

К ТЕОРИИ НЕЛИНЕЙНЫХ КОНИЧЕСКИХ ТЕЧЕНИЙ

Б. М. Булах

(Саратов)

Рассматривается обтекание конических тел, частично выступающих из конуса Маха для невозмущенного потока. Влияние вихрей, а также скачков энтропии после ударных волн умеренной силы не учитывается, что, как известно, справедливо с точностью до малых третьего порядка.

Изучается обтекание стреловидных крыльев со сверхзвуковыми кромками, дается численный расчет примера.

§ 1. Основные уравнения. Уравнение для потенциала скорости установившегося изэнтропического безвихревого течения идеального сжимаемого газа имеет вид:

$$\varphi_{xx}(a^2 - u^2) + \varphi_{yy}(a^2 - v^2) + \varphi_{zz}(a^2 - w^2) - 2\varphi_{xy}uv - 2\varphi_{xz}uw - 2\varphi_{yz}vw = 0 \quad (1.1)$$

где $u = \varphi_x$, $v = \varphi_y$, $w = \varphi_z$ — составляющие скорости по осям координат, a — скорость звука,

$$a^2 = a_1^2 - \frac{1}{2}(\kappa - 1)(u^2 + v^2 + w^2 - W_1^2)$$

При этом a_1 , W_1 — соответственно скорости звука и скорость в некоторой точке потока, κ — отношение удельных теплоемкостей. Производные здесь и в дальнейшем почти везде обозначены индексом.

Возьмем потенциал скорости в форме

$$\varphi = zF(\xi, \eta) \quad \left(\xi = \frac{x}{z}, \eta = \frac{y}{z} \right) \quad (1.2)$$

Составляющие скорости запишутся в виде

$$u = F_\xi, \quad v = F_\eta, \quad w = F - \xi F_\xi - \eta F_\eta$$

и зависят только от ξ и η , что и указывает на коничность поля скоростей. Уравнение для F получится после подстановки (1.2) в (1.1), оно имеет вид:

$$AF_{\xi\xi} + 2BF_{\xi\eta} + CF_{\eta\eta} = 0 \quad (1.3)$$

где

$$A^2 = a^2(1 + \xi^2) - (u - \xi w)^2, \quad B = (a^2 - w^2)\xi\eta + (u\eta + v\xi)w - u \cdot v$$

$$C = a^2(1 + \eta^2) - (v - \eta w)^2$$

Плоскость $\xi\eta$ имеет простой физический смысл, это плоскость $z = 1$ в пространстве xuz , а ξ , η — соответственно координаты x и y точек этой плоскости:

$$\Delta = AC - B^2 = a^2[a^2(1 + \xi^2 + \eta^2) - (u - \xi w)^2 - (v - \eta w)^2 - (\xi v - \eta u)^2]$$

§ 2. Распространение разрывов старших производных вдоль характеристик. Рассмотрим квазилинейное уравнение второго порядка общего вида с двумя независимыми переменными:

$$L[F] = AF_{\xi\xi} + 2BF_{\xi\eta} + CF_{\eta\eta} = D \quad (2.1)$$

Здесь A, B, C, D — произвольные функции, зависящие от $\xi, \eta, F, F_{\xi}, F_{\eta}$ и имеющие достаточное число непрерывных производных по ним. Пусть на характеристике N , заданной уравнением $\varphi(\xi, \eta) = 0$, происходит разветвление интегральных поверхностей (2.1). На N они имеют одинаковые F, F_{ξ}, F_{η} , вторые же производные от F терпят разрыв при переходе с одной стороны N на другую.

Если обозначить скачок функции f при переходе с одной стороны N на другую через $\{f\}$, т. е. $\{f\} = f_2 - f_1$, где f_2 и f_1 — предельные значения f , взятые при подходе к N соответственно со стороны 2 и 1, то легко установить ^[1], что имеют место соотношения

$$\{F_{\xi\xi}\} = \lambda \varphi_{\xi}^2, \quad \{F_{\xi\eta}\} = \lambda \varphi_{\xi} \varphi_{\eta}, \quad \{F_{\eta\eta}\} = \lambda \varphi_{\eta}^2$$

где λ — коэффициент разрыва. При выводе уравнения для λ в ^[1] допущена неточность, в результате которой это уравнение получалось неверным. Введем новые независимые переменные φ, ψ по формулам

$$\varphi = \varphi(\xi, \eta), \quad \psi = \psi(\xi, \eta) \quad \left(\frac{D(\varphi, \psi)}{D(\xi, \eta)} \neq 0 \right)$$

$\varphi = 0$ соответствует характеристике N . Тогда $\lambda = \{F_{\varphi\varphi}\}$, а (2.1) преобразуется в уравнение

$$F_{\varphi\varphi}Q(\varphi, \varphi) + 2F_{\varphi\psi}Q(\varphi, \psi) + F_{\psi\psi}Q(\psi, \psi) + F_{\varphi}L[\varphi] + F_{\psi}L(\psi) = D \quad (2.2)$$

Коэффициенты при производных в левой части (2.2) находятся по известным формулам преобразования и зависят посредством A, B, C от F_{ξ}, F_{η} и, следовательно, от F_{φ}, F_{ψ} .

Продифференцируем уравнение (2.2) по φ , запишем полученное уравнение для точек P_1 и P_2 , взятых по разные стороны N , вычтем одно из другого и будем неограниченно приближать P_1 и P_2 к точке P на N . В результате получим искомое уравнение для $\lambda = \{F_{\varphi\varphi}\}$. При этом надо учесть, что $Q(\varphi, \varphi) = 0$ на N , так как $\varphi = 0$ есть характеристика.

Приводим окончательный результат:

$$2Q(\varphi, \psi) \frac{d\lambda}{d\psi} + \lambda [Q(\varphi, \varphi)_{F_{\varphi}} \lambda + Q_1(\varphi, \varphi)_{\varphi} + Q(\varphi, \varphi)_{F_{\varphi}} (F_{\varphi\varphi})_1 + \quad (2.3)$$

$$+ 2F_{\varphi\psi}Q(\varphi, \psi)_{F_{\varphi}} + F_{\psi\psi}Q(\psi, \psi)_{F_{\varphi}} + F_{\varphi}L[\varphi]_{F_{\varphi}} + F_{\psi}L[\psi]_{F_{\varphi}} + L[\varphi] - D_{F_{\varphi}}] = 0$$

Индекс 1 у $Q(\varphi\varphi)_{\varphi}$ и $F_{\varphi\varphi}$ означает, что предельные значения $Q(\varphi, \varphi)_{\varphi}, F_{\varphi\varphi}$ на N взяты при подходе к N со стороны 1.

Полученное обыкновенное дифференциальное уравнение для λ есть уравнение Бернулли, оно переходит в линейное, данное в работе ^[1], в том случае, если A, B, C, D не зависят от $F_{\xi}F_{\eta}$.

Если на характеристике N имеется параболическая точка, то коэффициенты при $d\lambda/d\psi$ в (2.3) обращаются в нуль, т. е. такая точка является

особой для уравнения (2.3). Действительно, в параболической точке $\Delta = AC - B^2 = 0$, на характеристике N $Q(\varphi, \varphi) = 0$, а для преобразованного уравнения (2.2) $\Delta = Q(\varphi, \varphi)Q(\psi, \psi) - Q^2(\varphi, \psi)$ и равен нулю в силу инвариантности знака Δ при точечном преобразовании. Отсюда следует, что $Q(\varphi, \psi) = 0$ в этой точке. Нам понадобится случай, когда $Q(\varphi, \psi)$ имеет в параболической точке ($\psi = 0$) нуль первого порядка. Уравнение (2.3) можно записать в схематическом виде:

$$\psi \alpha(\psi) \frac{d\lambda}{d\psi} + \lambda [\beta(\psi)\lambda + \gamma(\psi)] = 0 \quad (2.4)$$

Предполагаем, что α, β, γ — непрерывно дифференцируемые функции и $\alpha(0) = \alpha_0 \neq 0$. Записывая решение (2.4) в явном виде, легко установить:

$$\lambda \rightarrow -\frac{\gamma_0}{\beta_0} \text{ при } \psi \rightarrow 0, \text{ если } \beta(0) = \beta_0 \neq 0, \quad \gamma(0) = \gamma_0 \neq 0, \quad \frac{\gamma_0}{\alpha_0} > 0$$

На других случаях не останавливаемся, отметим только, что разрыв вторых производных может затухать в параболической точке характеристики N . Для коэффициентов разрыва третьих и высших производных получаются линейные уравнения.

§ 3. Простые конические волны. Простыми коническими волнами называются такие конические течения, в которых скорости по величине и направлению остаются постоянными на плоскостях, проходящих через полюс конического поля и зависящих от одного параметра [2]. На плоскости $\xi\eta$ такие течения имеют семейство прямолинейных характеристик, на которых вектор скорости сохраняет постоянные значения.

Однородный поток. Направим ось z «по потоку», так что скорость будет иметь одну составляющую w_1 . Уравнение характеристик $A\eta'^2 - 2B\eta' + C = 0$ в этом случае можно привести к виду

$$(1 - M_1^2)(\xi\eta' - \eta)^2 + \eta'^2 + 1 = 0, \quad \eta' = \frac{d\eta}{d\xi} \quad (3.1)$$

где M_1 — число Маха однородного потока. Ищем решение (3.1) в виде $\eta = C\xi + d$, где C, d — постоянные. Подстановка $\eta = C\xi + d$ в (3.1) дает

$$(1 - M_1^2)d^2 + C^2 + 1 = 0$$

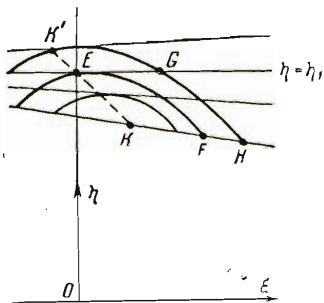
и уравнения характеристик запишутся в виде

$$\eta = C\xi \pm (M_1^2 - 1)^{-\frac{1}{2}} (1 + C^2)^{\frac{1}{2}} \quad (3.2)$$

Оба семейства характеристик состоят из прямых. Огибающей каждого семейства характеристик (3.2) является конус Маха $\xi^2 + \eta^2 = (M_1^2 - 1)^{-1}$, который одновременно является параболической линией.

Если $\xi^2 + \eta^2 > (M_1^2 - 1)^{-1}$, то уравнение (1.3) в нашем случае гиперболического типа, если $\xi^2 + \eta^2 < (M_1^2 - 1)^{-1}$, то эллиптического типа. Отсюда следует, что вдоль прямолинейной характеристики встречается только одна параболическая точка, что справедливо для прямолинейных характеристик произвольной простой волны, так как каждую прямолинейную характеристику можно включить в характеристики однородного потока. Из геометрической картины расположения характеристик, одно-

родного потока также следует, что если зафиксировать какую-нибудь прямолинейную характеристику произвольной простой волны, направить ось z «по потоку» на ней, а ось y повернуть так, чтобы характеристика изображалась на плоскости $\xi\eta$ прямой $\eta = \eta_1$, то параболическая точка прямолинейной характеристики будет лежать на оси η и ее координаты



Фиг. 1

$$\xi = 0, \quad \eta = \eta_1, \quad \eta_1 = (M_1^2 - 1)^{-\frac{1}{2}}$$

где M_1 — число Маха на характеристике.

Прямые и косые течения Прандтля-Майера имеют на плоскости $\xi\eta$ семейство прямолинейных характеристик, проходящих через определенную точку (ξ_0, η_0) .

Потенциал F имеет для них вид:

$$F = (\xi - \xi_0) \Phi \left(\frac{\eta - \eta_0}{\xi - \xi_0} \right) + F_0$$

где F_0 — некоторая постоянная; компоненты скорости выражаются так:

$$u = \Phi - r\Phi', \quad v = \Phi', \quad w = F_0 - \xi_0 u - \eta_0 v \quad \left(r = \frac{\eta - \eta_0}{\xi - \xi_0}, \quad \Phi' = \frac{d\Phi}{dr} \right)$$

Уравнение для определения Φ имеет вид:

$$a^2 [1 + r^2 + (\xi_0 r - \eta_0)^2] - [w(\xi_0 r - \eta_0) - ur + v]^2 = 0$$

Общий случай простых конических волн. Предполагаем, что потенциал F имеет непрерывные третьи производные по ξ, η всюду, за исключением точек огибающей прямолинейных характеристик. Выведем уравнение для распределения вторых производных от F вдоль прямолинейных характеристик. Зафиксируем какую-нибудь прямолинейную характеристику, направим ось z «по потоку» на ней, ось y повернем так, чтобы в плоскости $\xi\eta$ характеристика имела уравнение $\eta = \eta_1$; тогда $\eta_1 = (M_1^2 - 1)^{-1/2}$, а координаты параболической точки есть $\xi = 0, \eta = \eta_1$ (фиг. 1).

В этой системе координат на характеристике $\eta = \eta_1, u = v = 0, w = w_1$. Напомним, что вообще $u = F_\xi, v = F_\eta, w = F - \xi F_\xi - \eta F_\eta$.

Продифференцируем уравнение (1.3) по η и перейдем на характеристику $\eta = \eta_1$, учитывая, что на ней $C = 0, F_\xi = F_\eta = 0$, а также $F_{\xi\xi} = F_{\eta\xi} = 0$.

В результате получим

$$2BF_{\eta\eta\xi} + C_\eta F_{\eta\eta} = 0 \text{ на характеристике } \eta = \eta_1 \quad (3.3)$$

После подстановки значений B, C_η , которые вычисляются элементарно, (3.3) преобразуется в

$$\xi \frac{d\lambda}{d\xi} + \lambda \left[1 - \frac{\kappa + 1}{2w_1} \frac{M_1^4}{(M_1^2 - 1)^2} \lambda \right] = 0 \quad (3.4)$$

через λ обозначено $(F_{\eta\eta})_{\eta=\eta_1}$.

(Если считать, что с одной стороны к характеристике примыкает однородный поток, то λ совпадает с коэффициентом разрыва вторых производных от F (см. § 2), так как в нашем случае $\varphi = \eta - \eta_1$ и вторые производные от F для однородного потока тождественно равны нулю.)

Уравнение (3.4) легко интегрируется:

$$\lambda = \left[\frac{x+1}{2w_1} \frac{M_1^4}{(M_1^2-1)^2} - \text{const } \xi \right]^{-1} \quad (3.5)$$

или же $\lambda \equiv 0$. При $\xi = 0$ имеем

$$\lambda = \frac{2w_1}{x+1} \frac{(M_1^2-1)^2}{M_1^4}$$

Это означает, что для любой простой волны, примыкающей к характеристике, вторые производные от F в параболической точке зависят только от числа M_1 на характеристике и системы координат, но не от конкретного вида простой волны, если ускорение на характеристике не равно нулю. Аналогично можно получить уравнение для $F_{\eta\eta}$.

Если ускорение на характеристике $\eta = \eta_1$ не равно нулю, то любая простая волна в окрестности параболической точки является волной расширения:

$$\left[\frac{\partial}{\partial \eta} (u^2 + v^2 + w^2) \right]_{\xi=0, \eta=\eta_1} = -2w_1 \eta_1 (F_{\eta\eta})_{\xi=0, \eta=\eta_1} = -4 \frac{w_1^2}{x+1} \frac{(M_1^2-1)^2}{M_1^4} < 0$$

что и указывает на расширение «в сторону начала координат».

Покажем, что если на характеристике GH (фиг. 1) скорость растет по направлению от G к H , то огибающая прямолинейных характеристик не может начаться между G и параболической точкой E . При указанных условиях $F_{\eta\eta} > 0$ в точке G , так как на характеристике $\eta = \eta_1$:

$$\frac{\partial}{\partial \eta} (u^2 + v^2 + w^2) = -2w_1 \eta_1 (F_{\eta\eta})_{\eta=\eta_1}$$

Из того, что $(F_{\eta\eta})_E > 0$, $(F_{\eta\eta})_G > 0$, и формулы (3.5) следует, что если $0 \leq \xi \leq \xi_G$, то $F_{\eta\eta}$ ограничено; это и указывает на отсутствие огибающей между точками G и E . Огибающая начнется в той точке, где $F_{\eta\eta}$ обратится в бесконечность. Такая точка, как видно из (3.5), существует.

Огибающая прямолинейных характеристик начнется после параболической линии, если двигаться вдоль прямолинейных характеристик из области, где происходит расширение на характеристике GH , в сторону параболической линии.

Параболическая линия не касается прямолинейных характеристик простой волны, если ускорение нигде не обращается в нуль. Предполагаем, что F имеет непрерывные третьи производные по ξ, η всюду, за исключением точек огибающей прямолинейных характеристик. Уравнение для определения параболической линии есть $\Delta = AC - B^2 = 0$.

Продифференцируем это уравнение по ξ вдоль параболической линии EK (фиг. 1), уравнение которой берем в виде $\eta_{II} = \eta_{II}(\xi)$; имеем

$$\Delta_\xi + \eta_{II}' \Delta_\eta = 0$$

Так как ускорение в простой волне отлично от нуля, то на характеристике $\eta = \eta_1$ значение $F_{\eta\eta}$ дается формулой (3.5) и

$$(F_{\eta\eta})_E = \frac{2w_1}{x+1} \frac{(M_1^2-1)^2}{M_1^4}$$

Легко установить, что $\Delta_\xi \rightarrow 0$, когда мы приближаемся к точке E ($\xi = 0$) вдоль EK , а $\lim \Delta_\eta$ при $\xi \rightarrow 0$ с точностью до ограниченного множителя равен

$$(F_{\eta\eta})_E = \frac{2w_1}{\kappa + 1} \frac{(M_1^2 - 1)}{M_1^4}$$

Отсюда $\lim \Delta_\eta = 0$ при $\xi \rightarrow 0$. Далее по теореме о среднем имеем

$$\eta_{\Pi}' = -\frac{\Delta_\xi}{\Delta_\eta} = -\frac{(d\Delta_\xi/d\xi)_{\text{ср}} \xi}{(d\Delta_\eta/d\xi)_{\text{ср}} \xi} = -\frac{(\Delta_{\xi\xi} + \eta_{\Pi}' \Delta_{\xi\eta})_{\text{ср}}}{(\Delta_{\eta\xi} + \eta_{\Pi}' \Delta_{\eta\eta})_{\text{ср}}}$$

Вторые производные от Δ по ξ , η ограничены в силу сделанных предположений относительно F и отсутствия огибающей в окрестности параболической точки. Простое вычисление показывает, что $(\Delta_{\xi\xi})_E = 2a_1^2(a_1^2 - w_1^2) \neq 0$. Это означает, что $\lim \eta_{\Pi}' \neq 0$ при $\xi \rightarrow 0$, так как, предположив, что $\lim \eta_{\Pi}' = 0$ при $\xi \rightarrow 0$, получим, что

$$\lim_{\xi \rightarrow 0} \eta_{\Pi}' = -\lim_{\xi \rightarrow 0} \frac{(\Delta_{\xi\xi})_{\text{ср}}}{(\Delta_{\eta\xi})_{\text{ср}}} \neq 0$$

Вычислим кривизну второй характеристики в параболической точке E (фиг. 1 и 2) в предположении, что ускорение на характеристике $\eta = \eta_1$ не равно нулю. Это означает, что $F_{\eta\eta}$ дается формулой (3.5). Огибающей прямолинейных характеристик не будет в некоторой окрестности точки E ; следовательно, предельное положение точки пересечения двух близких характеристик будет вне этой окрестности.

Запишем уравнение характеристик в виде

$$A\eta'^2 - 2B\eta' + C = 0, \quad \text{или} \quad \eta_{12}' = \frac{B \pm \sqrt{B^2 - AC}}{A}$$

Если угловой коэффициент прямолинейных характеристик k , а криволинейных η' , то $\eta' + k = 2B/A$.

Через точку E пройдет в силу непрерывности A , B , C и того, что $(A)_E = a_1^2 \neq 0$, по крайней мере одна характеристика. Запишем соотношение $\eta' + k = 2B/A$ для характеристики, проходящей через точку E , и продифференцируем его вдоль этой характеристики по ξ

$$\eta'' = 2 \left(\frac{B_\xi}{A} - \frac{B}{A^2} A_\xi \right) + 2 \left(\frac{B}{A} \right)_\eta \eta' - \frac{dk}{d\xi}$$

Введем в точке F локальную систему координат τ , n ; ось $F\tau$ направим по прямолинейной характеристике, ось Fn — по нормали к ней; ds — элемент дуги характеристики EF . Тогда

$$\frac{dk}{d\xi} = \frac{\partial k}{\partial \tau} \frac{d\tau}{d\xi} + \frac{\partial k}{\partial n} \frac{dn}{d\xi} = \frac{dk}{dn} \frac{dn}{d\tau} \frac{d\tau}{ds} \frac{ds}{d\xi} = \frac{\partial k \sin \theta_1}{\partial n \cos \theta_2}$$

так как

$$\frac{\partial k}{\partial \tau} = 0, \quad \frac{dn}{d\tau} = \text{tg } \theta_1, \quad \frac{d\tau}{ds} = \cos \theta_1, \quad \frac{ds}{d\xi} = \sec \theta_2$$

Производная $\partial k / \partial n$ ограничена, когда точка F стремится по характеристике EF к точке E . В окрестности точки E , где нет огибающей

прямолинейных характеристик, найдется точка N , лежащая на прямолинейной характеристике, проходящей через точку F , такая, что

$$\left| \left(\frac{\partial k}{\partial n} \right)_N \right| \geq \left| \left(\frac{\partial k}{\partial n} \right)_F \right|$$

За точку N можно взять любую точку между точкой F и точкой огибающей прямолинейных характеристик, лежащей на характеристике NF , так как Δn , соответствующие одинаковому приращению Δk , для таких точек меньше, чем для точки F (фиг. 2). Отсюда следует, что

$$\lim_{F \rightarrow E} \left| \left(\frac{\partial k}{\partial n} \right)_F \right| \leq \lim_{N \rightarrow N_1} \left| \left(\frac{\partial k}{\partial n} \right)_N \right|$$

Здесь N_1 — некоторая точка на характеристике $\eta = \eta_1$ между точкой E и точкой огибающей прямолинейных характеристик. Из выражения для η_{12}' следует в силу сделанных предположений относительно F , что $(\partial k / \partial n)_N < \infty$; отсюда вытекает, что $\lim dk / d\xi = 0$ при $F \rightarrow E$. В силу того что $\eta' = B = 0$ в точке E и $F_{\xi\xi}^2 + F_{\xi\eta}^2 + F_{\eta\eta} < \infty$:

$$\lim_{F \rightarrow E} \eta'' = 2 \left(\frac{B_\xi}{A} \right)_E = -2(M_1^2 - 1)^{1/2}$$

так как

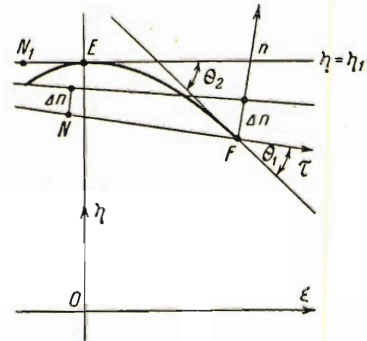
$$(B_\xi)_E = -a_1^2(M_1^2 - 1)^{1/2}, \quad (A)_E = a_1^2$$

Радиус кривизны криволинейной характеристики EF в точке E вдвое меньше радиуса кривизны конуса Маха для потока на характеристике $\eta = \eta_1$. Характеристика EF выпукла «в сторону сжатия».

Течение в окрестности параболической точки E (фиг. 1 и 2), если поток за характеристикой EF отличен от простой волны, есть течение сжатия. Для доказательства нужно воспользоваться поведением решений уравнения (2.3) и свойствами простых волн в окрестности точки E .

Займемся весьма важным для дальнейшего вопросом о расположении параболической линии простой волны. Введем единичный вектор нормали к прямолинейным характеристикам в плоскости $\xi\eta$. Каждая характеристика представляет собой след от пересечения характеристической плоскости в пространстве xuz с плоскостью $z = 1$. Если поместить вектор скорости на характеристической плоскости в полюс простой волны, то он будет лежать по определенную сторону от плоскости. Эту «сторону» характеристической плоскости назовем положительной. Единичный вектор нормали к прямолинейным характеристикам в плоскости $\xi\eta$ направим в положительную сторону. Этим мы однозначно определили поле нормалей к прямолинейным характеристикам.

Лемма 1. Если простая волна имеет непрерывные первые производные от F , то поле векторов нормали непрерывно.



Фиг. 2

Поскольку угловые коэффициенты прямолинейных характеристик простой волны по условию непрерывны, то, взяв вектор нормалей в двух точках и устремляя одну точку к другой, в пределе получим, что векторы нормалей или совпадут, или будут противоположны по направлению. Второй случай может быть только тогда, когда вектор скорости на характеристике лежит в соответствующей характеристической плоскости, что невозможно, так как проекция вектора скорости на нормаль характеристической плоскости равна скорости звука.

Будем двигаться в плоскости $\xi\eta$ по какой-нибудь кривой, пересекающей прямолинейные характеристики простой волны. Единичный вектор, касательный к кривой, τ направим в сторону движения. Назовем движением «в сторону скорости» такое движение, при котором вектор τ и вектор нормали к прямолинейным характеристикам n образуют угол меньше $1/2\pi$, т. е. $(\tau \cdot n) > 0$.

Лемма 2. Если движение вдоль криволинейной характеристики простой волны началось «в сторону скорости», то оно останется таковым до параболической точки.

Векторы τ и n меняются непрерывно при движении [вдоль криволинейной характеристики. Изменение знака $(\tau \cdot n)$ может произойти только при обращении $(\tau \cdot n)$ в нуль, что означает, что характеристические направления сливаются.

Зафиксируем какую-нибудь прямолинейную характеристику простой волны, ось z направим «по скорости» на ней, ось y так, чтобы характеристика имела уравнение $\eta = \eta_1$. Назовем такую систему координат для каждой прямолинейной характеристики специальной.

Лемма 3. Если при движении вдоль прямолинейной характеристики (в специальной системе координат) $F_{\eta\eta} = v_\eta$ меняет знак в [некоторой точке, то эта точка есть точка [оггибающей прямолинейных характеристик простой волны, и обратно: в точке оггибающей $F_{\eta\eta} = v_\eta$ меняет знак.

Будем рассматривать оба листа простой волны; переход с одного листа на другой происходит в точках оггибающей прямолинейных характеристик. Пусть в точке S (фиг. 3) $F_{\eta\eta}$ меняет знак.

Возьмем точки L и N на характеристике $\eta = \eta_1$ по разные стороны от S . Рассмотрим близкую прямолинейную характеристику $L'N'$ и точки L' , N' , лежащие на ней, причем $\xi_{L'} = \xi_L$, $\xi_{N'} = \xi_N$. Тогда

$$(F_{\eta\eta})_L = (v_\eta)_L = \lim_{\Delta\eta \rightarrow 0} \frac{v_{L'} - v_L}{\eta_{L'} - \eta_L}, \quad (F_{\eta\eta})_N = (v_\eta)_N = \lim_{\Delta\eta \rightarrow 0} \frac{v_{N'} - v_N}{\eta_{N'} - \eta_N}$$

Но так как $v_L = v_N$, $v_{L'} = v_{N'}$, $\eta_L = \eta_N$, то

$$(F_{\eta\eta})_N = \lim_{\Delta\eta \rightarrow 0} \frac{v_{L'} - v_L}{\eta_{N'} - \eta_L}$$

Производные $(F_{\eta\eta})_N$ и $(F_{\eta\eta})_L$ могут иметь разные знаки, как видно из преобразованного выражения для $(F_{\eta\eta})_N$, только в том случае, если $\eta_{L'} - \eta_L$ и $\eta_{N'} - \eta_L$ имеют противоположные знаки; это означает, что предельное положение точки пересечения LN и $L'N'$ лежит между точ-

ками L и N . Так как точки L и N выбраны произвольно, то предельное положение точки пересечения характеристик LN и $L'N'$ совпадает с точкой S . Обратное положение доказывается аналогично.

Точка простой волны, в которой вторые производные от F обращаются в бесконечность, есть точка огибающей прямолинейных характеристик.

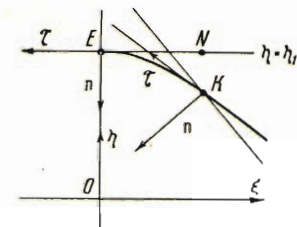
Действительно, в специальной системе координат $F_{\eta\eta}$ выражается по формуле (3.5). Точка прямолинейной характеристики, в которой $F_{\eta\eta}$ обращается в бесконечность, является точкой изменения знака $F_{\eta\eta}$, следовательно, она есть точка огибающей.

Лемма 4. Если на каждой прямолинейной характеристике в специальной системе координат вторые производные от F равны нулю, то поток однороден.

Компоненты ускорения на каждой характеристике выражаются однородно через производные от u, v, w по пространственным координатам, которые однородно выражаются через вторые производные от F по ξ и η . Равенство нулю вторых производных от F означает равенство нулю ускорения на прямолинейных характеристиках.

Лемма 5. Если потенциал простой волны F имеет непрерывные третьи производные по ξ, η всюду, за исключением, может быть, точек огибающей прямолинейных характеристик, и простая волна всюду отлична от однородного потока, то при движении вдоль криволинейной характеристики простой волны, если движение началось «в сторону скорости», встречающаяся параболическая точка, если таковая вообще существует

является предельной для точек огибающей прямолинейных характеристик, ускорение в которых обращается в бесконечность. Ускорение на прямолинейной характеристике, проходящей через такую параболическую точку, равно нулю во всех точках, отличных от параболической.



Фиг. 4

Пусть точка E (фиг. 4) есть первая параболическая точка криволинейной характеристики, вдоль которой происходит движение.

Направим ось z «по потоку» на прямолинейной характеристике, на которой лежит точка E , ось y повернем так, чтобы прямолинейная характеристика изображалась на плоскости $\xi\eta$, прямой $\eta = \eta_1$, тогда $\eta_1 = (M_1 - 1)^{-1/2}$ (§ 3) и точка E имеет координаты $\xi = 0, \eta = \eta_1$; M_1 — число Маха на характеристике.

Заметим, что если движение вдоль криволинейной характеристики в одной системе координат происходило «в сторону скорости», то и в повернутой системе координат оно происходит «в сторону скорости».

1. Предположим, что предел $F_{\eta\eta} = v_\eta$ при подходе к некоторой точке N (фиг. 4), лежащей на характеристике $\eta = \eta_1$, по точкам простой волны есть нуль (точка N может лежать на втором листе). Рассмотрим

последовательность прямолинейных характеристик, сходящихся к характеристике $\eta = \eta_1$, на которых ускорение отлично от нуля; такая последовательность всегда найдется, иначе мы имели бы однородный поток. Найдем $F_{\eta\eta}$ на таких характеристиках. Фиксируем прямолинейную характеристику упомянутой последовательности, направляем ось z^* «по потоку» на ней, а ось y^* так, чтобы эта характеристика изображалась прямой $\eta^* = \eta_1^*$. Тогда $\eta_1^* = (M_1^* - 1)^{-1/2}$, где M_1^* — число Маха на характеристике $\eta^* = \eta_1^*$. Связь между системами координат x, y, z и x^*, y^*, z осуществляется по формулам

$$\begin{aligned}x^* &= (1 + \alpha_1)x + \beta_1y + \gamma_1z \\y^* &= \alpha_2x + (1 + \beta_2)y + \gamma_2z \\z^* &= \alpha_3x + \beta_3y + (1 + \gamma_3)z\end{aligned}$$

Здесь $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ — стремятся к нулю (в силу непрерывности поля скоростей простой волны), когда характеристика $\eta^* = \eta_1^*$ стремится к характеристике $\eta = \eta_1$. Связь плоскостей $\xi\eta$ и $\xi^*\eta^*$ дается формулами

$$\xi^* = \frac{(1 + \alpha_1)\xi + \beta_1\eta + \gamma_1}{\alpha_3\xi + \beta_3\eta + (1 + \gamma_3)}, \quad \eta^* = \frac{\alpha_2\xi + (1 + \beta_2)\eta + \gamma_2}{\alpha_3\xi + \beta_3\eta + (1 + \gamma_3)}$$

Потенциал $F = w + \xi u + \eta v$ при переходе от плоскости $\xi^*\eta^*$ к плоскости $\xi\eta$ преобразуется по формуле

$$F = F^*\chi, \quad \chi = \left(\frac{1 + \xi^2 + \eta^2}{1 + \xi^{*2} + \eta^{*2}} \right)^{1/2}$$

Далее

$$F_{\eta\eta} = (F^*\chi)_{\eta^*\eta^*} \eta_{\eta^*}^{*2} + 2(F^*\chi)_{\xi^*\eta^*} \xi_{\eta^*}^* \eta_{\eta^*}^* + (F^*\chi)_{\xi^*\xi^*} \xi_{\eta^*}^{*2} + (F^*\chi)_{\eta^*\eta^*} \eta_{\eta^*}^{*2} + (F^*\chi)_{\xi^*\xi^*} \xi_{\eta^*}^{*2}$$

Поскольку ускорение на характеристике $\eta^* = \eta_1^*$ не равно нулю, то $F_{\eta^*\eta^*}$ выражается по формуле (3.5):

$$F_{\eta^*\eta^*} = \left[\frac{2w_1^*}{x+1} \frac{M_1^{*4}}{(M_1^{*2} - 1)^2} - \text{const} \xi^* \right]^{-1}$$

где w_1^* — скорость на характеристике $\eta^* = \eta_1^*$, а также

$$F_{\xi^*}^* = F_{\eta^*}^* = F_{\xi^*\eta^*}^* = F_{\xi^*\xi^*}^* = 0, \quad F^* = w_1^* \quad \text{при } \eta^* = \eta_1^*$$

Выполняя дифференцирование в выражении для $F_{\eta\eta}$, подставляя значения производных от F^* на характеристике $\eta^* = \eta_1^*$, значение ξ^* , выраженное через ξ, η , получим

$$(F_{\eta\eta})_{\eta^*=\eta_1^*} = \left[\frac{2w_1^*}{x+1} \frac{M_1^{*4}}{(M_1^{*2} - 1)^2} - \text{const} \frac{(1 + \alpha_1)\xi + \beta_1\eta + \gamma_1}{\alpha_3\xi + \beta_3\eta + (1 + \gamma_3)} \right]^{-1} \chi \eta_{\eta^*}^{*2} + w_1^* \chi_{\eta\eta}$$

Легко показать, исходя из формул для χ и η^* , что $\chi_{\eta\eta} \rightarrow 0, \chi \rightarrow 1, \eta_{\eta^*}^* \rightarrow 1$, когда $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i \rightarrow 0$. Устремим точку (ξ, η) на $\eta^* = \eta_1^*$ к точке N на характеристике $\eta = \eta_1$. Это означает, что $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i \rightarrow 0$.

Поскольку $\xi_N \neq 0, \eta_N = \eta_1$, то единственной возможностью обращения в нуль $F_{\eta\eta}$ в точке N является, как видно из формулы (3.8), условие, что $\text{const} \rightarrow \infty$, когда $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i \rightarrow 0$.

Точки огибающей прямолинейных характеристик найдутся из условия обращения $F_{\eta\eta}$ в бесконечность. Если записать уравнение характе-

ристики $\eta^* = \eta_1^*$ в виде $\eta = (\eta_1 + \delta) + \varepsilon\xi$, где $\delta, \varepsilon \rightarrow 0$, когда $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i \rightarrow 0$, то, решая систему линейных уравнений, составленную из уравнения $\eta = (\eta_1 + \delta) + \varepsilon\xi$ и уравнения, которое получается от обращения квадратной скобки в (3.8) в нуль ($F_{\eta\eta} = \infty$), найдем выражения для координат ξ, η точек огибающей прямолинейных характеристик. Формула для ξ имеет вид:

$$\xi = \frac{\omega[\beta_3(\eta_1 + \delta) + 1 + \gamma_3] - [\beta_1(\eta_1 + \delta) + \gamma_1]}{\omega(\alpha_3 + \beta_3\varepsilon) - (1 + \alpha_1 + \beta_1\varepsilon)}, \quad \omega = \frac{1}{\text{const} \kappa + 1} \frac{2w_1^*}{(M_1^{*2} - 1)^2} \quad (3.9)$$

Из (3.9) видно, что когда $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i \rightarrow 0$ и, следовательно, $\omega \rightarrow 0$, то $\xi \rightarrow 0$; это и означает, что точки огибающей прямолинейных характеристик имеют предельной точку E .

Предел $F_{\eta\eta}$, как видно из (3.8), при подходе к любой точке характеристики $\eta = \eta_1$, для которой $\xi \neq 0$, есть нуль. Отметим, что можно выбрать такие кривые, проходящие через E , что при движении вдоль них к точке E , $F_{\eta\eta}$ будет стремиться к любому наперед заданному числу

2. Предположим, что предел $F_{\eta\eta}$ при подходе к некоторой точке N (фиг. 4), лежащей на характеристике $\eta = \eta_1$, по точкам простой волны отличен от нуля. В этом случае $F_{\eta\eta}$ выражается при $\eta = \eta_1$ по формуле

$$F_{\eta\eta} = \left[\frac{2w_1}{\kappa + 1} \frac{M_1^4}{(M_1^2 - 1)} - \text{const} \cdot \xi \right]^{-1}$$

Поскольку $F_{\eta\eta}$ в некоторой окрестности параболической точки ($\xi = 0$) сохраняет знак, то в этой окрестности огибающей не будет. При этих условиях вычисления, проведенные ранее в § 3, дают, что для криволинейной характеристики EK (фиг. 4), выходящей из параболической точки и заданной уравнением $\eta = \eta(\xi)$, $\eta''(0) = -2(M_1^2 - 1)^{1/2}$. Векторы n, τ в точке E образуют угол $1/2\pi$ и расположены, как изображено на фиг. 4, так как ось oz направлена «по скорости» на характеристике $\eta = \eta_1$, а движение по криволинейной характеристике осуществляется в сторону параболической точки. Если обозначить угловой коэффициент прямолинейных характеристик, проходящих через характеристику EK , через $k(\xi)$, то в силу сделанных предположений относительно F произвольная $k' = dk/d\xi$ существует и непрерывна, так же как и η'' . В точке K , расположенной на характеристике EK достаточно близко к точке E , в силу непрерывности $n, \tau, \eta''(\xi)$, отрицательности $\eta''(0)$ условие движения «в сторону скорости» ($n \cdot \tau > 0$) означает, что

$$|k(\xi)| > |\eta'(\xi)|, \quad \eta' = d\eta/d\xi$$

Если обозначить текущие координаты прямолинейной характеристики через ξ°, η° , то уравнение семейства прямолинейных характеристик можно записать в форме $\eta^\circ - \eta(\xi) = k(\xi)(\xi^\circ - \xi)$, откуда легко получить уравнение огибающей в параметрическом виде:

$$\xi^\circ - \xi = \frac{k - \eta'}{k'}, \quad \eta^\circ - \eta = \frac{k - \eta'}{k'} k \quad (3.10)$$

Покажем, что $k'(0) \neq 0$; это будет означать, как видно из (3.10), что огибающая проходит через точку E :

$$|k'(0)| = \lim_{\Delta\xi \rightarrow 0} \left| \frac{k_K - k_E}{\xi_K - \xi_E} \right| = \lim_{\Delta\xi \rightarrow 0} \left| \frac{k_K}{\xi_K} \right| > \lim_{\Delta\xi \rightarrow 0} \left| \frac{\eta_K'}{\xi_K} \right| = \\ = |\eta''(0)| = 2(M_1^2 - 1)^{1/2} \neq 0$$

Этот результат можно непосредственно получить из рассмотрения геометрической картины расположения характеристик.

Вывод о том, что огибающая прямолинейных характеристик проходит через точку E , противоречит первоначальному выводу об отсутствии огибающей в окрестности точки E . Случай 2 невозможен.

Теорема. Если простая коническая волна удовлетворяет условиям леммы 5, то при движении вдоль криволинейных характеристик, проходящих через фиксированную прямолинейную характеристику простой волны, если движение вдоль них было начато «в сторону скорости», встречающиеся параболические точки, если таковые вообще существуют, не могут образовать непрерывную параболическую линию.

Если бы при указанных условиях параболические точки образовали непрерывную параболическую линию, то эта линия была бы составлена из точек, обладающих тем свойством, что на прямолинейных характеристиках, проходящих через эти точки, ускорение обращалось бы в нуль. Это означало бы, что поток в окрестности параболической линии был бы однороден, что противоречило бы первоначальным допущениям о свойствах простой волны.

Примечание. Мы принимаем (см. [3]), что единственными коническими течениями, которые могут без скачка примыкать к однородному потоку вдоль конуса Маха, являются осесимметричные течения расширения, которые для уравнения (1.3) принадлежат к эллиптическому типу по крайней мере в окрестности конуса Маха.

§ 4. Соотношения на конической ударной волне. Зададим ударную волну (скачок) уравнением $\xi = \xi(\eta)$. Предполагаем, что скачок граничит с потоком, имеющим составляющие скорости u_1, v_1, w_1 и скорость звука a_1 . Составляющие скорости после скачка u, v, w легко получаются из условия непрерывности составляющей скорости, касательной к скачку, и условия для нормальных составляющих в случае косога скачка:

$$u = u_1 + Q, \quad v = v_1 - \xi'Q, \quad w = w_1 + (\xi'\eta - \xi)Q \\ \xi' = \frac{d\xi}{d\eta}, \quad Q = \left[\frac{2}{x+1} \frac{a_1^2}{u_1 - \xi'v_1 + w_1(\xi'\eta - \xi)} - \frac{u_1 - \xi'v_1 + w_1(\xi'\eta - \xi)}{1 + \xi'^2 + (\xi'\eta - \xi)^2} \right]$$

Если считать течение за скачком безвихревым, то

$$u = F_\xi, \quad v = F_\eta, \quad w = F - \xi F_\xi - \eta F_\eta$$

и имеют место равенства

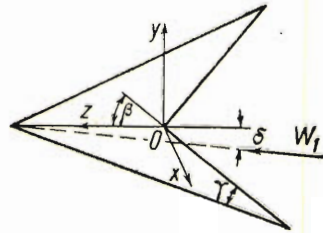
$$F_\xi = u_1 + Q, \quad F_\eta = v_1 - \xi'Q, \quad F - \xi F_\xi - \eta F_\eta = w_1 + (\xi'\eta - \xi)Q \quad (4.1)$$

Функции F, F_ξ, F_η , определенные из (4.1), удовлетворяют условию полоски, потенциал F меняется непрерывно при переходе через скачок.

Умножим первое уравнение из (4.1) на ξ , второе — на η и сложим с третьим, в результате получим $F = w_1 + v_1\eta + u_1\xi$, т. е. F имеет после скачка такое же значение, как и до скачка. Проинтегрируем $F = w_1 + v_1\eta + u_1\xi$ вдоль скачка по η : $dF/d\eta = v_1 + u_1\xi'$. Умножим первое уравнение из (4.1) на ξ' и сложим со вторым, в результате получим: $F_\eta + \xi'F_\xi = v_1 + u_1\xi'$. Следовательно,

$$\frac{dF}{d\eta} = F_\eta + \xi'F_\xi.$$

§ 5. Стреловидное крыло. Рассмотрим плоское стреловидное крыло с обратной стреловидностью в сверхзвуковом потоке; предполагаем, что передние и задние кромки сверхзвуковые. Это обстоятельство позволяет отдельно рассматривать «низ» и «верх» крыла, так как они не влияют друг на друга. За плоскость yoz возьмем плоскость симметрии крыла, за плоскость xoz — плоскость крыла, оси координат направим, как указано на фиг. 5. Плоскость крыла составляет с направлением набегающего потока угол δ , передняя кромка составляет с осью z угол β , угол между передней и задней кромками — γ .

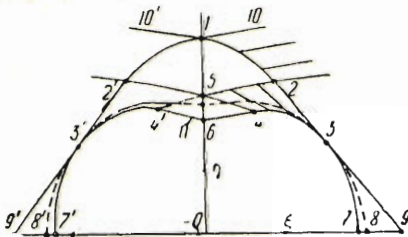


Фиг. 5

Вниз по потоку от точки O разовьются области конических течений.

Рассмотрим обтекание «верха» крыла. Область, возмущенная крылом, отделяется от однородного потока с числом Маха M_1 , огибающей конусов Маха, с вершинами на передней кромке. В нашем случае — это две пересекающиеся плоскости, проходящие через передние кромки. Условием того, что передняя кромка сверхзвуковая, является

$$\cos \beta < \cos \alpha_1 / \cos \delta, \quad \sin \alpha_1 = M_1^{-1}.$$



Фиг. 6

За характеристическими плоскостями, которые на плоскости ξ, η изображаются двумя пересекающимися-

ся прямыми $1-10, 1-10'$ (фиг. 6), следуют косые течения Прандтля — Майера, которые продолжаютя до тех пор, пока составляющая скорости v не обратится в нуль, что означает параллельность вектора скорости плоскости крыла. Далее опять следуют однородные потоки.

Начиная от точки 1 (фиг. 6), идет область взаимодействия течений Прандтля-Майера, от которых она отделяется характеристиками $1-2, 1-2'$. По данным на характеристиках $1-2, 1-2'$ течение определится в характеристическом четырехугольнике $1-2-5-2'$. Начиная от точек $2, 2'$, коническое течение отделяется от однородных потоков прямолинейными характеристиками $2-3-9, 2'-3'-9'$. Иной возможности нет вплоть до параболических точек $3, 3'$. В дальнейшем в силу симметрии мы будем рассматривать поток при $\xi > 0$. Здесь появляются два варианта.

Первый вариант состоит в том, что мы продолжим прямолинейную характеристику до плоскости крыла (точка 9). Он неприемлем по следующим соображениям. Если мы будем уменьшать угол атаки δ и увеличивать угол стреловидности β , то область конического течения будет «расплываться», так как характеристика 2-3-9 будет стремиться стать горизонтальной. Далее в окрестности точки 9 мы получили бы задачу, когда на характеристике 3-9 известны все данные, а на нехарактеристической кривой 0-9—одно: $v = 0$. Такая задача безусловно имеет единственное решение, которым является однородный поток вплоть до конуса Маха 3-7, если в точке 9 нет особенности. Появление особенности в точке 9 на наш взгляд ничем не оправдано.

Второй вариант состоит в том, что коническое течение отделяется от однородного потока дугой конуса Маха 3-7. Мы приняли (см. § 3), что к однородному потоку вдоль конуса Маха без скачка может примыкать только осесимметрическое течение, которое принадлежит к эллиптическим решениям (1.3) и не может сомкнуться с потоком «выше» точки 3. Учитывая, что все варианты исчерпаны, мы принимаем, что от точки 3 до крыла проходит слабая ударная волна 3-8.

По данным на характеристиках 2-5, 2-3 поток определится в характеристическом четырехугольнике 2-3-4-5. Поскольку характеристика 2-3 прямая, а вдоль характеристики 2-5 происходит увеличение скорости, так как расширение от точки 1 до точки 5 «прямое», а от точки 1 до точки 2 «косое», то течение в 2-3-4-5 есть простая волна расширения. Характеристика 3-4 выходит из параболической точки 3 и, следовательно, течение в окрестности точки 3 за характеристикой 3-4 есть течение сжатия (см. § 3), что согласуется с выводом о возникновении ударной волны 3-8. Как говорится в § 3, огибающая прямолинейных характеристик простой волны не может начаться между точками 2 и 3, и параболическая линия в нашем случае идет «выше» огибающей. Характеристика 3-4 не может встретиться с огибающей прямолинейных характеристик. В окрестности точки 3 характеристика 3-4 идет «выше» параболической линии, так как параболическая линия не касается прямолинейных характеристик (см. § 3). Характеристика 3-4 может встретиться с огибающей только после пересечения параболической линии простой волны, что невозможно, так как ускорение на прямолинейной характеристике, проходящей через точку пересечения, обращалось бы в нуль, поскольку движение вдоль характеристики 3-4 от точки 3 к точке 4 есть «движение в сторону скорости».

Можно показать, что ускорение в точке 2 (фиг. 6) отлично от нуля, это докажет картину расположения параболической линии и огибающей прямолинейных характеристик в окрестности характеристики 2-3.

Для этой цели нужно использовать уравнение (2.3) для коэффициента разрыва λ применительно к характеристике 1-2, введя в ее окрестности координаты φ и ψ по формулам

$$\varphi = \eta - f(\xi), \quad \psi = \frac{\eta}{\xi + \xi_0} \quad (5.1)$$

где $\eta = f(\xi)$ есть уравнение характеристики $I-2$, $-\xi_0$ — координата ξ точки пересечения характеристики $I-10$ и других прямолинейных характеристик течения Прандтля-Майера.

По данным на характеристике $5-4$, $5-4'$ (фиг. 6) поток найдется как однородный в характеристическом четырехугольнике $5-4-6-4'$.

Для определения течения в области $0-8-3-4-6$ получается вполне определенная краевая задача для уравнения (1.3) (вихрями и изменением энтропии после скачков мы пренебрегаем).

Эта задача принадлежит к задачам смешанного типа, так как на характеристиках $3-4$, $4-6$ уравнение (1.3) гиперболического типа, а в точке 0 , как видно из выражения для Δ , эллиптического типа. Нетрудно также показать, что сразу же за скачком в точке 8 уравнение (1.3) эллиплично. Поскольку характеристика $4-6$ прямая, то течение, примыкающее к ней, должно быть простой волной. Эта простая волна отделяется от остального потока криволинейными характеристиками, входящими из точек $4, 6$. Поскольку краевые условия на границе области $0-8-3-4-6$ достаточно гладки, то можно думать, что решение уравнения (1.3) тоже было бы достаточно гладким, за исключением характеристик, выходящих из точек 6 и 4 . Тогда из теоремы § 3 мы заключили бы, что простая волна не могла бы плавно сомкнуться вдоль параболической линии с эллиптическим течением, следующим после нее, так как движение вдоль криволинейных характеристик, проходящих через характеристику $4-6$, внутри области $0-8-3-4-6$ есть движение «в сторону скорости», — вектор скорости на характеристике $4-6$ имеет компоненты $u = 0$, $v = v_6 < 0$, $w = w_6 > 0$. (Мы оставляем в стороне возможный случай, когда все криволинейные характеристики простой волны пройдут через единственную параболическую точку.) Поэтому мы принимаем, что в окрестности характеристики $3-4-6$ проходит слабая ударная волна $3-11$, которая идет «выше» характеристики $3-4-6$. В параболической точке 3 ее интенсивность равна нулю. Исходя из этой картины, краевая задача окончательно формулируется для области $0-8-3-11$ следующим образом.

Требуется найти решение F уравнения (1.3) в области $0-8-3-11$, имеющее непрерывные вторые производные, по следующим краевым условиям.

На части контура $8-0-11$ задана нормальная производная, равная нулю. На кривых $3-8$, $3-11$, положение которых заранее неизвестно, задаются функция и нормальная производная из условий на скачке (см. § 4). Дополнительно требуем, чтобы для нашего решения $\Delta = AC - B^2$ было больше нуля внутри области $0-8-3-11$. Рассмотрим обтекание низа крыла. На передних кромках образуются плоские скачки, после которых идут однородные потоки. На плоскости $\xi\eta$ эти скачки изображаются прямыми $3-5$, $3'-5'$ (фиг. 7); они идут до точек 3 и $3'$.

Точки 3 и $3'$ суть точки пересечения конусов Маха $I-3$, $I'-3'$ для однородных потоков после скачков с линиями скачков $3-5$, $3'-5'$. Между точками 3 и $3'$ проходит ударная волна $3'-4-3$, которая в точках 3 и $3'$ плавно сопрягается с плоскими скачками $3-5$, $3'-5'$. В дальнейшем в си-

лу симметрии будем рассматривать течение при $\xi > 0$. От точки 3 до точки 2 на крыле проходит слабая ударная волна. Интенсивность ее равна нулю в точке 3. Краевая задача формулируется следующим образом.

Требуется найти решение уравнения (1.3) в области 0-2-3-4, имеющее непрерывные вторые производные по краевым условиям, на части контура 2-0-4 задана нормальная производная, равная нулю. На кривых 3-4, 3-2, положение которых заранее неизвестно, задаются функция и нормальная производная из условий на скачке (см. § 4). Дополнительно требуем, чтобы для нашего решения было $\Delta = AC - B^2 > 0$ внутри области 0-2-3-4.

Приводим результаты численного расчета крыла в случае, когда $\delta = 6^\circ$, $\beta = 80^\circ$, $M_1 = 2$. В областях 0-8-3-11 (фиг. 6) и 0-2-3-4 (фиг. 7) расчеты производились методом сеток. Скачки 4-3, 3-2 (фиг. 7) учитывались и находились из расчетов. Скачками 3-8, 3-11 (фиг. 6) мы пренебрегали. На фиг. 8 дается график зависимости коэффициента давления C_p на крыле в зависимости от ξ ($\eta = 0$):

$$C_p = \frac{P - P_\infty}{\frac{1}{2} W_\infty^2}$$

(а) — верх крыла, б) — низ крыла).

Для сравнения с линейной теорией мы взяли крыло, у которого $\gamma = 15^\circ$. Коэффициент подъемной силы $C_p = 0.248$, линейная теория дает $C_p = 0.245$. Столь малое расхождение с линейной теорией объясняется тем, что область конического течения занимала на крыле площадь порядка 10%, и тем, что течения в области 0-8-3-11 (фиг. 6) и 0-2-3-4 (фиг. 7) мало отличались от однородного потока.

Предположим, что C_p можно разложить в ряд по углу атаки δ :

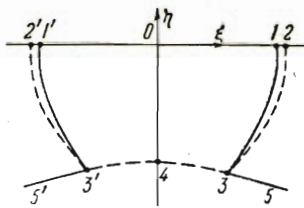
$$C_p = C_1 \delta + C_2 \delta^2 + \dots$$

Возьмем C_1 из линейной теории, C_2 определим так, чтобы C_p при $\delta = 6^\circ$ принимало вычисленное нами значение, тогда это будет

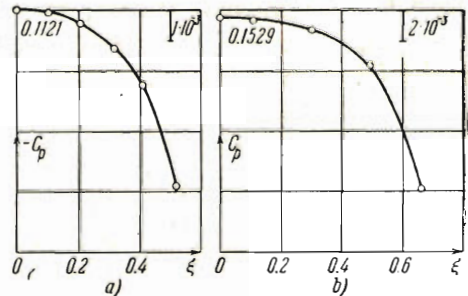
$$C_p = 2.338\delta + 0.2918\delta^2$$

Эта формула дает коэффициент подъемной силы для крыла с характеристиками $\beta = 80^\circ$, $\gamma = 15^\circ$ в потоке с числом Маха $M_1 = 2$ при любом умеренном угле атаки.

Аналогично можно поставить краевые задачи и провести численные расчеты для других видов крыла, так это можно сделать для трапецевидного, треугольного крыла, для крыльев конечной толщины и других.



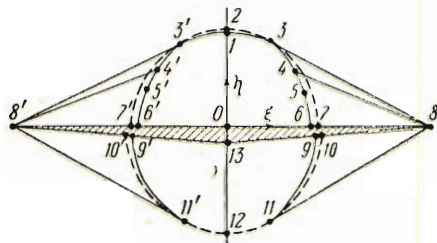
Фиг. 7



Фиг. 8

Рассмотрим, например, картину обтекания треугольного крыла, поперечным сечением которого является тонкий треугольник (фиг. 9).

Мы предполагаем, что «верх» крыла есть плоскость, наклоненная под углом δ к набегающему потоку; оси координат направлены точно так же, как в случае стреловидного крыла, передние кромки — сверхзвуковые. Рассмотрим обтекание «верха» крыла. Огибающей конусов Маха с вершинами в точках передней кромки служат плоскости $8-3$, $8-3'$ и дуга конуса Маха $3'-1-3$. Точки 3 и $3'$ вполне определенные.



Фиг. 9

За прямыми $3-8$, $3'-8'$ (мы будем говорить о том, что получается на плоскости ξ , η) идут косые течения Прандтля-Майера, за которыми следуют однородные потоки. Область общего конического течения ограничена слабым сплошным скачком $7-3-2-3'-7'$ и плоскостью крыла. Этот слабый скачок идет вблизи дуги конуса Маха $3-2-3'$, дуг криволинейных характеристик течений Прандтля-Майера $3-4$, $3'-4'$, прямолинейных характеристик $4-5$, $4'-5'$ и дуг конусов Маха $5-6$, $5'-6'$.

Краевая задача совершенно аналогична краевой задаче для «верха» стреловидного крыла.

Рассмотрим обтекание «низа» крыла. На передних кромках образуются плоские скачки $8-11$, $8'-11'$ (фиг. 9), за которыми следуют однородные потоки. Точки 11 , $11'$ лежат на пересечении линий плоских скачков $8-11$, $8'-11'$ с дугами конусов Маха $11-9$, $11'-9'$ для однородных потоков после плоских скачков. Между точками 11 и $11'$ проходит ударная волна, плавно сопрягающаяся с плоскими скачками. От точек 11 , $11'$ идут слабые ударные волны $11-10$, $11'-10'$, интенсивность которых в точках 11 и $11'$ равна нулю. Краевая задача ставится совершенно аналогично «низу» стреловидного крыла с единственным отличием, что на отрезках $10-13$, $10'-13'$ задается не нормальная производная, а линейная комбинация функции и ее производных по ξ и η , равная нулю.

В заключение автор выражает глубокую благодарность С. В. Фальковичу за постановку проблемы и ценные указания.

Поступила 20 I 1955

ЛИТЕРАТУРА

1. Курант Р. и Гильберт Д. Методы математической физики, т. II, ГИТТЛ, 1951.
2. Гиз Д. и Кон Н. Два новых нелинеаризованных конических потока. «Механика», Сб. переводов и обзоров иностранной периодической литературы, № 5, 1954.
3. Булах Б. М. К теории конических течений. ПММ, т. XVIII, вып. 4, 1954.