

ПРОСТРАНСТВЕННОЕ НЕУСТАНОВИВШЕЕСЯ ДВИЖЕНИЕ НЕСУЩЕЙ ПОВЕРХНОСТИ

С. М. Белоцерковский

(Москва)

К настоящему времени проведено большое количество исследований по неустановившемуся движению. Однако если для плоских задач эти исследования продвинуты весьма далеко (см. об этом подробнее в монографиях А. И. Некрасова [1] и Л. И. Седова [2]), то для трехмерных задач дело обстоит значительно хуже. Полное решение мы имеем здесь только для круглого крыла. Это решение при помощи рядов дано Т. Шаде [3] и в замкнутом виде Н. Е. Кочиным [4]. В последние годы был опубликован ряд работ, в которых исследуется указанная задача. Для несущих поверхностей частного вида (для крыльев малого удлинения с прямыми задними кромками [5]) удалось создать приближенные методы расчета. Недостатком этих методов является то, что, кроме обычных предположений, принятых в ливнейной задаче, в них используется еще ряд дополнительных упрощений, проверка правильности которых может быть произведена только косвенным путем. Однако и в таком виде эти методы не пригодны для несущих поверхностей более общего вида. Методы, позволяющие получать решение для несущих поверхностей общего вида, нам неизвестны.

Настоящая работа посвящена разработке такого метода, который даст возможность провести общее исследование и довести до конца решение задачи о неустановившемся движении произвольной слабо изогнутой несущей поверхности в пространстве, заполненном идеальной несжимаемой жидкостью. Исследование ведется на базе обычной схемы ливнейной задачи. Решение получается особенно просто, если его находить для малых значений безразмерной круговой частоты. В частности, при этом получается решение задачи Чаплыгина о неустановившемся движении и деформациях несущей поверхности при постоянной циркуляции [6]. Указанный приближенный метод базируется на исследовании поля скоростей подковообразного вихря при неустановившемся движении, проведенном в работе [7].

§ 1. Основные предположения. Решение общей задачи о неустановившемся движении несущей поверхности значительно труднее, чем решение задачи об установившемся движении. Это связано с тем, что в первом случае, когда движение происходит с переменной циркуляцией, интенсивность присоединенных вихрей также будет меняться по времени. При этом будут появляться свободные вихри равнопротивоположной интенсивности, благодаря чему будет выполняться теорема о постоянстве циркуляции. Свободные вихри будут сноситься потоком вниз по течению и образовывать вихревой нестационарный след за телом, который будет оказывать влияние на обтекание тела. Если рассматриваются такие задачи, в которых можно приближенно считать обтекание тела бесциркуляционным, то указанные выше трудности отпадают и решение задачи сильно упрощается. Примером может служить задача о неустановившемся движении тел вращения. В ряде случаев здесь можно ограничиться рассмотрением

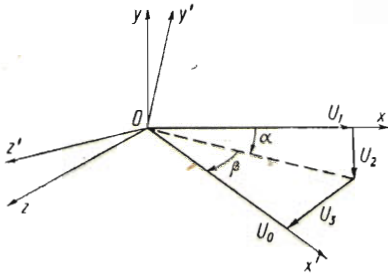
бесциркуляционного течения, и тогда соответствующие исследования могут быть доведены до конца (см., например, работу [8]). Большой интерес для практики представляет решение задачи Чаплыгина, которая как-бы является промежуточным случаем между бесциркуляционным движением и общим неустановившимся движением. Речь идет о таких неустановившихся движениях, которые хотя и происходят при наличии циркуляции, но в процессе движения циркуляция остается постоянной.

Мы будем заниматься общей задачей о неустановившемся движении в линейной постановке, считая, что местные углы наклона несущей поверхности по отношению к основной поступательной скорости движения малы, а также что все безразмерные кинематические характеристики движения являются величинами малыми по сравнению с единицей. В линейной теории удерживаются только первые степени указанных величин, а их произведения или квадраты отбрасываются как малые второго порядка. С принятой точностью можно считать, что вихревой след, обтекающий с несущей поверхности, в течение всего времени движения сохраняет неизменное положение относительно несущей поверхности. В качестве такого положения, естественно, будет приниматься простейшее. Например, для плоской пластинки следует считать, что свободные вихри лежат в одной плоскости с пластинкой, для тела вращения — располагать их на цилиндрических поверхностях, оси которых совпадают с осью симметрии тела, и т. д. Отметим также, что скорость сноса свободных вихрей принимается постоянной и равной средней скорости поступательного движения тела.

Линейная постановка задачи дает возможность строить решение в виде линейной комбинации из простейших особенностей. При этом можно заранее изучить эти особенности, в частности, затабулировать необходимые функции, что дает возможность доводить расчеты до конца. В качестве таких особенностей будут применяться подковообразные вихри, которые для неустановившегося движения были изучены нами в работе^[7]. Кроме того, иногда может оказаться удобным введение и других особенностей (источников — стоков, диполей, мультиполей), расположенных внутри тела или на его поверхности. В дальнейшем, однако, они рассматриваться не будут, так как введение указанных особенностей не приводит к возникновению за телом следа, а потому не вызывает больших дополнительных трудностей. Таким образом, несущая поверхность в дальнейшем будет заменяться вихревым слоем, а вихревой слой — системами подковообразных вихрей. Аналогичный прием был использован в работе^[9] для расчета аэродинамических характеристик крыльев малого удлинения при установившемся поступательном движении. Линейная постановка задачи приводит к тому, что общий случай движения несущей поверхности в пространстве, когда изменяются все основные кинематические параметры, характеризующие его, сводится к исследованию ряда частных случаев.

Мы будем считать, что зависимость основных кинематических параметров от времени является гармонической.

§ 2. **Граничные условия.** Введем связанную систему координат, жестко скрепленную с несущей поверхностью. Оси этой системы xuz и начало O выберем в соответствии со стандартом, принятым в аэродинамике, направляя ось x вперед по движению и располагая оси y и z в плоскости симметрии несущей поверхности (если эта плоскость существует, фиг. 1).



Фиг. 1

Нас будет интересовать абсолютное движение несущей поверхности, т. е. движение ее относительно неподвижной системы координат. Векторные кинематические характеристики этого движения мы будем проектировать на связанные оси.

Пусть U_0 — абсолютная поступательная скорость подвижного начала O , а Ω — абсолютная угловая скорость связанной системы координат.

Переносная скорость U^* точки с координатами (x_0, y_0, z_0) будет равна

$$U^* = U_0 + \Omega \times r_0, \quad r_0 = ix_0 + jy_0 + kz_0 \quad (2.1)$$

причем i, j, k — единичные векторы осей x, y и z . Проекции вектора U_0 на оси связанной системы координат обозначим U_x, U_y, U_z , а проекции вектора угловой скорости Ω — $\Omega_x, \Omega_y, \Omega_z$, тогда

$$U_0 = iU_x + jU_y + kU_z, \quad \Omega = i\Omega_x + j\Omega_y + k\Omega_z \quad (2.2)$$

Абсолютную скорость жидкости будем обозначать W , относительную V^* ; очевидно,

$$V^* = W - U^* \quad (2.3)$$

Граничным условием в рассматриваемой задаче является условие о непротекании несущей поверхности, т. е. для нормальной составляющей относительной скорости в каждой точке поверхности имеем $V_n^* = 0$.

Пусть $n = i \cos(n, x) + j \cos(n, y) + k \cos(n, z)$ — единичный вектор внешней нормали поверхности, тогда нормальная составляющая возмущенной скорости жидкости будет равна

$$W_n = W_x \cos(n, x) + W_y \cos(n, y) + W_z \cos(n, z) \quad (2.4)$$

Движение несущей поверхности как твердого тела можно характеризовать заданием следующих безразмерных функций времени: $u(t), \alpha(t), \beta(t), \omega_x(t), \omega_y(t), \omega_z(t)$, где α — угол атаки и β — угол скольжения несущей поверхности (фиг. 1). Будем рассматривать только такие неустановившиеся движения, которые соответствуют конечным (не бесконечно малым) значениям средней поступательной скорости U . Пусть b — некоторый характерный линейный размер поверхности, тогда

$$u = \frac{\Delta U}{U}, \quad \omega_x = \frac{\Omega_x b}{U}, \quad \omega_y = \frac{\Omega_y b}{U}, \quad \omega_z = \frac{\Omega_z b}{U} \quad (2.5)$$

где $\Delta U = U_0 - U$ — переменная часть поступательной скорости.

До сих пор рассматривалась твердая несущая поверхность, однако можно исследовать и более общий случай, когда поверхность деформируется.

Разница в граничных условиях по сравнению с твердой несущей поверхностью будет заключаться в следующем.

Во-первых, за счет того, что теперь $\cos(n, x)$, $\cos(n, y)$ и $\cos(n, z)$ будут зависеть не только от координат точки, но и от времени t .

Во-вторых, к нормальной скорости жесткой поверхности надо будет еще прибавить дополнительную величину, соответствующую деформации поверхности. Рассмотрим следующие два способа задания поверхности в связанных осях:

$$\eta = f_0(\xi, \zeta) + f(\xi, \zeta) \Delta'(t) \quad (2.6)$$

$$\frac{r}{b} = \Phi_0(\xi, \varphi) + \Phi(\xi, \varphi) \Delta(t) \quad (2.7)$$

где $\Delta(t)$ — некоторая безразмерная функция времени, характеризующая закон изменения формы несущей поверхности по времени, r и φ — цилиндрические координаты. Удерживая только малые первого порядка, граничное условие можно записать в виде

$$\frac{W_n}{U} = \cos(n, x) - \alpha \cos(n, y) + \beta \cos(n, z) + \omega_x [\eta_0 \cos(n, z) - \zeta_0 \cos(n, y) - \omega_y \xi_0 \cos(n, z) + \omega_z \xi_0 \cos(n, y) + \Delta f_1 + \Delta' f_2] \quad (2.8)$$

где

$$\Delta = \frac{d\Delta}{dt} \frac{b}{U}, \quad \xi_0 = \frac{x_0}{b}, \quad \eta_0 = \frac{y_0}{b}, \quad \zeta_0 = \frac{z_0}{b} \quad (2.9)$$

и, кроме того,

$$f_1 = - \frac{\partial f / \partial \xi}{\sqrt{1 + (\partial f_0 / \partial \xi)^2}}, \quad f_2 = f \cos(n, y)$$

в случае (2.6) и

$$f_1 = - \frac{\partial \Phi / \partial \xi}{\sqrt{1 + (r^{-1} \partial \Phi / \partial \varphi)^2}}, \quad f_2 = \Phi \cos(n, r)$$

в случае (2.7). Для гармонических зависимостей от времени, полагая

$$\begin{aligned} \alpha &= A_1 \cos pt, & \beta &= A_2 \cos pt, & \omega_x &= A_3 \cos pt \\ \omega_y &= A_4 \cos pt, & \omega_z &= A_5 \cos pt, & \Delta &= A_6 \cos pt \end{aligned} \quad (2.10)$$

получаем для момента t_0

$$\begin{aligned} \frac{W_n}{U} &= \cos(n, x) - A_1 \cos(n, y) \cos pt_0 + A_2 \cos(n, z) \cos pt_0 + \\ &+ A_3 [\eta_0 \cos(n, z) - \zeta_0 \cos(n, y)] \cos pt_0 - A_4 \xi_0 \cos(n, z) \cos pt_0 + \\ &+ A_5 \xi_0 \cos(n, y) \cos pt_0 + A_6 f_1 \cos pt_0 - A_6 q f_2 \sin pt_0 \end{aligned} \quad (2.11)$$

где безразмерная круговая частота равна $q = pb/U$.

Отметим, что все последующие результаты останутся в силе, если в формулах (2.10) круговые частоты и фазы взять различными.

§ 3. Уравнения для определения интенсивности присоединенных вихрей. Перейдем к нахождению уравнений для определения погонной интенсивности присоединенного вихревого слоя, заменяющего несущую поверхность. Нетрудно убедиться в том, что выражение для указанной интенсивности может быть представлено в виде такой функциональной зависимости, в которую основные кинематические параметры, параметр деформации $\Delta(t)$ и их первые производные по времени входят в виде линейных комбинаций. Пусть $U\gamma$ — погонная интенсивность вихревого слоя, тогда

$$\begin{aligned} \gamma = & \gamma_0 + \alpha\gamma_1^{(1)} + \alpha'\gamma_1^{(2)} + \beta\gamma_2^{(1)} + \beta'\gamma_2^{(2)} + \omega_x\gamma_3^{(1)} + \omega_x'\gamma_3^{(2)} + \\ & + \omega_y\gamma_4^{(1)} + \omega_y'\gamma_4^{(2)} + \omega_z\gamma_5^{(1)} + \omega_z'\gamma_5^{(2)} + \Delta\gamma_6^{(1)} + \Delta'\gamma_6^{(2)} \end{aligned} \quad (3.1)$$

причем

$$\alpha = \frac{d\alpha}{dt} \frac{b}{U}, \quad \beta = \frac{d\beta}{dt} \frac{b}{U}, \quad \omega_x = \frac{d\Omega_x}{dt} \frac{b^2}{U^2}, \quad \omega_y = \frac{d\Omega_y}{dt} \frac{b^2}{U^2}, \quad \omega_z = \frac{d\Omega_z}{dt} \frac{b^2}{U^2} \quad (3.2)$$

В равенстве (3.1) все безразмерные кинематические параметры, параметры деформации и их производные являются функциями времени t_0 , а $\gamma_v^{(h)}$ зависят только от координат точки и безразмерной частоты q .

Пользуясь соотношениями (2.10), выражение (3.1) можно записать в виде

$$\gamma = \gamma_0 + \sum_{\nu=1}^6 A_\nu (\gamma_\nu^{(1)} \cos pt_0 - q\gamma_\nu^{(2)} \sin pt_0) \quad (3.3)$$

На основании работы [7] можем утверждать, что скорости, вызванные присоединенным вихревым слоем как с интенсивностью $\gamma_\nu^{(1)} \cos pt_0$, так и с интенсивностью $\gamma_\nu^{(2)} \sin pt_0$ и соответствующими свободными вихрями, будут содержать члены, пропорциональные и $\sin pt_0$ и $\cos pt_0$ в каждом случае. Следовательно, для нормальной составляющей возмущенной скорости на несущей поверхности можем написать

$$\begin{aligned} \frac{W_n}{U} = & w_{n0} + \sum_{\nu=1}^6 A_\nu (w_{n\nu}^{(11)} \sin pt_0 + w_{n\nu}^{(12)} \cos pt_0) + \\ & + q \sum_{\nu=1}^6 A_\nu (w_{n\nu}^{(21)} \sin pt_0 + w_{n\nu}^{(22)} \cos pt_0) \end{aligned} \quad (3.4)$$

причем w_{n0} и $w_{n\nu}^{(h\nu)}$ не зависят от времени.

Подставляя соотношения (3.4) в граничное условие (2.11), получим уравнение для нахождения γ_0 и ряд систем уравнений для определения $\gamma_\nu^{(1)}$ и $\gamma_\nu^{(2)}$ каждая:

$$w_{n0} = \cos(n, x) \quad (3.5)$$

$$w_{n\nu}^{(11)} + qw_{n\nu}^{(21)} = 0, \quad w_{n\nu}^{(12)} + qw_{n\nu}^{(22)} = F_\nu \quad (3.6)$$

где $\nu = 1, 2, 3, 4, 5$ и

$$\begin{aligned} F_1 = & -\cos(n, y), \quad F_2 = \cos(n, z) \\ F_3 = & \eta_0 \cos(n, z) - \zeta_0 \cos(n, y) \\ F_4 = & -\xi_0 \cos(n, z), \quad F_5 = \xi_0 \cos(n, y) \end{aligned} \quad (3.7)$$

а для $\nu = 6$ имеем

$$w_{n6}^{(11)} + qw_{n6}^{(21)} = -qf_2, \quad w_{n6}^{(12)} + qw_{n6}^{(22)} = f_1 \quad (3.8)$$

Из изложенного выше следует, что с точностью, принятой в линейной теории, малые изменения величины поступательной скорости ΔU не влияют на аэродинамические характеристики несущей поверхности (влияние оказывается малым более высокого порядка, чем это учитывается в линейной теории).

§ 4. Замена вихревого слоя подковообразными вихрями. Изложим метод, позволяющий довести до конца решение задачи о неустановившемся пространственном движении несущей поверхности. В этом методе вихревой слой, непрерывно распределенный по поверхности, заменяется дискретными подковообразными вихрями. С точностью, принятой в линейной теории, можно считать, что скорость сноса свободных вихрей постоянна по величине и направлению и равна средней поступательной скорости U . Поэтому свободные вихри нужно располагать в плоскости, в которой лежит соответствующий присоединенный вихрь и вектор U , отложенный из какой-либо его точки. Что касается присоединенных вихрей, то они должны так располагаться на поверхности или вблизи нее и число их должно быть таково, чтобы они с достаточной полнотой воспроизводили вихревой слой несущей поверхности. Кроме того, выбор расположения присоединенных вихрей и точек, где будут удовлетворяться граничные условия, должен быть произведен так, чтобы было обеспечено выполнение условия Чаплыгина-Жуковского о конечности скоростей в задних острых кромках несущей поверхности. Мы ограничимся этими общими замечаниями о расположении вихрей и расчетных точек; более подробно об этом в случае крыла малого удлинения см. в работе [9].

Будем относить индекс i к присоединенным вихрям, а индекс j — к точкам, в которых удовлетворяются граничные условия. На основании равенства (3.3) для безразмерной напряженности присоединенного вихря Γ_i , отнесенной к Ul_i , где l_i — размах рассматриваемого подковообразного вихря, можем написать

$$\Gamma_i = \Gamma_i^{(0)} + \sum_{\nu=1}^6 A_\nu (\Gamma_{i\nu}^{(1)} \cos pt_0 - q\Gamma_{i\nu}^{(2)} \sin pt_0) \quad (4.1)$$

От каждой из вихревых систем, соответствующих присоединенным вихрям $\Gamma_{i\nu}^{(1)} \cos pt_0$, возникнут скорости [7]

$$W_{xij\nu}^{(1)} = \frac{U\Gamma_{i\nu}^{(1)}}{2\pi} (-w_{xij}^{(2)} \sin pt_0 + w_{xij}^{(1)} \cos pt_0) \quad (4.2)$$

и аналогичные формулы имеют место для $W_{yij\nu}$ и $W_{zij\nu}$. Скорости от вихревых систем $\Gamma_{i\nu}^{(2)} \sin pt_0$ могут быть записаны в следующей форме:

$$W_{xij\nu}^{(2)} = \frac{U\Gamma_{i\nu}^{(2)}}{2\pi} (w_{xij}^{(1)} \sin pt_0 + w_{xij}^{(2)} \cos pt_0) \quad (4.3)$$

причем соотношения для $W_{y_{ij\nu}}^{(2)}$ и $W_{z_{ij\nu}}^{(2)}$ имеют такой же вид.

Координаты середины присоединенного вихря обозначим x_i, y_i, z_i , а координаты точки, где вычисляются скорости, x_{0j}, y_{0j}, z_{0j} , тогда

$$w_{x_{ij}}^{(1)} = w_x^{(1)}(\xi_{0ij}, \eta_{0ij}, \zeta_{0ij}, q_i), \quad w_{x_{ij}}^{(2)} = w_x^{(2)}(\xi_{0ij}, \eta_{0ij}, \zeta_{0ij}, q_i) \quad (4.4)$$

где

$$\xi_{0ij} = \frac{2(x_i - x_{0j})}{l_i}, \quad \eta_{0ij} = \frac{2(y_{0j} - y_i)}{l_i}, \quad \zeta_{0ij} = \frac{2(z_{0j} - z_i)}{l_i}, \quad q_i = \frac{pl_i}{2U} \quad (4.5)$$

Соотношения, аналогичные (4.4), имеют место и для таких же функций с индексами y и z . В работе [7] даны выражения для $w_x^{(1)}, w_x^{(2)}, w_y^{(1)}, w_y^{(2)}, w_z^{(1)}$ и $w_z^{(2)}$, на основании которых могут быть подсчитаны таблицы этих функций.

Составим уравнения для определения $\Gamma_{iv}^{(1)}$ и $\Gamma_{iv}^{(2)}$. С этой целью в расчетных точках j на несущей поверхности определим нормальные скорости от каждой из вихревых систем, соответствующих присоединенным вихрям $\Gamma_{iv}^{(1)} \cos pt_0$ и $\Gamma_{iv}^{(2)} \sin pt_0$. Так как в формуле (2.4) первый член является малой второго порядка, то необходимо в указанных точках найти значения функций

$$\begin{aligned} w_{nij}^{(1)} &= w_{y_{ij}}^{(1)} \cos(n, y) + w_{z_{ij}}^{(1)} \cos(n, z) \\ w_{nij}^{(2)} &= w_{y_{ij}}^{(2)} \cos(n, y) + w_{z_{ij}}^{(2)} \cos(n, z) \end{aligned} \quad (4.6)$$

после чего искомые нормальные скорости могут быть представлены следующими формулами:

$$\begin{aligned} W_{nij\nu}^{(1)} &= \frac{U\Gamma_{iv}^{(1)}}{2\pi} (-w_{nij}^{(2)} \sin pt_0 + w_{nij}^{(1)} \cos pt_0) \\ W_{nij\nu}^{(2)} &= \frac{U\Gamma_{iv}^{(2)}}{2\pi} (w_{nij}^{(1)} \sin pt_0 + w_{nij}^{(2)} \cos pt_0) \end{aligned} \quad (4.7)$$

Безразмерные нормальные скорости в точке j от стационарных подковообразных вихрей $\Gamma_i^{(0)}$ можно записать в виде

$$w_{n0j} = \sum_{i=1}^m \frac{\Gamma_i^{(0)}}{2\pi} w_{nij} \quad (4.8)$$

где m — число подковообразных вихрей. Чтобы получить нормальную скорость формулы (3.4), надо $W_{nij\nu}^{(1)}$ умножить на A_ν , $W_{nij\nu}^{(2)}$ — на $-qA_\nu$, просуммировать по ν от 1 до 6 и полученные выражения еще раз просуммировать по всем i . Если полученный результат сложить с w_{n0j} формулы (4.8), то мы найдем значение указанной нормальной скорости W_n в точке j . Сравнивая этот результат с формулой (3.4), получим

$$\begin{aligned} w_{n_{j\nu}}^{(11)} &= - \sum_{i=1}^m \frac{\Gamma_{iv}^{(1)}}{2\pi} w_{nij}^{(2)}, & w_{n_{j\nu}}^{(12)} &= \sum_{i=1}^m \frac{\Gamma_{iv}^{(1)}}{2\pi} w_{nij}^{(1)} \\ w_{n_{j\nu}}^{(21)} &= - \sum_{i=1}^m \frac{\Gamma_{iv}^{(2)}}{2\pi} w_{nij}^{(1)}, & w_{n_{j\nu}}^{(22)} &= - \sum_{i=1}^m \frac{\Gamma_{iv}^{(2)}}{2\pi} w_{nij}^{(2)} \end{aligned} \quad (4.9)$$

Если выражение (4.8) подставить в уравнение (3.5), а соотношения (4.9) — в системы (3.6) и (3.8), мы придем к следующим системам линей-

ных алгебраических уравнений:

$$\sum_{i=1}^m \frac{\Gamma_i^{(0)}}{2\pi} w_{nij} = \cos(n, x)_j \quad (j=1, \dots, m) \quad (4.10)$$

$$\sum_{i=1}^m \frac{\Gamma_{iv}^{(1)}}{2\pi} w_{nij}^{(2)} + q \sum_{i=1}^m \frac{\Gamma_{iv}^{(2)}}{2\pi} w_{nij}^{(1)} = 0 \quad (j=1, \dots, m) \quad (4.11)$$

$$\sum_{i=1}^m \frac{\Gamma_{iv}^{(1)}}{2\pi} w_{nij}^{(1)} - q \sum_{i=1}^m \frac{\Gamma_{iv}^{(2)}}{2\pi} w_{nij}^{(2)} = F_{jv}$$

причем ν может принимать значения 1, 2, 3, 4, 5; для $\nu = 6$ имеем

$$\sum_{i=1}^m \frac{\Gamma_{i6}^{(1)}}{2\pi} w_{nij}^{(2)} + q \sum_{i=1}^m \frac{\Gamma_{i6}^{(2)}}{2\pi} w_{nij}^{(1)} = qf_{2j} \quad (j=1, \dots, m) \quad (4.12)$$

$$\sum_{i=1}^m \frac{\Gamma_{i6}^{(1)}}{2\pi} w_{nij}^{(1)} - q \sum_{i=1}^m \frac{\Gamma_{i6}^{(2)}}{2\pi} w_{nij}^{(2)} = f_{1j}$$

Неизвестными в системах (4.10), (4.11) и (4.12) являются $\Gamma_i^{(0)}$, $\Gamma_{iv}^{(1)}$ и $\Gamma_{iv}^{(2)}$, причем последние определяются совместно.

Таким образом, общая задача о неустановившемся движении несущей поверхности разбивается на ряд частных, среди которых задача об определении $\Gamma_i^{(0)}$ является обычной стационарной задачей. Остальные решения будут зависеть от параметра q ; вообще говоря, расчеты должны производиться для ряда значений q в интересующем нас диапазоне изменения этой величины.

§ 5. Случай малых q . Для ряда приложений большой интерес представляет случай весьма малых значений безразмерной частоты q . Имея в виду эти приложения, поставим перед собою задачу найти значения $\Gamma_{iv}^{(1)}$ и $\Gamma_{iv}^{(2)}$ при $q = 0$. Этот случай интересен еще и потому, что здесь получается сильное упрощение в расчетах.

Напомним, что при $q = 0$

$$w_{nij}^{(1)} = w_{nij}, \quad w_{nij}^{(2)} = 0 \quad (5.1)$$

где w_{nij} — безразмерная нормальная скорость, соответствующая стационарному случаю [7]. В соответствии с этим вторые строки систем (4.11) и (4.12) примут соответственно вид ($\nu = 1, 2, 3, 4, 5$):

$$\sum_{i=1}^m \frac{\Gamma_{iv}^{(1)}}{2\pi} w_{nij} = F_{jv}, \quad \sum_{i=1}^m \frac{\Gamma_{i6}^{(2)}}{2\pi} w_{nij} = f_{1j} \quad (j=1, \dots, m) \quad (5.2)$$

Поделим первую группу уравнений систем (4.11) и (4.12) на q и устремим q к нулю. Так как

$$\frac{\partial w_{nij}^{(2)}}{\partial q} = \frac{l_i}{2b} \frac{\partial w_{nij}^{(2)}}{\partial q_i}$$

а функция $\partial w_{nij}^{(2)} / \partial q_i$ может быть подсчитана по $\partial w_y^{(2)} / \partial q$ и $\partial w_z^{(2)} / \partial q$,

выражения для которых имеются в работе [7], то ($\nu = 1, 2, 3, 4, 5$)

$$\sum_{i=1}^m \frac{\Gamma_{iv}^{(2)}}{2\pi} w_{nij} = - \sum_{i=1}^m \frac{\Gamma_{iv}^{(1)}}{4\pi} \frac{l_i}{b} \frac{\partial w_{nij}^{(2)}}{\partial q_i} \quad (j = 1, \dots, m) \quad (5.3)$$

$$\sum_{i=1}^m \frac{\Gamma_{i6}^{(2)}}{2\pi} w_{nij} = f_{2j} - \sum_{i=1}^m \frac{\Gamma_{i6}^{(1)}}{4\pi} \frac{l_i}{b} \frac{\partial w_{nij}^{(2)}}{\partial q_i}$$

После того как решены системы (5.2), можно переходить к системам (5.3). Таким образом, здесь $\Gamma_{iv}^{(1)}$ и $\Gamma_{iv}^{(2)}$ находятся раздельно, что сильно упрощает расчеты. Еще большее значение в этом смысле имеет то, что, как видно из сопоставления указанных систем, все они отличаются одна от другой только правыми частями. Следовательно, в данном случае нам необходимо многократно решить одну систему уравнений с различными свободными членами.

Обращаясь к формулам (2.10) и (4.1), нетрудно убедиться, что при $q = 0$ мы, в частности, находим решение задачи об установившемся поступательном движении тела, которое получается при помощи величин $\Gamma_i^{(0)}$, $\Gamma_{i1}^{(1)}$ и $\Gamma_{i2}^{(1)}$.

Величины $\Gamma_{i3}^{(1)}$, $\Gamma_{i4}^{(1)}$, $\Gamma_{i5}^{(1)}$ и $\Gamma_{i6}^{(1)}$ в данном случае дают решение задачи Чаплыгина о вращении несущей поверхности и о деформации ее при постоянной циркуляции. Следует отметить также, что все указанные величины получаются такими же, как и в гипотезе стационарности.

Кроме того, мы находим целый ряд дополнительных величин (все $\Gamma_{iv}^{(2)}$), которые не учитываются гипотезой стационарности и которые не могут появиться при решении задачи Чаплыгина.

Заметим, что в своей работе по исследованию колебаний круглого крыла [4] Кочин, предполагая q малым по сравнению с единицей, также воспользовался подобным приближением.

На основании изложенного можно сделать вывод о том, что если для какой-либо несущей поверхности сделаны расчеты по определению ее аэродинамических характеристик при стационарном движении, сравнительно просто эти расчеты продолжить для нестационарного случая, соответствующего малым значениям q .

§ 6. Коэффициенты вращательных производных несущей поверхности. Определив интенсивность присоединенного вихревого слоя, можно перейти к нахождению аэродинамических характеристик несущей поверхности. Для этого в общем случае нужно воспользоваться интегралом Коши-Лагранжа, который в связанных осях записывается следующим образом:

$$\frac{p}{\rho} = C(t) - \frac{\partial \Phi^*}{\partial t} - \frac{W^2}{2} - \mathbf{W} \cdot \mathbf{U}^* \quad (6.1)$$

где p — давление в рассматриваемой точке жидкости, ρ — плотность, $C(t)$ — произвольная функция времени, Φ^* — потенциал возмущенных скоростей, причем производная $\partial \Phi^* / \partial t$ берется в подвижных осях. Проекция аэродинамической силы P и аэродинамического момента M ,

которые действуют на несущую поверхность, для связанных осей будут равны

$$P_x = - \iint p \cos(n, x) ds, \dots, M_x = - \iint p [y \cos(n, z) - z \cos(n, y)] ds, \dots \quad (6.2)$$

где интегрирование ведется по всей несущей поверхности. Удерживая точность линейной теории, в формулах (6.1) следует отбросить все величины, порядок малости которых выше первого. Из соотношений (6.2) видно, что сила P_x будет всегда малой второго порядка, а остальные силы и моменты, вообще говоря, малыми первого порядка. Заметим, что правильное нахождение силы P_x обеспечивается линейной теорией.

На основании приведенных формул можно получить выражения для коэффициентов аэродинамических сил и моментов, причем эти коэффициенты при неустановившемся движении будут зависеть от времени. На практике, однако, такие зависимости обычно бывают неудобны. Значительно удобнее изменение аэродинамических коэффициентов непосредственно связать с изменением основных кинематических параметров и параметров деформации несущей поверхности. Из формул (3.1) следует, что возмущенные скорости будут зависеть от линейных комбинаций из основных кинематических параметров, параметра деформации и их первых производных по времени. Так как вторые производные по времени от каждого из основных параметров в нашем случае с точностью до постоянного множителя опять будут равны этим параметрам, то можем утверждать, что коэффициенты всех аэродинамических сил, кроме P_x , и всех моментов будут представляться в виде линейных комбинаций из основных кинематических параметров, параметра деформации и их первых производных. Обозначим через c какой-либо из указанных коэффициентов, тогда можем написать

$$c = c^{\alpha\alpha} + c^{\alpha\dot{\alpha}} + c^{\beta\beta} + c^{\beta\dot{\beta}} + c^{\omega_x\omega_x} + c^{\omega_x\dot{\omega}_x} + c^{\omega_y\omega_y} + c^{\omega_y\dot{\omega}_y} + c^{\omega_z\omega_z} + c^{\omega_z\dot{\omega}_z} + c^{\Delta\Delta} + c^{\Delta\dot{\Delta}} \quad (6.3)$$

В аналогичном виде могут быть представлены и коэффициенты шарнирных моментов в нестационарном случае.

Коэффициенты с различными индексами, стоящие в правой части формулы (6.3), будем называть коэффициентами вращательных производных. Такое название укоренилось на практике, где, пользуясь гипотезой стационарности, рассматривают некоторые из членов правой части (6.3) (см. об этом, например, в книге [10]). Все коэффициенты вращательных производных являются функциями безразмерной круговой частоты q .

До сих пор мы не рассматривали коэффициент c_x , соответствующий силе P_x . Если поверхность не имеет острых кромок, кроме задних, все соответствующие коэффициенты вращательных производных в этом случае также могут быть найдены на основании формул (6.1) и (6.2). В противном случае вопрос осложняется из-за необходимости учесть еще так называемую подсасывающую силу, возникающую из-за наличия сильных разряжений у передних острых кромок поверхности [4].

В § 5 мы дали способ определения аэродинамических характеристик несущей поверхности при малых q . Теперь мы видим, что коэффициенты вращательных производных c^α , c^β , c^{ω_x} , c^{ω_y} , c^{ω_z} , c^Δ , найденные при $q = 0$, в точности соответствуют тем значениям, которые получаются при решении задачи Чаплыгина. Отметим также, что эти значения совпадают с теми, которые могут быть получены на основании гипотезы стационарности. Кроме того, при расчетах по методу, изложенному в § 5, мы находим для $q = 0$ коэффициенты вращательных производных c^α , c^β , c^{ω_x} , c^{ω_y} , c^{ω_z} , c^Δ , которые, вообще говоря, не будут равны нулю. Ни в задаче Чаплыгина, ни оставаясь на базе гипотезы стационарности, мы с этими величинами не встречаемся. Следует иметь в виду, что даже для весьма малых чисел Струхаля q при определении аэродинамических характеристик, соответствующих колебаниям несущей поверхности относительно оси z , пользоваться гипотезой стационарности нельзя. Действительно, в этом случае $\omega_z = \alpha'$, а поэтому вместо формулы (6.3) будем иметь

$$c = c^\alpha \alpha + (c^\alpha + c^{\omega_z}) \omega_z + c^{\omega_z} \omega_z$$

т. е. множитель при ω_z равен сумме $c^\alpha + c^{\omega_z}$, а не c^{ω_z} , как получается по гипотезе стационарности. Данная сумма может значительно отличаться от c^{ω_z} , причем указанное обстоятельство будет иметь место не только для самолета^[10], но, например, и для изолированного крыла.

Отметим, что изложенный выше метод иногда может быть без существенных усложнений распространен и на тот случай, когда линеаризация производится не по всем параметрам. При этом необходимо предварительно установить, что принятая в методе схема обеспечивает точность новых расчетов.

Поступила 16 XI 1954

ЛИТЕРАТУРА

1. Некрасов А. И. Теория крыла в нестационарном потоке. Изд. АН СССР, 1947.
2. Седов Л. И. Плоские задачи гидродинамики и аэродинамики. ГИТТЛ, 1950.
3. Schade Th. Theorie der schwingenden kreisförmigen Tragfläche auf potentialtheoretischer Grundlage. Luftfahrtforschung 11/12, Bd. 17, 1940.
4. Кочин Н. Е. Об установившихся колебаниях крыла круговой формы в плане. Собр. соч., т. II. Изд. АН СССР, 1949.
5. Лоуренс Х. и Гербер Е. Аэродинамические силы, действующие на колеблющееся крыло малого удлинения в несжимаемой жидкости. Сборники переводов и обзоров иностранной периодической литературы. Механика, вып. 2. Илл., 1954.
6. Чаплыгин С. А. О влиянии плоско-параллельного потока воздуха на движущееся в нем цилиндрическое крыло. Собр. соч., т. II. ГИТТЛ, 1948.
7. Белоцерковский С. М. Подковообразный вихрь при неустановившемся движении. ПММ, т. XIX, вып. 2, 1955.
8. Седов Л. И. О неустановившемся движении внутри жидкости тела вращения. Труды ЦАГИ, вып., 515, 1940.
9. Falkner V. M. The solution of lifting-plane problems by vortex-lattice theory. ARC, Rep. and Mem., № 2591, 1953.
10. Ведров В. С. Динамическая устойчивость самолета. Оборонгиз, 1938.