О МОДЕЛИРОВАНИИ ПЕРВОЙ ОСНОВНОЙ ЗАДАЧИ ПЛОСКОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ДЛЯ МНОГОСВЯЗНЫХ ОБЛАСТЕЙ

В. И. Моссаковский

Как известно [1], в случае решения первой основной задачи плоской теории упругости для двух и более связных областей напряженное состояние оказывается не зависящим от упругих постоянных лишь в том случае, когда главные векторы внешних усилий, приложенных к каждому из контуров L_k, ограничивающих область, в отдельности, равны нулю. В этом случае возможно определение напряженного состояния натуры из эксперимента над моделью.

В настоящей заметке предлагается способ моделирования первой основной задачи теории упругости для многосвязных областей, когда главные векторы внешних усилий для некоторых контуров отличны от нуля. В этом случае для экспериментального определения напряжений достаточно произвести эксперименты над тремя моделями, изготовленными из материалов с различными коэффициентами Пуассона.

Пусть имеем натуру и три модели. При этом $\varkappa_0$, $\varkappa_1$, $\varkappa_2$, $\varkappa_3$ — упругие постоянные натуры и моделей. Функции напряжений для каждой задачи имеют вид:

$$\begin{aligned} \varphi_j(z) &= \frac{-1}{2\pi}\frac{1}{1+\varkappa_j}\sum_{k=1}^{m}(X_k+iY_k)\ln(z-z_k)+\varphi_j^*(z) \\ \psi_j(z) &= \frac{\varkappa_j}{2\pi(1+\varkappa_j)}\sum_{k=1}^{m}(X_k-iY_k)\ln(z-z_k)+\psi_j^*(z) \end{aligned} \tag{1}$$

(Здесь и в дальнейшем использованы обозначения [1]). Предположим, что между функциями напряжений для натуры и для моделей существует связь вида

$$\begin{aligned} \varphi_0(z) &= \frac{1}{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3}\left[\alpha_1\varphi_1(z)+\alpha_2\varphi_2(z)+\alpha_3(z)\right] \\ \psi_0(z) &= \frac{1}{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3}\left[\alpha_1\psi_1(z)+\alpha_2\psi_2(z)+\alpha_3\psi_3(z)\right] \end{aligned} \tag{2}$$

где α_1, α_2, α_3 — постоянные. Ясно, что определенные формулами (2) функции $\varphi_0(z)$, $\psi_0(z)$ удовлетворяют граничным условиям задачи. Для удовлетворения условию однозначности смещений должны выполняться

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi(1+\varkappa_0)}\sum_{k=1}^{m}(X_k+iY_k) &= \frac{1}{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3}\sum_{j=1}^{3}\frac{\alpha_j}{2\pi(1+\varkappa_j)}\sum_{k=1}^{m}(X_k+iY_k) \\ \frac{\varkappa_0}{2\pi(1+\varkappa_0)}\sum_{k=1}^{m}(X_k-iY_k) &= \frac{1}{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3}\sum_{j=1}^{3}\frac{\alpha_j\varkappa_j}{2\pi(1+\varkappa_j)}\sum_{k=1}^{m}(X_k-iY_k) \end{aligned} \tag{3}$$

Отсюда получим, что если α_1, α_2, α_3 удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{aligned} \frac{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3}{1+\varkappa_0} &= \frac{\alpha_1}{1+\varkappa}+\frac{\alpha_2}{1+\varkappa_2}+\frac{\alpha_3}{1+\varkappa_3} \\ \frac{(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)\,\varkappa_0}{1+\varkappa_0} &= \frac{\alpha_1\varkappa_1}{1+\varkappa_1}+\frac{\alpha_2\varkappa_2}{1+\varkappa_2}+\frac{\alpha_2\varkappa_3}{1+\varkappa_3} \end{aligned} \tag{4}$$

то функции $\varphi_0(z)$ и $\psi_0(z)$, введенные формулами (2) удовлетворяют условию однозначности смещений и, следовательно, дают решение задачи для натуры.

Для напряжений получим формулы

$$X_{x_0} = \frac{1}{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3}\left(\alpha_1 X_{x_1}+\alpha_2 X_{x_2}+\alpha_3 X_{x_3}\right) \qquad \text{и т. д.}$$

Поступила 20 XII 1954

ЛИТЕРАТУРА

1. Н. И. Мусхелишвили. Некоторые основные задачи математической теории упругости. Изд. Академии наук СССР. Москва, 1954.