1 \operatorname{ch} \theta_0}{\beta \operatorname{ch} \theta_0 + V\beta^2 - 1 \operatorname{sh} \theta_0} - \right. \right. \\ \left. \left. - \operatorname{arc} \sin \frac{V\beta^2 - 1}{\beta} \right) \right] \quad (0 \leq \theta_0 \leq \infty) \quad (3.5)$$

Длину дуги  $s_0$  найдем по формуле (1.26)

$$s_0 = \frac{Q}{\pi v_0} \left[ \frac{\beta - 1}{\beta} (K - \Pi) + L a^\beta - \operatorname{ar} \operatorname{th} \frac{1}{\beta} \right] \quad (3.6)$$

Мы имеем, таким образом, точное решение для кривой (3.1).

2. *Отрывное обтекание пластинки в канале.* Полагая в формулах (3.1) — (3.6)  $\beta = \infty$ , получим известное решение для пластинки: уравнение контура

$$x = 0, \quad y = \frac{Q}{\pi v_0} \left[ \frac{1}{V a^2 - 1} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{\cos \theta}{V a^2 - 1} - \frac{a}{V a^2 - 1} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left( \frac{V a^2 - 1}{a} \operatorname{tg} \theta \right) + \right. \\ \left. + \theta + \frac{\pi}{2} \left( \frac{a}{V a^2 - 1} - 1 \right) \right] \quad (3.7)$$

уравнение струи

$$x = \frac{Q}{2\pi v_0} \left( 2\theta - \frac{a}{V a^2 - 1} \ln \frac{a \operatorname{ch} \theta_0 + V a^2 - 1 \operatorname{sh} \theta_0}{a \operatorname{ch} \theta_0 - V a^2 - 1 \operatorname{sh} \theta_0} \right) \\ y = y_a + \frac{Q}{\pi v_0 V a^2 - 1} \left( \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{\operatorname{ch} \theta_0}{V a^2 - 1} - \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{1}{V a^2 - 1} \right) \quad (3.8)$$

3. *Отрывное обтекание параболы в канале.* Выберем  $a$  и  $\beta$  в (3.1) настолько большими (но  $\neq \infty$ ), чтобы в разложениях

$$\ln \frac{a^2 - \sin^2 \theta}{a^2 - 1} = \frac{\cos^2 \theta}{a^2} + O\left(\frac{1}{a^4}\right) \\ \ln \frac{(a - \sin \theta)(a + 1)}{(a + \sin \theta)(a - 1)} = 2 \frac{1 - \sin \theta}{a} + O\left(\frac{1}{a^3}\right) \\ \frac{1}{V a^2 - 1} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{\cos \theta}{V a^2 - 1} = \frac{\cos \theta}{a} + O\left(\frac{1}{a^3}\right) \\ \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left( \frac{V a^2 - 1}{a} \operatorname{tg} \theta \right) = \frac{\pi}{2} + \frac{V a^2 - 1}{a} \left( \theta - \frac{\pi}{2} \right) + O\left(\frac{1}{a^3}\right) \\ \beta \ln \frac{\beta + \sin \theta}{1 + \beta} = \sin \theta - 1 + \frac{\cos^2 \theta}{2\beta} + O\left(\frac{1}{\beta^2}\right) \\ \frac{\beta}{V \beta^2 - 1} \operatorname{arc} \sin \frac{1 + \beta \sin \theta}{1 - \beta \sin \theta} = \frac{\pi \beta}{2 V \beta^2 - 1} + \theta - \frac{\cos \theta}{\beta} + O\left(\frac{1}{\beta^2}\right) \quad (3.9)$$

можно было ограничиться первыми членами, то, как легко видеть, полу-

чим уравнение контура в виде

$$x = \frac{Q}{2\pi v_0 a^2 \beta} \cos^2 \theta \quad y = \frac{Q \sqrt{\beta^2 - 1}}{\pi v_0 a^2 \beta} \cos \theta$$

Это есть уравнение параболы с параметром

$$\frac{\beta^2 - 1}{\beta} \frac{Q}{\pi a^2 v_0}$$

Следовательно, мы получили приближенное решение для параболы.

4. Точное решение задачи об отрывном обтекании одного класса кривых безграничным потоком. Так же как и в п. 1, можно установить, что распределению скорости

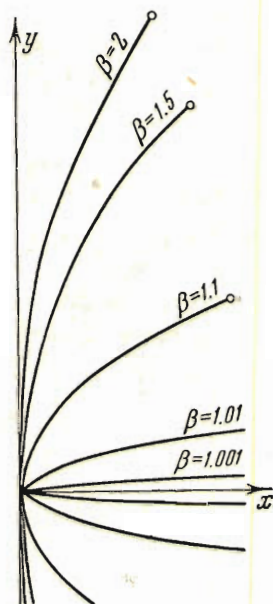
$$V = v_\infty \sqrt{\frac{(1-t)(\beta+t)}{(1+t)(\beta-t)}} \quad (3.10)$$

$$s = -\frac{2\varphi_a}{v_\infty} \int_1^t \frac{(1+t)(\beta-t)tdt}{V(\beta^2-t^2)(1-t^2)}$$

в безграничном потоке будет соответствовать кривая

$$x = \frac{2\varphi_a}{v_\infty} \left[ \frac{\cos^2 \theta}{2} + (\beta-1)(\sin \theta - 1) - \beta(\beta-1) \ln \frac{\beta + \sin \theta}{1 + \beta} \right] \quad (3.11)$$

$$y = \frac{2\varphi_a}{v_\infty} \sqrt{\beta^2 - 1} \left[ \cos \theta + (\beta-1)\theta - \frac{\beta(\beta-1)}{V\beta^2-1} \arcsin \frac{1 + \beta \sin \theta}{\beta + \sin \theta} + y_\beta^\infty \right]$$



Фиг. 3

Пользуясь формулами (2.6) и (2.3), (2.4), найдем следующее выражение для координат точек струи:

$$x = x_a + \frac{2\varphi_a}{v_\infty} \left[ \sqrt{\beta^2 - 1} (\beta - 1) \theta_0 - \beta(\beta - 1) \ln \frac{\beta \operatorname{ch} \theta_0 + \sqrt{\beta^2 - 1} \operatorname{sh} \theta_0}{\beta} + \frac{\operatorname{sh}^2 \theta_0}{2} \right]$$

$$y = y_a + \frac{2\varphi_a}{v_\infty} \left[ \sqrt{\beta^2 - 1} (\operatorname{ch} \theta_0 - 1) - \beta(\beta - 1) \operatorname{sh} \theta_0 + \beta(\beta - 1) \left( \arcsin \frac{\beta \operatorname{sh} \theta_0 + \sqrt{\beta^2 - 1} \operatorname{ch} \theta_0}{\beta \operatorname{ch} \theta_0 + \sqrt{\beta^2 - 1} \operatorname{sh} \theta_0} - \arcsin \frac{\sqrt{\beta^2 - 1}}{\beta} \right) \right] \quad (3.12)$$

$$P = \frac{(\pi/\beta) (V\beta^2-1-\beta) \rho v_0^2 s_0}{E\left(\frac{1}{\beta}\right) - K\left(\frac{1}{\beta}\right) - \frac{1}{2(\beta-1)} + \frac{\beta-1}{2\beta} \operatorname{Arth} \frac{1}{\beta}} \quad (3.13)$$

$$s_0 = 2\beta(\beta-1) \frac{\varphi_a}{v_\infty} \left( K - E + \frac{1}{2(\beta^2-1)} - \frac{\beta-1}{\beta} \operatorname{Arth} \frac{1}{\beta} \right) \quad (3.14)$$

Найденная кривая, построенная для различных значений  $\beta$ , изображена на фиг. 4.

5. *Обтекание пластинки с отрывом струй в безграничном потоке.* Полагая в (3.10) — (3.14)  $\beta = \infty$ , получим:

уравнение контура

$$x = 0, \quad y = \frac{\varphi_a}{v_\infty} \left( \frac{\pi}{2} - \theta + \frac{\sin 2\theta}{4} + 2 \cos \theta \right) \quad (3.15)$$

уравнение струй

$$x = \frac{\varphi_a}{v_\infty} \left( \frac{\operatorname{sh} 2\theta_0}{2} - \theta_0 \right) \quad y = ya + \frac{2\varphi_a}{v_\infty} (\operatorname{ch} \theta_0 - 1) \quad (3.16)$$

$$P = \frac{\pi}{\pi + 4} \rho v_\infty^2 2s_0$$

Распределению скорости (3.10) при  $\beta = \infty$ , таким образом, будет соответствовать пластинка, поставленная перпендикулярно потоку.

6. *Обтекание параболы с отрывом струй в безграничном потоке.* Если в (3.10) выберем  $\beta$  настолько большим (но  $\neq \infty$ ), чтобы в разложениях (3.9) можно было ограничиться первыми членами, то, как легко видеть, получим уравнение контура в виде

$$x = \frac{\varphi_a}{v_\infty} \frac{\cos^2 \theta}{\beta}, \quad y = 2 \frac{\varphi_a}{v_\infty} \frac{\sqrt{\beta^2 - 1}}{\beta} \cos \theta \quad (3.17)$$

Таким образом, мы имеем приближенное решение для параболы  $y^2 = 2px$  с параметром  $p = 2(\beta - \beta^{-1})$ .

Автор сохраняет глубокую признательность покойному В. В. Голубеву за ценные советы при выполнении этой работы, а также считает своим долгом поблагодарить Г. Г. Тумашева за некоторые существенные указания.

Поступила 28 X 1954

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Голубев В. В. Лекции по теории крыла. ГТТИ 1949
2. Тумашев Г. Г. Определение формы границ потока жидкости по заданному распределению скорости или давления Уч. зап. КГУ, т. 112, кн. 3. 1952 г.
3. Тумашев Г. Г. Построение решетки по заданному распределению скорости. Уч. зап. КГУ, т. 109, кн. 1, 1949
4. Некрасов А. И. Теория крыла в нестационарном потоке. Изд. Азд. АН СССР. 1947.
5. Канторович Л. В., Крылов В. И. Приближенные методы высшего анализа. ГТТИ, 1950
6. Аравин В. И., Нумеров С. И. Теория движения жидкостей и газов в педерформируемой пористой среде. ГТТИ, 1953