

## ПРИМЕР ОКОЛОЗВУКОВОГО ТЕЧЕНИЯ ГАЗА С ОБЛАСТЬЮ СВЕРХЗВУКОВЫХ СКОРОСТЕЙ, ОГРАНИЧЕННОЙ ВНИЗ ПО ТЕЧЕНИЮ СКАЧКОМ УПЛОТНЕНИЯ, ОКОНЧИВАЮЩИМСЯ ВНУТРИ ТЕЧЕНИЯ

Ф. И. Франкль  
(Фрунзе)

В работе [1] автор построил пример плоско-параллельного адиабатического безвихревого течения газа с конечной областью сверхзвуковых скоростей, граничащей лишь с одной стенкой, без скачков уплотнения (течение типа А).

Все известные в литературе опыты, однако, показывают наличие в этих областях скачков уплотнения. Чаще всего наблюдается тип течений, в которых сверхзвуковая область оканчивается скачком уплотнения, близким к прямому (течение типа Б), см., например, [2,3].

Как показали А. А. Никольский и Г. И. Таганов [4], объяснение этого явления заключается в том, что течения типа А возможны не при любых формах стенки; если для данной стенки течение указанного типа возможно, то достаточно сколь угодно малого ее изменения, чтобы сделать такое течение невозможным.

В то же время, насколько нам известно, еще не удалось теоретическое построение течения типа Б таким образом, чтобы были выполнены как дифференциальные уравнения течения, так и условия на скачке.

Так, в работе Л. Триллинга и К. Уолкера [5] не учитываются условия на скачке уплотнения. В работе Л. Д. Ландау и Е. М. Лифшица [6] указывается, что авторам не удалось найти решение типа Б.

В настоящей работе дадим приближенное построение течения типа Б.

Решение находим на основании уравнений С. В. Фальковича [7], заменяющих уравнения С. А. Чаплыгина приближенно вблизи критической скорости, а именно

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = -C \frac{\partial \psi}{\partial \eta}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} = C \eta \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \quad \left( C = \left( \frac{\kappa + 1}{2} \right)^{1/\kappa - 1} (\kappa + 1)^{1/2} \right) \quad (1)$$

где  $\theta$  — угол наклона скорости,  $\eta$  — функция скорости, введенная автором [8],  $\varphi$  — потенциал скорости,  $\psi$  — функция тока.

Для «газа Трикоми-Фальковича», в котором газодинамические уравнения точно принимают вид (1), зависимости функции  $\eta$  и плотности  $\rho$  от скорости должны быть изменены и даются формулами, указанными в работе С. В. Фальковича [9].

Переменной энтропии и, следовательно, вихрями за скачком уплотнения мы пренебрегаем, что возможно вблизи критической скорости, поскольку скачок энтропии пропорционален квадрату скачка нормальной скорости. Функция тока и потенциал в отдельности удовлетворяют уравнениям

$$\eta \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial \eta^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} + \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{1}{\eta} \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} \right) = 0 \quad (2)$$

Функцию тока будем искать в виде [10]

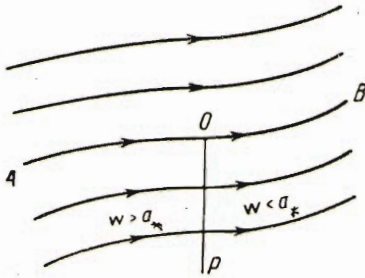
$$\psi = \rho^\nu f_\nu \left( \frac{\theta}{\rho} \right) \quad \left( \rho = \sqrt{\theta^2 + \frac{4}{9} \eta^2} \right) \quad (3)$$

Потребуем, чтобы скачок уплотнения был строго прямым; тогда в плоскости  $\theta\eta$  он должен отображаться на отрезок оси  $\eta$ . Поскольку на прямом скачке  $\varphi = \text{const} = 0$ , то имеем

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \eta} \Big|_{\theta=0} = \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \Big|_{\theta=0} = 0$$

следовательно,  $f_\nu(\xi)$  должно быть четной функцией. Но нетрудно видеть, что тогда  $f_\nu$  является (с точностью до постоянного множителя) гипергеометрической функцией от  $\theta^2/\rho^2$ , а именно

$$f_\nu = F \left( \frac{1}{2} \nu + \frac{1}{6}; -\frac{1}{2} \nu; \frac{1}{2}; \theta^2/\rho^2 \right) \quad (4)$$



Фиг. 1

Топологическая структура наблюдавшихся течений типа Б такова, что линии тока  $\psi > 0$  остаются в дозвуковой зоне, а линии тока  $\psi < 0$  пересекаются со скачком уплотнения по одному разу (фиг. 1).

Поскольку скачок соответствует оси  $\eta$ , то дозвуковая часть физической плоскости отображается в плоскости  $\theta\eta$  на полуплоскость  $\theta > 0$ , так как функциональный определитель при дозвуковых скоростях

$$\frac{D(\varphi, \psi)}{D(\theta, \eta)} = \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \frac{\partial \psi}{\partial \eta} - \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} = -C \left[ \left( \frac{\partial \psi}{\partial \eta} \right)^2 + \eta \left( \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right)^2 \right]$$

меньше нуля (фиг. 2).

Сверхзвуковая зона находится полностью внутри сектора  $AOP$ ; следовательно, изображения полулиний тока  $OA$  и  $OB$  должны лежать в первом квадранте плоскости  $\theta\eta$ , т. е.  $\theta \geq 0$ ,  $\eta \geq 0$ ; на них

$$f(\theta/\rho) = 0 \quad (5)$$

В указанном секторе должны быть точно две полукубические параболы  $\theta/\rho = \text{const}$ , для которых выполняется уравнение (5): иначе линия  $AOB$  была бы не единственной линией тока  $\psi = 0$ . Но число нулей гипергеометрической функции  $F(1/2 \nu + 1/6, -1/2 \nu; 1/2; x)$  на отрезке  $0 \leq x \leq 1$  равняется согласно теореме Портера [11]

$$N = E^* \left( \frac{1}{2} \nu + \frac{1}{6} \right) \quad \text{или} \quad N = E^* \left( \frac{1}{2} \nu + \frac{1}{6} \right) + 1 \quad (6)$$

причем  $N$  является четным или нечетным числом в зависимости от того, имеет ли  $F(1/2 \nu + 1/6, -1/2 \nu; 1/2; 1)$  положительное или отрицательное значение. Здесь  $E^*(s)$  — наибольшее целое — меньше  $s$ . Но

$$\begin{aligned} F \left( \frac{\nu}{2} + \frac{1}{6}, -\frac{\nu}{2}; \frac{1}{2}; x \right) = & \quad (7) \\ = & \frac{\Gamma(1/2) \Gamma(1/3)}{\Gamma(1/3 - 1/2 \nu) \Gamma(1/2 + 1/2 \nu)} F \left( \frac{\nu}{2} + \frac{1}{6}, -\frac{\nu}{2}; \frac{2}{3}; 1-x \right) + \\ & + \frac{\Gamma(1/2) \Gamma(-1/3)}{\Gamma(1/2 \nu + 1/6) \Gamma(-1/2 \nu)} F \left( \frac{1}{3} - \frac{\nu}{2}, \frac{1}{2} + \frac{\nu}{2}; \frac{4}{3}; 1-x \right) (1-x)^{1/2} \end{aligned}$$



Следовательно, при  $-1 < 1/3 - 1/2 \nu < 0$  имеем  $N$  нечетное.

При  $1/3 - 1/2 \nu = -1$  имеется корень  $x = 1$  и, следовательно,  $N$  имеет значение четное или нечетное в зависимости от того, имеет ли  $\Gamma(-\nu/2)$  положительное или отрицательное значение; но в данном случае  $1/2 \nu = 4/3$ , то  $\Gamma(-\nu/2) > 0$ , так что  $N$  — четное.

В этом последнем случае, т. е. при  $\nu = 8/3$ , имеем согласно формулам (6)  $N = 2$  и значение  $\nu = 8/3$  есть наименьшее, при котором  $N = 2$ . Это значение  $N$  сохраняется, пока  $-2 < 1/3 - 1/2 \nu$ . Итак, при  $N = 2$

$$\frac{8}{3} \leq \nu < \frac{14}{3} \tag{8}$$

Если положительная полуось  $\eta$  соответствует в физической плоскости правой стороне скачка уплотнения (лежащей вниз по течению), то левой стороне скачка соответствует отрицательная полуось  $\eta$ . Поскольку функция тока в окрестности отрицательной полуоси  $\eta$  также является четной функцией  $\theta$ , то там должно быть

$$\psi = K |\rho|^\nu f_\nu(\theta/\rho) = K (-\rho^2)^{1/2 \nu} F\left(\frac{1}{2} \nu + \frac{1}{6}, -\frac{1}{2} \nu; \frac{1}{2}; \theta^2/\rho^2\right) \tag{9}$$

Далее на прямом скачке уплотнения имеем согласно известной формуле Прандтля  $w_1 w_2 = a_*^2$ , где  $w_1$  — скорость перед, а  $w_2$  — скорость за скачком уплотнения.

Но с точностью данного приближения имеем

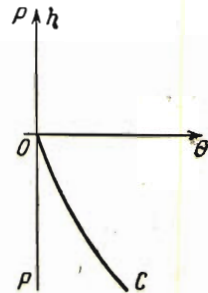
$$w_2 - a_* = \frac{a_*^2}{w_1} - a_* = \frac{a_* (a_* - w_1)}{w_1} \approx a_* \frac{a_* - w_1}{a_*} = w_1$$

Но поскольку с той же точностью

$$w_2 - a_* = \left. \frac{dw}{d\eta} \right|_{\eta=0} \eta_2, \quad a_* - w_1 = - \left. \frac{dw}{d\eta} \right|_{\eta=0} \eta_1$$

то получим для данной приближенной теории

$$\eta_2 = -\eta_1 \tag{10}$$



Фиг. 2

Но в данной точке скачка значения функции тока перед скачком и за скачком совпадают. Приравнивая на этом основании значения  $\psi$  при  $\theta = 0$ ,  $\eta = \eta_1$  и  $\eta = \eta_2$  по уравнениям (3) и (9), получим  $K = 1$ ; так что в окрестности отрицательной полуоси  $\eta$  имеем

$$\psi = (-\rho^2)^{1/2 \nu} F\left(\frac{1}{2} \nu + \frac{1}{6}, -\frac{1}{2} \nu; \frac{1}{2}; \theta^2/\rho^2\right)$$

Для  $\nu$  получаем уравнение, требуя совпадения предельных значений выражений (3) и (7а) на характеристике  $OC$ , т. е. при  $\rho^2 = 0$ ,  $\theta > 0$ .

Воспользуемся для этой цели известным тождеством, выражающим гипергеометрическую функцию от  $z$  через гипергеометрические функции от  $z^{-1}$ . Имеем при  $\theta^2/\rho^2 < 1$

$$\begin{aligned} F\left(\frac{\nu}{2} + \frac{1}{6}, -\frac{\nu}{2}; \frac{1}{2}; \frac{\theta^2}{\rho^2}\right) &= \frac{\Gamma(1/2)\Gamma(-1/6 - \nu)}{\Gamma(1/3 - 1/2 \nu)\Gamma(-1/2 \nu)} \left(-\frac{\rho^2}{\theta^2}\right)^{1/6 + 1/2 \nu} \times \\ &\times F\left(\frac{\nu}{2} + \frac{1}{6}, \frac{2}{3} + \frac{\nu}{2}; \frac{7}{6} + \nu; \frac{\rho^2}{\theta^2}\right) + \\ &+ \frac{\Gamma(1/2)\Gamma(1/6 + \nu)}{\Gamma(1/6 + 1/2 \nu)\Gamma(1/2 + 1/2 \nu)} \left(-\frac{\theta^2}{\rho^2}\right)^{1/2 \nu} F\left(-\frac{\nu}{2}, \frac{1}{2} - \frac{\nu}{2}; \frac{5}{6} - \nu; \frac{\rho^2}{\theta^2}\right) \end{aligned} \tag{12}$$

Отсюда при  $\rho^2 < 0$  (13)

$$\psi = \frac{\Gamma(1/2) \Gamma(-1/6 - 1/2 \nu) (-\rho^2)^{1/6 + \nu}}{\Gamma(1/3 - 1/2 \nu) \Gamma(-1/2 \nu) \theta^{1/6 + \nu}} F\left(\frac{\nu}{2} + \frac{1}{6}, \frac{2}{3} + \frac{\nu}{2}; \frac{7}{6} + \nu; \frac{\rho^2}{\theta^2}\right) + \\ + \frac{\Gamma(1/2) \Gamma(1/6 + \nu)}{\Gamma(1/6 + 1/2 \nu) \Gamma(1/2 + 1/2 \nu)} \theta^\nu F\left(-\frac{\nu}{2}, \frac{1}{2} - \frac{\nu}{2}; \frac{5}{6} - \nu; \frac{\rho^2}{\theta^2}\right)$$

При  $\theta^2/\rho^2 > 1$  нужно пользоваться той ветвью аналитического продолжения гипергеометрического ряда  $F(1/2 \nu + 1/6, -1/2 \nu, 1/2; \theta^2/\rho^2)$ , которое там сохраняет действительные значения.

Для ее нахождения выразим эту функцию сначала через гипергеометрические функции от

$$1 - \frac{\theta^2}{\rho^2} = \frac{4}{9} \frac{\eta^3}{\rho^2}$$

Это дает

$$F\left(\frac{\nu}{2} + \frac{1}{6}, -\frac{\nu}{2}; \frac{1}{2}; \frac{\theta^2}{\rho^2}\right) = \\ = \frac{\Gamma(1/2) \Gamma(1/3)}{\Gamma(1/3 - 1/2 \nu) \Gamma(1/2 + 1/2 \nu)} F\left(\frac{\nu}{2} + \frac{1}{6}, -\frac{\nu}{2}; \frac{2}{3}; \frac{4}{9} \frac{\eta^3}{\rho^2}\right) + \\ + \frac{\Gamma(1/2) \Gamma(-1/3)}{\Gamma(1/2 \nu + 1/6) \Gamma(-1/2 \nu)} \left(\frac{2}{3}\right)^{1/2} \frac{\eta}{\rho^{1/2}} F\left(\frac{1}{3} - \frac{\nu}{2}, \frac{1}{2} + \frac{\nu}{2}; \frac{4}{3}; \frac{4}{9} \frac{\eta^3}{\rho^2}\right)$$

Затем преобразуем каждую из гипергеометрических функций, стоящих справа, выражая их через гипергеометрические функции от  $9/4 \rho^2/\eta^3$ . Получим

$$F\left(\frac{\nu}{2} + \frac{1}{6}, -\frac{\nu}{2}; \frac{1}{2}; \frac{\theta^2}{\rho^2}\right) = \frac{\Gamma(1/2) \Gamma(1/3)}{\Gamma(1/3 - 1/2 \nu) \Gamma(1/2 + 1/2 \nu)} \times \\ \times \left\{ \frac{\Gamma(2/3) \Gamma(-1/6 - \nu)}{\Gamma(1/2 - 1/2 \nu) \Gamma(-1/2 \nu)} \left(\frac{9}{4} \frac{\rho^2}{\eta^3}\right)^{1/6 + 1/2 \nu} F\left(\frac{\nu}{2} + \frac{1}{6}, \frac{1}{2} + \frac{\nu}{2}; \frac{7}{6} + \nu; \frac{9}{4} \frac{\rho^2}{\eta^3}\right) + \right. \\ \left. + \frac{\Gamma(2/3) \Gamma(1/6 + \nu)}{\Gamma(1/2 \nu + 1/6) \Gamma(2/3 + 1/2 \nu)} \left(\frac{4 - \eta^3}{9} \frac{\rho^2}{\rho^2}\right)^{1/2 \nu} F\left(-\frac{\nu}{2}, \frac{1}{3} - \frac{\nu}{2}; \frac{5}{6} - \nu; \frac{9}{4} \frac{\rho^2}{\eta^3}\right) \right\} + \\ + \frac{\Gamma(1/2) \Gamma(-1/3)}{\Gamma(1/2 \nu + 1/6) \Gamma(-1/2 \nu)} \left(\frac{2}{3}\right)^{1/2} \frac{\eta}{\rho^{1/2}} \times \\ \times \left\{ \frac{\Gamma(1/3) \Gamma(1/6 + \nu)}{\Gamma(1 + 1/2 \nu) \Gamma(2/3 + 1/2 \nu)} \left(\frac{4 - \eta^3}{9} \frac{\rho^2}{\rho^2}\right)^{1/2 \nu - 1/6} F\left(\frac{1}{3} - \frac{\nu}{2}, -\frac{\nu}{2}; \frac{5}{6} - \nu; \frac{9}{4} \frac{\rho^2}{\eta^3}\right) + \right. \\ \left. + \frac{\Gamma(1/3) \Gamma(-1/6 - \nu)}{\Gamma(1/3 - 1/2 \nu) \Gamma(5/6 - 1/2 \nu)} \left(\frac{9}{4} \frac{\rho^2}{\eta^3}\right)^{1/6 + 1/2 \nu} F\left(\frac{1}{2} + \frac{\nu}{2}, \frac{1}{6} + \frac{\nu}{2}; \frac{7}{6} + \nu; \frac{9}{4} \frac{\rho^2}{\eta^3}\right) \right\}$$

Отсюда умножением на  $\rho^\nu$  получается значение  $\psi$  при  $\eta < 0$ ,  $\rho^2 > 0$ .

Приравнивание предельных значений  $\psi$  при  $\rho^2 \rightarrow -0$  по уравнению (13) и при  $\rho^2 \rightarrow +0$  по (11) дает

$$\frac{\Gamma(1/2) \Gamma(1/6 + \nu)}{\Gamma(1/6 + 1/2 \nu) \Gamma(1/2 + 1/2 \nu)} = \frac{\Gamma(1/2) \Gamma(1/3)}{\Gamma(1/3 - 1/2 \nu) \Gamma(1/2 + 1/2 \nu)} \frac{\Gamma(2/3) \Gamma(1/6 + \nu)}{\Gamma(1/2 \nu + 1/6) \Gamma(2/3 + 1/2 \nu)} - \\ - \frac{\Gamma(1/2) \Gamma(-1/3)}{\Gamma(1/2 \nu + 1/6) \Gamma(-1/2 \nu)} \frac{\Gamma(1/3) \Gamma(1/6 + \nu)}{\Gamma(1/2 \nu + 1/6) \Gamma(1/2 + 1/2 \nu)}$$

или

$$1 = \frac{\frac{2}{\sqrt{3}} \pi}{\pi \csc \pi \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2} \nu\right)} - \frac{\frac{2}{\sqrt{3}} \pi}{\pi \csc \frac{1}{2} \pi \nu} = \frac{2}{\sqrt{3}} \left[ \sin \pi \left(\frac{1}{3} - \frac{\nu}{2}\right) - \sin \pi \frac{\nu}{2} \right]$$

Это дает

$$\sin \left(\frac{1}{6} \pi - \frac{1}{2} \pi \nu\right) = \sin \frac{1}{6} \pi \quad (16)$$

Это тригонометрическое уравнение имеет две серии корней:

$$\frac{1}{6} \pi - \frac{1}{2} \pi \nu = \frac{1}{6} \pi - 2\pi n \quad \text{или} \quad \nu = 4n \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots) \quad (17)$$

$$\frac{1}{6} \pi - \frac{1}{2} \pi \nu = \frac{5}{6} \pi - 2\pi n \quad \text{или} \quad \nu = 4n - \frac{4}{3} \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots) \quad (18)$$

Если использовать неравенство (8), остаются только корни

$$\nu = 4, \quad \nu = \frac{8}{3} \quad (19)$$

Но значению  $\nu = 4$  соответствует гипергеометрическая функция

$$\begin{aligned} f_\nu \left( \frac{\theta}{\rho} \right) &= f_4 \left( \frac{\theta}{\rho} \right) = F \left( \frac{13}{6}, -2; \frac{1}{2}; \frac{\theta^2}{\rho^2} \right) = \\ &= 1 + \frac{\frac{13}{6} \cdot (-2)}{1 \cdot \frac{1}{2}} \frac{\theta^2}{\rho^2} + \frac{\frac{13}{6} \cdot \frac{19}{6} \cdot (-2) \cdot (-1)}{1 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2}} \frac{\theta^4}{\rho^4} \end{aligned} \quad (20)$$

т. е. гипергеометрический полином

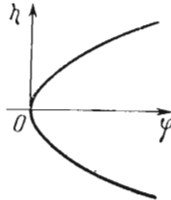
$$\psi(\theta, \eta) = \psi_4(\theta, \eta) = \rho^4 - \frac{23}{3} \rho^2 \theta^2 + \frac{26}{3} \frac{19}{18} \theta^4$$

Следовательно, имеем при  $\eta = 0$

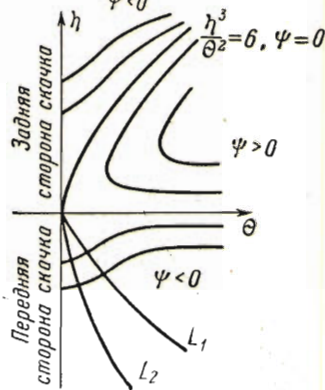
$$-C \frac{\partial \psi}{\partial \eta} = \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = 0$$

т. е.  $\varphi = 0$ . Кроме того, при  $\eta = 0$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \eta} = C \eta \frac{\partial \psi}{\partial \theta} = 0$$



Фиг. 3



Фиг. 4

причем  $\partial \varphi / \partial \eta$  меняет свой знак при прохождении через  $\eta = 0$ . График зависимости  $\eta$  от  $\varphi$  вблизи  $\eta = 0$  при  $\psi = \text{const}$  имеет вид, представленный на фиг. 3, т. е. здесь вовсе не получается течение с переходом через критическую скорость при прохождении через некоторую линию плоскости  $\varphi\psi$  или  $xy$ , а два течения, скорости которых при  $\varphi \rightarrow \pm 0$  приближаются к критической сверху или снизу. Решение  $\nu = 4$ , следовательно, не подходит, и остается только решение  $\nu = 8/3$ . При  $\nu = 8/3$

$$\begin{aligned} f_\nu \left( \frac{\theta}{\rho} \right) &= F \left( \frac{3}{2}, -\frac{4}{3}; \frac{1}{2}; \frac{\theta^2}{\rho^2} \right) = \left( 1 - \frac{\theta^2}{\rho^2} \right)^{1/2} F \left( -1, \frac{11}{6}; \frac{1}{2}; \frac{\theta^2}{\rho^2} \right) = \\ &= \text{const} \frac{\eta}{\rho^{1/2}} \left( 1 - \frac{11}{3} \frac{\theta^2}{\rho^2} \right) \end{aligned}$$

$$\psi(\theta, \eta) = \psi_{8/3}(\theta, \eta) = \text{const} \eta \left( \rho^2 - \frac{11}{3} \theta^2 \right) = \text{const} \eta (\eta^3 - 6\theta^2)$$

Чтобы получить, как на фиг. 1,  $\psi < 0$  непосредственно перед скачком ( $\eta < 0, \theta = 0$ ), нужно в последнем выражении взять отрицательный постоянный множитель, например  $-1$ . Итак,

$$\psi = -\eta (\eta^3 - 6\theta^2) = -\eta^4 + 6\eta\theta^2 \quad (21)$$

Согласно уравнениям (1) получим для скоростного потенциала

$$\varphi = C (4\eta^3\theta - 2\theta^3) \quad (22)$$



В данном течении сверхзвуковая область ограничивается полулинией тока  $\varphi = 0$ ,  $\varphi < 0$  и прямым скачком уплотнения.

Кроме того, при  $\eta = 0$  функция тока (21) равна нулю еще на полукубической параболе

$$\eta^3 / \theta^2 = 6 \quad (23)$$

Если наносить в плоскости  $(\theta, \eta)$  изображения линий тока  $\psi = \text{const}$ , то получится картина, представленная на фиг. 4.

Рассматриваемому течению соответствует в плоскости  $\theta\eta$  лишь полуплоскость  $\theta > 0$ . Половине полукубической параболы (23), лежащей в этой полуплоскости, соответствует полулиния тока  $\psi = 0$ ,  $\varphi > 0$ .

Полученное решение имеет, однако, один существенный недостаток: в сверхзвуковой области плоскости  $xu$  (и, следовательно, также в плоскости  $\varphi\psi$ ) образуются огибающие характеристик. Вследствие этого в части сверхзвуковой области скорость потока трехзначная. Для доказательства перейдем к характеристическим координатам

$$\lambda = \theta - \frac{2}{3}(-\eta)^{3/2}, \quad \mu = \theta + \frac{2}{3}(-\eta)^{3/2} \quad (24)$$

В этих координатах имеем

$$\psi = \text{const} (\mu - \lambda)^{1/2} [\mu\lambda - \frac{11}{12}(\mu + \lambda)^2] \quad (25)$$

Огибающие характеристик имеются там, где или  $\partial\psi / \partial\lambda = 0$ , или  $\partial\psi / \partial\mu = 0$ . Легко установить, что  $\partial\psi / \partial\lambda = 0$  при  $\mu^2 + 2\mu\lambda - 11\lambda^2 = 0$ , т. е. при

$$\frac{\mu}{\lambda} = -1 \pm 2\sqrt{3} \quad (26)$$

Этим корням соответствуют полукубические полупараболы

$$\theta = \frac{3 + \sqrt{3}}{3}(-\eta)^{2/3}, \quad \theta = \frac{3 - \sqrt{3}}{3}(-\eta)^{2/3} \quad (27)$$

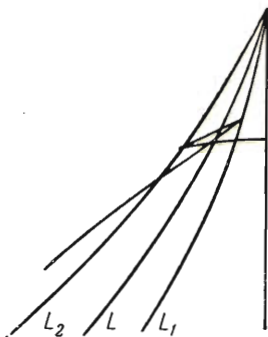
лежащие в полуплоскости  $\theta > 0$ .

Уравнение  $\partial\psi / \partial\mu = 0$  приводит к полукубическим полупараболам аналогичного вида, лежащим в полуплоскости  $\theta < 0$  и поэтому не представляющим для нас интереса.

Область трехзначности скоростей лежит между обеими линиями (27).

На основании этого течения можно, однако, построить течение, физически реальное в смысле однозначной зависимости скоростей от координат  $x, y$ , путем отбрасывания в каждой точке области трехзначности двух значений вектора скорости. При этом приходится, однако, допустить существование линии разрыва касательных скоростей в плоскости  $xu$ ; иначе говоря, линии разрыва скоростного потенциала. Разрыв потенциала получится, однако, более высокого порядка малости, чем самые значения потенциала, вследствие чего полученное решение может рассматриваться как приемлемое решение первого приближения.

Вероятно, при допущении искривленного скачка уплотнения также не удастся получить решения без такой линии разрыва касательных скоростей; вероятно, это удастся только путем учета вязкости газа.



Фиг. 5

Построение выполняется так: строятся линии тока на основании значений  $\psi$  и  $\varphi$  (21) и (22) при помощи формул Чаплыгина

$$dx = \frac{\cos \theta}{w} d\varphi - \frac{\rho_0}{\rho w} \sin \theta d\psi, \quad dy = \frac{\rho_0}{\rho w} \cos \theta d\psi + \frac{\sin \theta}{w} d\varphi$$

Зависимости  $w$  и  $\rho_0/\rho$  должны быть взяты согласно формулам [7] Фальковича [7]

$$w(0) = a_*, \quad \frac{\rho_0}{\rho(0)} = \frac{\rho_0}{\rho_*} = \left(\frac{x+1}{2}\right)^{1/(x-1)}, \quad \frac{d}{d\eta}\left(\frac{\rho_0}{\rho w}\right) = \frac{C\eta}{w}, \quad C \frac{d}{d\eta}\left(\frac{1}{w}\right) = \frac{\rho^0}{\rho w} \quad (28)$$

Вблизи конца скачка ( $\theta = 0$ ,  $\eta = 0$ ) различие между обычным идеальным газом и газом Трикоми-Фальковича не играет роли.

Если в плоскости  $\theta\eta$  двигаться вдоль линии  $\psi = \text{const}$  ( $\eta < 0$ ) справа налево, то угол наклона касательной к линии тока  $\theta$  убывает.

Когда мы доходим до первой из линий  $\partial\psi/\partial\lambda = 0$ , т. е. до линии  $L_1$ , где  $\theta = 1/3(3 + \sqrt{3})(-\eta)^{1/2}$ , то там будет  $\partial x/\partial\lambda = 0$ ,  $\partial y/\partial\lambda = 0$ , и образуется точка возврата линии тока. Угол наклона  $\theta$  продолжает убывать, так что после точки возврата линия тока лежит выше, чем до нее.

При переходе через линию  $L_2$ , для которой  $\theta = 1/3(3 - \sqrt{3})(-\eta)^{1/2}$ , снова образуется точка возврата, а продолжение линии тока проходит ниже, чем до нее. Наконец, линия тока доходит до вертикали  $x = 0$ ,  $y < 0$ ; следовательно, по пути должна была образоваться точка самопересечения линии тока (фиг. 5). Эти точки самопересечения лежат на линии  $L$ . Значения  $x, y$ , получаемые до подхода к линии  $L_1$ , относим к «первому листу» римановой поверхности, отображения  $(x, y) \rightarrow (\theta, \eta)$  значения, получаемые между  $L_1$  и  $L_2$ , — ко «второму листу», а точки, получаемые за линией  $L_2$ , — к «третьему листу».

Мы приходим к однозначной зависимости  $\theta, \eta$  от  $x, y$ , сохраняя первый лист до линии  $L$ , а третий лист после линии  $L$ ; второй лист целиком отбрасывается. Линии  $L$  плоскости  $x, y$  в первом листе в плоскости  $\theta\eta$  соответствует линия  $L'$ , в третьем листе — линия  $L''$ . Согласно построению в соответствующих друг другу точках этих линий значения  $x, y, \psi$  совпадают; значения  $\varphi$  могут различаться.

Чтобы выяснить характер разрыва функции  $\varphi$  на  $L$ , вычислим значения  $x$  в зависимости от  $\theta, \eta$  в виде степенного ряда, сохраняя члены первых двух порядков. Имеем

$$\begin{aligned} dx &= \left[ \frac{1}{a_*} + \frac{d}{dy} \left( \frac{1}{w} \right)_{\eta=0} \eta + \dots \right] d\varphi - \left[ \frac{\rho_0}{\rho_* a_*} + \dots \right] (\theta + \dots) d\psi \\ a_* dx &= [1 + (x+1)^{-1/2} \eta + \dots] d\varphi - \left( \frac{x+1}{2} \right)^{1/(x-1)} (\theta + \dots) d\psi = \\ &= \left( \frac{x+1}{2} \right)^{1/(x-1)} \{ (x+1)^{1/2} (12\eta^2 d\eta + 4\eta^3 d\theta - 6\theta^2 d\theta) + \\ &\quad + (12\eta^3 \theta + 4\eta^3 \theta - 6\theta^3) dy + (4\eta^4 - 6\theta^2 \eta - 12\theta^2 \eta) d\theta \} \end{aligned}$$

Отсюда

$$a_* x = \left( \frac{x+1}{2} \right)^{1/(x-1)} \{ (x+1)^{1/2} (4\eta^3 \theta - 2\theta^3) + (4\eta^4 \theta - 6\theta^3 \eta) \} \quad (29)$$



Далее

$$dy = \left[ \frac{\rho_0}{\rho_* a_*} + \frac{d}{d\eta} \left( \frac{\rho_0}{\rho w} \right)_{\eta=0} \eta + \frac{1}{2} \frac{d^2}{d\eta^2} \left( \frac{\rho_0}{\rho w} \right)_{\eta=0} \eta^2 + \dots \right] (1 + \dots) d\psi +$$

$$+ (\theta + \dots) \left( \frac{1}{a_*} + \dots \right) d\varphi$$

$$a_* dy = \left( \frac{\kappa + 1}{2} \right)^{1/(\kappa-1)} [ - (4\eta^3 d\eta - 6\theta^2 d\eta - 12\eta\theta d\theta) + (\kappa + 1)^{1/3} ( - 2\eta^2 d\eta +$$

$$+ 3\theta^2 \eta^2 d\eta + 6\eta^3 \theta d\theta + 12\eta^2 \theta^2 d\eta + 4\eta^3 \theta d\theta - 6\theta^3 d\theta) ] + \dots$$

Отсюда (30)

$$a_* y = - \left( \frac{\kappa + 1}{2} \right)^{1/(\kappa-1)} \left[ (\eta^4 - 6\eta\theta^2) + (\kappa + 1)^{1/3} \left( \frac{1}{3} \eta^6 - 5\theta^2 \eta^3 + \frac{3}{2} \theta^4 \right) \right] + \dots$$

Согласно (30) в данном приближении  $y(0, \eta) = y(0, -\eta)$ , что требуется для непрерывности линий тока.

Величина  $a_* x$  отличается от  $\varphi$  только на величину порядка  $\rho^{1/3}$ , в то время как величина  $\varphi$  имеет порядок  $\rho^3$ . Следовательно, при совпадении значений  $x$  значения  $\varphi$  могут отличаться только на величины порядка  $\rho^{1/3}$ .

С целью построения линий тока надо сперва найти линии  $\psi = \text{const}$  в плоскости  $\theta\eta$ , а затем найти соответствующие точки  $(x, y)$  по формулам (29), (30). После нахождения кривых  $\psi = \text{const}$  в плоскости  $xu$  находят их точки самопересечения и пропускают образовавшиеся петли этих линий.

На полученной линии разрыва  $L$  поток массы  $\rho v_n$ , поток энергии  $\rho v_n (i + 1/2 W^2)$  меняются строго непрерывно, а нормальная составляющая потока импульса  $\rho v_n^2 + p$  — непрерывно с точностью данной приближенной теории. Касательная составляющая потока импульса  $\rho v_n v_t$  терпит разрыв из-за разрыва касательной скорости. Поэтому в окрестности линии разрыва нужно учитывать вязкость, что выполняется посредством включения некоторого обобщенного пограничного слоя, ликвидирующего разрыв касательной составляющей потока импульса.

Поступила 6 IV 1955

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Франкль Ф. И. О плоско-параллельных воздушных течениях в каналах при околозвуковых скоростях. Мат. сборник, т. 40, № 1, 1933.
2. Гальперин В. Г. Исследование потока сжимаемого газа в криволинейном канале. Труды ЦАГИ, вып. 302. Москва, 1936.
3. Прандтль Л. Гидроаэромеханика. ГТТИ. Москва, 1949, стр. 358.
4. Никольский А. А., Таганов Г. И. Движение газа в местной сверхзвуковой зоне и некоторые условия разрушения потенциального течения. ПММ, т. X, вып. 4, 1946.
5. Trilling L., Walker K. On transsonic flow past a finite wedge. J. Math. and Phys., v. 32, N 1, 1953.
6. Ландау Л. Д. и Лифшиц Е. М. Исследования особенностей течения при помощи уравнения Эйлера-Трикоми. ДАН СССР, т. ХСVI, № 4, 1954.
7. Фалькович С. В. К теории сопла Лавала. ПММ, т. X, № 4, 1946.
8. Франкль Ф. И. К теории сопел Лавала. Изв. АН СССР, сер. мат., т. IX, № 5, 1945.
9. Фалькович С. В. Об одном семействе сопел Лавала. ПММ, т. XI, № 2, 1947.
10. Франкль Ф. И. Об одном семействе частных решений уравнения Дарбу-Трикоми. ДАН СССР, т. LVI, № 7, 1947.
11. Porter J. On the roots of the hypergeometric and Bessel's functions. Am. Journ. of Math., 1899.