Прикладная математика и механика. Том XIX, 1955
Институт механики Академии наук Союза ССР

О КОЛЕБАНИЯХ ПОЛОГОЙ КРУГОВОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ПАНЕЛИ, ИСПЫТЫВАЮЩЕЙ КОНЕЧНЫЕ ПРОГИБЫ

Э. И. Григолюк

(Москва)

Х. М. Муштари и И. В. Свирский [1] рассмотрели поведение пологой круговой цилиндрической панели, опертой по краям на диафрагмы, абсолютно гибкие в своей плоскости и не деформируемые из своей плоскости, под действием равномерного поперечного давления с целью определения критических значений давления согласно нелинейной теории пологих упругих оболочек.

В настоящей статье исследуется динамическая задача для такой панели в развитие работы автора [2].

§ 1. Исходные уравнения и их решение. Для тонкой упругой цилиндрической панели толщиной δ и радиуса R срединной поверхности основные уравнения задачи в случае прогибов w, соразмерных с высотой подъема h оболочки, суть

$$\Phi_1(x, y, t) = D\nabla^2\nabla^2 w - w_{xx}F_{yy} - \left(w_{yy} + \frac{1}{R}\right)F_{xx} + $$
$$+ 2F_{xy}w_{xy} + \frac{\gamma\delta}{g}w_{tt} - q = 0 \qquad (1.1)$$

$$\Phi_2(x, y, t) = \frac{1}{E\delta}\nabla^2\nabla^2 F + \frac{w_{xx}}{R} + w_{xx}w_{yy} - w_{xy}{}^2 = 0 \qquad (1.2)$$

Здесь F — силовая функция, связанная с осевыми N_1, кольцевыми N_2 и касательными $T = T_{12} = T_{21}$ усилиями, отнесенными к единице длины соответствующей дуги, посредством соотношений

$$N_1 = F_{yy}, \qquad N_2 = F_{xx}, \qquad T = -F_{xy} \qquad (1.3)$$

$D = E\delta^3/_{12}(1 - \mu^2)$, E — модуль упругости первого рода, μ — коэффициент Пуассона, γ — удельный вес, g — гравитационное ускорение, q — равномерное поперечное давление, t — время, x и y — осевая и окружная координаты в основании панели.

Индексы x, y, t внизу справа указывают на дифференцирование по соответствующей переменной.

Остановимся на тех же граничных условиях, что и в статье[1]: полагаем края панели опертыми на абсолютно гибкие в своей плоскости и абсолютно жесткие из своей плоскости диафрагмы. Тогда

$$w = M_1 = N_1 = \varepsilon_2 = 0 \quad \text{при } x = 0 \text{ и } x = a$$
$$w = M_2 = N_2 = \varepsilon_1 = 0 \quad \text{при } y = 0 \text{ и } y = b$$

причем M_1 и M_2 — осевой и кольцевой изгибающие моменты, а ε_1 и ε_2 — осевая и кольцевая относительные деформации срединной поверхности.

Граничные условия могут быть записаны так:

$$w = w_{xx} = F_{xx} = F_{yy} = 0 \quad \text{при } x = 0 \text{ и } x = a$$
$$w = w_{yy} = F_{xx} = F_{yy} = 0 \quad \text{при } y = 0 \text{ и } y = b$$

Решение задачи проводим тем же методом, что и в случае статической задачи — методом Бубнова-Папковича.

Функция прогиба удовлетворяет граничным условиям, если принять

$$w=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}C_{mn}\varphi_{mn}=\sum_{mn}C_{mn}\varphi_{mn}\qquad\left(\varphi_{mn}=\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}\right)\tag{1.4}$$

Выражение для F принимаем в виде, удовлетворяющем остальным граничным условиям ($k,\ l=1, 2, 3\ldots$):

$$F=\sum_{kl}\alpha_{kl}\varphi_{kl}+\sum_{mn}\alpha_{mn}{}^{*}\varphi_{mn}\tag{1.5}$$

Формулы (1.4) и (1.5) вводим в уравнение совместности (1.2). Получим ($p,\ q=1, 2, 3\ldots$)

$$\alpha_{kl}=-\frac{4\pi^2E\delta}{a^2b^2}\left[\left(\frac{k\pi}{a}\right)^2+\left(\frac{l\pi}{b}\right)^2\right]^{-2}\sum_{mn,pq}\alpha^{kl}_{mn,pq}\ C_{mn}C_{pq}$$

$$\alpha^{*}_{mn}=\frac{E\delta}{R}\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2\left[\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2+\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2\right]^{-2}C_{mn}\tag{1.6}$$

где

$$\alpha^{kl}_{mn,pq}=\frac{ab}{\pi^2}\int_0^a\int_0^b(\varphi_{mn,xx}\varphi_{pq,yy}-\varphi_{mn,xy}\varphi_{pq,xy})\,\varphi_{kl}\,dx\,dy\tag{1.7}$$

Уравнение (1.1) решаем по методу И. Г. Бубнова ($r,\ s=1, 2, 3\ldots$):

$$\int_0^a\int_0^b\Phi_1(x,y,t)\,\varphi_{rs}dx\,dy=0\tag{1.8}$$

тогда получим дифференциальное уравнение, содержащее только одну переменную — время.

Выполняя операции, указанные в (1.8), а также производя интегрирование по частям, найдем ($\gamma,\ \delta,\ \alpha,\ \beta=1, 2, 3\ldots$)

$$\frac{\gamma\delta}{gD}\cdot C_{rs,tt}+\frac{16\pi^4E\delta}{Da^4b^4}\sum_{mn,kl,\alpha\beta,\gamma\delta}\frac{\alpha^{kl}_{\alpha\beta,\ \gamma\delta}\ \beta^{kl}_{rs,mn}}{[(k\pi/a)^2+(l\pi/b)^2]^2}C_{\alpha\beta}C_{mn}C_{\gamma\delta}-$$

$$-\frac{4\pi^2E\delta}{a^2b^2DR}\sum_{mn,\ \alpha\beta}\left\{\frac{(r\pi/a)^2\alpha^{rs}_{mn,\alpha\beta}}{[(r\pi/a)^2+(s\pi/b)^2]^2}+\right.$$

$$\left.+\frac{(m\pi/a)^2\beta^{rs}_{mn,\alpha\beta}}{[(m\pi/a)^2+(n\pi/b)^2]^2}\right\}C_{\alpha\beta}C_{mn}+\left\{\left[\left(\frac{r\pi}{a}\right)^2+\left(\frac{s\pi}{b}\right)^2\right]^2+\frac{(r\pi/a)^4E\delta/DR^2}{[(r\pi/a)^2+(s\pi/b)^2]^2}\right\}C_{rs}-$$

$$-\frac{4q}{\pi^2Drs}\,[1-(-1)^r]\,[1-(-1)^s]=0\tag{1.9}$$

при этом

$$\beta^{kl}_{rs,mn}=\alpha^{rs}_{kl,\ mn}+\alpha^{rs}_{mn,kl}=\alpha^{kl}_{mn,\ rs}+\alpha^{kl}_{rs,\ mn}$$

$$\beta_{rs,\ mn}^{\ \ pq}=\alpha_{mn,pq}^{\ \ rs}+\alpha_{pq,mn}^{\ \ rs}=\alpha_{mn,\ rs}^{\ \ pq}+\alpha_{rs,\ mn}^{\ \ pq}\tag{1.10}$$

§ 2. **Линейные колебания.** Пренебрегая в уравнении (1.9) вторым и третьим членами, получим уравнение, описывающее линейные колебания панели. Если при этом остановиться на случае собственных колебаний, то, полагая $C_{rs}=C_{*rs}\cos\omega_{rs}t$, где ω_{rs} — частота собственных колебаний, найдем

$$\omega_{rs}=\frac{\sqrt{\pi^4\lambda^2(r^2+s^2/\lambda)^4+768r^4(1-\mu^2)H^2}}{\sqrt{12(1-\mu^2)}(r^2+s^2/\lambda)}\,\frac{\delta}{b^2}\sqrt{\frac{Eg}{\gamma}}\tag{2.1}$$

где

$$\lambda = \frac{b^2}{a^2}, \qquad h = \frac{b^2}{8R}, \qquad H = \frac{h}{\delta} \tag{2.2}$$

причем h — высота подъема недеформированной панели. Из (2.1) для плоской прямоугольной панели имеем известную формулу С. П. Тимошенко [см. [3], стр. 308, формула (203)]

$$\omega_{rs} = \frac{\pi^2\delta}{\sqrt{12(1-\mu^2)}}\left(\frac{r^2}{a^2}+\frac{s^2}{b^2}\right)\sqrt{\frac{Eg}{\gamma}} \tag{2.3}$$

§ 3. Нелинейные колебания. *Второе приближение.* Рассмотрим колебания панели с двумя степенями свободы. Пусть прогиб удовлетворяет соотношению

$$w = C_{11}\sin\frac{\pi x}{a}\sin\frac{\pi y}{b} + C_{13}\sin\frac{\pi x}{a}\sin\frac{3\pi y}{b} \tag{3.1}$$

Вместо уравнений (1.9) получим систему двух нелинейных уравнений:

$$\theta_1(t) = f^{02}C_{11,tt}^{0} + \sigma_{11}C_{11}^{03} + \sigma_{21}C_{11}^{02}C_{13}^{0} + \sigma_{13}C_{11}^{0}C_{13}^{0} + \sigma_{41}C_{13}^{03} -$$
$$- (\sigma_{51}C_{11}^{02} + \sigma_{61}C_{11}^{0}C_{13}^{0} + \sigma_{71}C_{13}^{02})H + (\sigma_{81}+\sigma_{91}H^2)C_{11}^{0} - \sigma_{101}q^0 = 0 \tag{3.2}$$

$$\theta_2(t) = f^{02}C^0_{13,tt} + \sigma_{13}C_{11}^{03} + \sigma_{23}C_{11}^{02}C_{13}^{0} + \sigma_{33}C_{11}^{0}C_{13}^{02} + \sigma_{43}C_{13}^{03} -$$
$$- (\sigma_{53}C_{11}^{02} + \sigma_{63}C_{11}^{0}C_{13}^{0} + \sigma_{73}C_{13}^{0})H +$$
$$+ (\sigma_{83}+\sigma_{93}H^2)C_{13}^{0} - \sigma_{103}q^0 = 0$$

где

$$\sigma_{11} = \frac{16\lambda^2}{(1+\lambda)^2}\sum_{kl}\mu_{kl}\alpha^{kl}(1), \qquad \sigma_{21} = \frac{16\lambda^2}{(1+\lambda)^2}\sum_{kl}\mu_{kl}\alpha^{kl}(2) \tag{3.3}$$

$$\sigma_{31} = \frac{16\lambda^2}{(1+\lambda)^2}\sum_{kl}\mu_{kl}\alpha^{kl}(3), \qquad \sigma_{41} = \frac{16\lambda^2}{(1+\lambda)^2}\sum_{kl}\mu_{kl}\alpha^{kl}(4)$$

$$\sigma_{51} = \frac{96\lambda^2}{(1+\lambda)^2}\alpha^{11}_{11,11}, \qquad \sigma_{61} = \frac{32\lambda^2}{(1+\lambda)^2}(2+\mu_{13})\beta^{11}_{13,11}$$

$$\sigma_{71} = \frac{32\lambda^2}{(1+\lambda)^2}(1+2\mu_{13})\alpha^{11}_{13,13}, \qquad \sigma_{81} = \frac{\pi^4(1+\lambda)^2}{12(1-\mu^2)}, \qquad \sigma_{91} = \frac{64\lambda^2}{(1+\lambda)^2}$$

$$\sigma_{101} = \frac{16}{\pi^2} = 1.6211, \quad \sigma_{13} = \frac{1}{3}\sigma_{21}, \qquad \sigma_{23} = \sigma_{31}, \qquad \sigma_{33} = \frac{1}{3}\sigma_{41}$$

$$\sigma_{43} = \frac{16\lambda^2}{(1+\lambda)^2}\sum_{kl}\mu_{kl}\alpha^{kl}(5), \qquad \sigma_{53} = \frac{32\lambda^2}{(1+\lambda)^2}(2+\mu_{13})\alpha^{13}_{11,11}$$

$$\sigma_{63} = \frac{32\lambda^2}{(1+\lambda)^2}(1+2\mu_{13})\beta^{13}_{11,13}, \qquad \sigma_{73} = \frac{96\lambda^2}{(1+\lambda)^2}\mu_{13}\alpha^{13}_{13,13}$$

$$\sigma_{83} = \frac{\pi^4(\lambda+9)^2}{12(1-\mu^2)}, \qquad \sigma_{93} = \frac{64\lambda^2}{(\lambda+9)^2}, \qquad \sigma_{103} = \frac{16}{3\pi^2} = 0.54038$$

причем

$$\alpha^{hl}_{pq,mn} = \frac{4klmnpq\,[4p^2n^2 - (k^2-p^2-m^2)(l^2-q^2-n^2)]}{[(k^2-p^2-m^2)^2 - 4m^2p^2][(l^2-n^2-q^2)^2 - 4n^2q^2]} \tag{3.4}$$

$$\beta^{hl}_{pq,mn} = \beta^{kl}_{mn,pq} = \frac{8klmnpq\,[2(m^2q^2+n^2p^2) - (k^2-m^2-p^2)(l^2-n^2-q^2)]}{[(k^2-p^2-m^2)^2 - 4m^2p^2][(l^2-n^2-q^2)^2 - 4n^2p^2]}$$

$$\mu_{kl} = \frac{(1+\lambda)^2}{(k^2\lambda+l^2)^2}, \qquad f^0 = \frac{b^2}{\delta}\sqrt{\frac{\gamma}{Eg}}, \qquad q^0 = \frac{qb^4}{E\delta^4}$$

$$C_{11}^{0} = \frac{C_{11}}{\delta}, \qquad C_{13}^{0} = \frac{C_{13}}{\delta}, \qquad H = \frac{h}{\delta} \tag{3.5}$$

Таблица 1

k	l	$\alpha^{kl}_{11,11}$	$\alpha^{kl}_{11,13}$	$\alpha^{kl}_{13,11}$	$\alpha^{kl}_{13,13}$	$\beta^{kl}_{11,13}$
1	1	1.3333	—2.4	0.44444	6.5143	—1.9556
3	1	—0,97778	1.76	1.1911	—10.629	2.9511
1	3	—0.97778	12	1.0286	4	13.029
3	3	0.8	—2.9486	—0.75429	—2.9333	—3.7029
1	5	—0.34286	—5.3968	—2.0106	—9.3818	—7.4074
5	1	—0.34286	0.61714	0.53587	—4.1829	1.1530
3	5	—0.39873	—1.4603	—2.1376	0.56727	—3.5979
5	3	—0.39873	—0.57796	—0.26449	—1.0286	—0.84245
5	5	—0.19048	—0.93424	—1.0310	0.77922	—1.9652
1	7	—0.21587	—1.4141	—0.81077	—8.8352	—2.2249
7	1	—0.21587	0.38857	0.36148	—2.7265	0.75005
3	7	—0.27513	—0.89374	—1.0144	—4.7736	—1.9081
7	3	—0.27513	—0.27102	—0.16653	—0.64762	—0.43755
5	7	—0.13025	—0.46384	—0.48108	—2.5507	—0.94492
7	5	—0.13025	—0.67423	—0.70648	0.60883	—1.3807
7	7	—0.0088889	—0.32269	—0.32844	—1.7846	—0.65113

k	l	$\alpha^{kl}(1)$	$\alpha^{kl}(2)$	$\alpha^{kl}(3)$	$\alpha^{kl}(4)$	$\alpha^{kl}(5)$
1	1	3.5555	—7.8222	21.195	—12.739	84.872
3	1	1.9121	—8.6566	29.494	—31.366	225.93
1	3	1.9121	—38.217	161.92	52.114	32
3	3	1.28	8.8868	18.404	10.862	17.209
1	5	0.23510	7.6190	48.436	—69.495	176.04
5	1	0.23510	—1.1860	4.1977	—4.8229	34.992
3	5	0.31797	4.3037	12.492	—2.0410	0.64359
5	3	0.31797	1.0074	1.5300	0.86652	2.1159
5	5	0.072562	1.1230	3.5653	—1.5313	1.2144
1	7	0.093202	1.4409	8.7648	19.657	156.12
7	1	0.093202	—0.48575	1.7397	—2.0450	14.868
3	7	0.15140	1.5750	6.2677	9.1087	45.575
7	3	0.15140	0.36115	0.54781	0.27337	0.83882
5	7	0.033930	0.36922	1.5573	2.4102	13.012
7	5	0.033930	0.53950	1.7477	—0.84061	0.74135
7	7	0.015802	0.17364	0.74123	1.1620	6.3697

Значения коэффициентов $\alpha^{kl}_{11,11}$, $\alpha^{kl}_{11,13}$, $\alpha^{kl}_{13,11}$, $\alpha^{kl}_{13,13}$, $\beta^{kl}_{11,13}$, $\alpha^{kl}(1)$, $\alpha^{kl}(2)$, $\alpha^{kl}(3)$, $\alpha^{kl}(4)$, $\alpha^{kl}(5)$ для ряда комбинаций на k и l даны в табл. 1; отметим, что k и l в формулах (3.3)—(3.4) могут принимать только нечетные значения.

Значения коэффициентов $\sigma_{11}, \sigma_{21}, \ldots, \sigma_{93}$ для $b/a = 10$, 5, 3, 2, 1, 0.75, 0.5, 0.3, 0.25,0.1 приведены в табл. 2. При вычислении σ_{81} и σ_{83} полагалось $\mu = 0.3$.

Рассмотрим колебания панели с частотой, равной частоте ω равномерного поперечного давления. Пусть

$$q^0 = q_* \cos \omega t,\ C_{11}{}^0 = W_{*1} \cos \omega t,\ C_{13}{}^0 = W_{*3} \cos \omega t \tag{3.6}$$

где q_*, W_{*1}, W_{*3} — постоянные.

Следуя методу И. Г. Бубнова, потребуем ортогональности принятых выражений (3.6) для первых гармоник прогиба уравнениям (3.2) в течение четверти периода колебаний:

$$\int\limits_0^{\pi/2\omega} \theta_1(t) \cos \omega t\, dt = 0,\quad \int\limits_0^{\pi/2\omega} \theta_2(t) \cos \omega t\, dt = 0 \tag{3.7}$$

Таблица 2

b/a	σ_{11}	σ_{21}	σ_{31}	σ_{41}	σ_{51}	σ_{61}	σ_{71}	σ_{81}
10	85.326	—547.80	3085.2	—70.886	125.48	—175.36	555.25	90995
5	70.944	—412.34	1936.2	16.919	118.34	—149.54	418.13	6030.1
3	54.666	—244.75	990.86	—30.927	103.68	—117.02	273.08	892.02
2	39.348	—135.66	487.02	—75.289	81.920	—86.023	172.88	223.00
1	14.920	—38.098	117.89	—48.721	32.000	—31.915	56.283	35.681
0.75	7.7885	—19.225	58.061	—28.180	16.589	—16.437	28.458	21.778
0.5	2.4967	—6.2017	35.629	—10.628	5.1200	—5.0519	8.6428	13.938
0.3	0.47208	—1.2562	3.8328	—2.6145	0.87265	—0.85938	1.4620	10.598
0.25	0.25103	—0.68868	2.1188	—1.5207	0.44291	—0.43604	0.74114	10.070
0.1	$853.26\cdot10^{-5}$	$-2601.0\cdot10^{-5}$	$8228.1\cdot10^{-5}$	$-6754.1\cdot10^{-5}$	$1254.8\cdot10^{-5}$	$1234.6\cdot10^{-5}$	$2094.8\cdot10^{-5}$	9.0995

b/a	σ_{91}	σ_{43}	σ_{53}	σ_{63}	σ_{73}	σ_{83}	σ_{93}
10	62.739	4747.4	—87.679	1110.5	323.20	105980	53.868
5	59.171	2576.5	—74.772	836.27	207.61	10312	34.602
3	51.84	1536.6	—58.510	546.15	96.000	2890.1	16.000
2	40.960	1032.7	—43.012	345.76	36.355	1507.5	6.0592
1	16	388.01	—15.957	112.57	3.84	892.02	0.64
0.75	8.2944	212.01	—8.2183	56.916	1.3287	815.67	0.22145
0.5	2.56	77.344	—2.5260	17.286	0.28050	763.24	0.046749
0.3	0.43632	18.815	—0.42969	2.9240	0.037643	737.06	$627.39\cdot10^{-5}$
0.25	0.22145	10.933	—0.21820	1.4823	0.018264	732.61	$304.40\cdot10^{-5}$
0.1	$627.39\cdot10^{-5}$	0.48554	$617.30\cdot10^{-5}$	$4189.7\cdot10^{-5}$	$47.302\cdot10^{-5}$	724.14	$7.8837\cdot10^{-5}$

Тогда получим

$$-\omega_*^2 W_{*1} + \frac{3}{4}(\sigma_{11}W_{*1}^3 + \sigma_{21}W_{*1}^2 W_{*3} + \sigma_{31}W_{*1}W^2_{*3} + \sigma_{41}W_{*3}^3) -$$
$$-\frac{8}{3\pi}(\sigma_{51}W_{*1}^2 + \sigma_{61}W_{*1}W_{*3} + \sigma_{71}W_{*3}^2)H + (\sigma_{81} + \sigma_{91}H^2)W_{*1} - \sigma_{101}q_* = 0$$
$$-\omega_*^2 W_{*3} + \frac{3}{4}(\sigma_{13}W_{*1}^3 + \sigma_{23}W_{*1}^2 W_{*3} + \sigma_{33}W_{*1}W_{*3}^2 + \sigma_{43}W_{*3}^3) - \qquad (3.8)$$
$$-\frac{8}{3\pi}\left(\sigma_{53}W_{*1}^2 + \sigma_{63}W_{*1}W_{*3} + \sigma_{73}W_{*3}^2\right)H + (\sigma_{83} + \sigma_{93}H^2)W_{*3} - \sigma_{103}q_* = 0$$

причем

$$\omega_* = \omega f^0 = \frac{\omega b^2}{\delta}\sqrt{\frac{\gamma}{Eg}} \qquad (3.9)$$

Уравнения (3.2) в пренебрежении инерционным членом совпадут с уравнениями (2.4) — (2.6) статьи[1], если исправить вкравшиеся в них ошибки в коэффициентах и если суммирование при вычислении коэффициентов $\sigma_{11}, \ldots, \sigma_{43}$ ограничить так, как это сделано в упомянутой статье. При $q_* = 0$ из (3.8) найдем собственные значения частот ω_*^2 колебания панели в зависимости от W_{*1}. Вычисления следует производить подбором, определяя для каждого заданного значения W_{*1} значение W_{*3}, а затем для соответствующей пары значений W_{*1} и W_{*3} — величину ω_*^2.

Первое приближение. Если $C_{13}^0 = 0$, то из (3.2) найдем

$$W_{1\tau\tau} + \psi_1 W_1^3 - \psi_2 W_1^2 + (\psi_3 + \psi_4\theta)W_1 - \psi_5\theta q^* = 0 \qquad (3.10)$$

где

$$\theta = \frac{D}{E\delta h^2} = \frac{1}{12(1-\mu^2)}\left(\frac{\delta}{h}\right)^2, \quad \tau = \frac{th}{b^2}\sqrt{\frac{Eg}{\gamma}} \qquad (3.11)$$

$$\psi_1 = 128 \sum_{k=1,3,5\ldots}\ \sum_{l=1,3,5\ldots} \frac{1}{(k^2+l^2/\lambda)^2}\left(\frac{k}{l}\frac{1}{4-k^2} + \frac{l}{k}\frac{1}{4-l^2}\right)^2 \qquad (3.12)$$

$$\psi_2 = 2\psi_3 = \frac{128\lambda^2}{(1+\lambda)^2}, \quad \psi_4 = \pi^4(1+\lambda)^2, \quad \psi_5 = \frac{16}{\pi^2} = 1.6211$$

Для плоской панели из (3.10) имеем

$$W_{1\tau_1\tau_1}^{\ 0} + \psi_1 W_1^{03} + \psi_4^0 W_1^0 - \psi_5 q^0 = 0, \qquad \tau_1 = \frac{t}{f_0}, \qquad \psi_4^0 = \frac{\psi_4}{12(1-\mu^2)} \tag{3.13}$$

Приводим значения ψ_1 для ряда отношений b/a:

b/a	∞	10	5	3	2	1
ψ_1	93.477	85.326	70.945	54.667	39.948	14.920
b/a	0.75	0.5	0.25	0.3	0.1	0
ψ_1	7.7887	2.4967	0.25103	0.47209	0.0085327	0

Дадим уточненные значения коэффициента $A(\gamma) = {}^1/_{128}\,\psi_1(1 + 1/\lambda)^2$ работы [1]:

b/a	1	0.75	0.5	0.3
$A(\gamma)$	0.46626	0.46951	0.48764	0.54097

В случае $\lambda = 0$ $(a = \infty)$ $\psi_1 = \psi_2 = \psi_3 = 0$, а $\psi_4 = \pi^1$, при этом имеем бесконечно длинную криволинейную цилиндрическую пластину со свободно смещающимися краями. Уравнение (3.10) тогда совпадает с уравнением для пологого стержня (2.10) статьи [2], если в него ввести цилиндрическую жесткость.

В случае собственных колебаний панели уравнение (3.10) посредством подстановки $V_1 = W_{1\tau}$ может быть проинтегрировано при любых значениях $\psi_1, \ldots, \psi_4$. В частности, при этом период собственных колебаний T равен:

$$T = \oint \frac{dW_1}{\sqrt{2\left[Э - \frac{1}{4}\psi_1 W_1^4 + \frac{1}{3}\psi_2 W_1^3 - \frac{\psi_3 + \psi_4\theta}{2} W_1^2\right]}} \tag{3.14}$$

где

$$Э = \frac{1}{2} V_{10}^2 + \frac{1}{4}\psi_1 W_{10}^4 - \frac{1}{3}\psi_2 W_{10}^3 + \frac{\psi_3 + \psi_4\theta}{2} W_{10}^2 \tag{3.15}$$

и $V_1 = V_{10}$, $W_1 = W_{10}$ — соответствующие значения в начальный момент времени.

Из формулы (3.14) следует, что период собственных колебаний панели выражается полным эллиптическим интегралом первого рода, поэтому вычислительные трудности сводятся лишь к отысканию корней алгебраических уравнений четвертой степени.

Из (3.14) для плоской панели

$$\tau_1^* = \frac{2\pi}{\omega_*} = \frac{T\delta}{b^2}\sqrt{\frac{Eg}{\gamma}} = 4(\psi_4^{02} + 4\psi_1 Э)^{-1/4} F({}^1/_2\pi, k_1^2) \tag{3.16}$$

Здесь

$$\alpha^2 = \frac{1}{\psi_1}\left(-\psi_4^0 + \sqrt{\psi_4^{02} + 4\psi_1 Э}\right), \qquad \beta^2 = \frac{1}{\psi_1}\left(\psi_4^0 + \sqrt{\psi_4^{02} + 4\psi_1 Э}\right) \tag{3.17}$$

$$k_1^2 = \frac{\alpha^2}{\alpha^2 + \beta^2}, \quad V_1^0 = W_{1\tau_1}^0, \quad Э = \frac{1}{2} V_{10}^{\ 0} + \frac{1}{4}\psi_1 W_{10}^{\ 04} + \frac{1}{2}\psi_4^{\ 0} W_{10}^{02}$$

$F({}^1/_2\pi, k_1^2)$ — полный эллиптический интеграл первого рода, V_{10}^0, W_{10}^0 — значения скорости и прогиба при $t = 0$.

Значения периода собственных колебаний плоской прямоугольной панели при $\mu = 0.3$ для ряда λ в первом $(\tau_1^*)_1$ и во втором $(\tau_1^*)_2$ приближениях дана в табл. 3. При вычислениях были использованы таблицы Н. С. Самойловой-Яхонтовой [4]. Более подробно уравнение (3.10) рассмотрено в статье [2].

В случае гармонических колебаний панели с частотой внешней нагрузки из (3.8) найдем

$$\tau_1^* = 4\pi\sqrt{3(1-\mu^2)}\left(\frac{3\psi_1}{4\theta} W_*^2 - \frac{8\psi_2}{3\pi\theta} W_* + \frac{\psi_3}{\theta} + \psi_4 - \frac{\psi_5 q_*}{W_*}\right)^{-1/2}$$

$$(W_1 = W_* \cos\omega t, \quad q^* = q_* \cos\omega t) \tag{3.18}$$

При вынужденных колебаниях τ_1^* задано. В практических расчетах же целесообразно считать известной амплитуду W_*. При $q_* = 0$ из (3.18) получим формулу для периода собственных колебаний панели.

Таблица 3

b/a	W_{*1}	0	2	4	6	8	10
10	$(\tau_1^*)_1$	0.0208	0.0208	0.0207	0.0206	0.0204	0.0201
	$(\tau_1^*)_2$	0.0208	0.0208	0.0207	0.0206	0.0205	0.0203
5	$(\tau_1^*)_1$	0.0809	0.0795	0.0758	0.0706	0.0649	0.0592
	$(\tau_1^*)_2$	0.0809	0.0798	0.0770	0.0729	0.0681	0.0632
3	$(\tau_1^*)_1$	0.210	0.193	0.160	0.130	0.107	0.0902
	$(\tau_1^*)_2$	0.210	0.196	0.168	0.140	0.117	0.0996
2	$(\tau_1^*)_1$	0.421	0.340	0.239	0.177	0.138	0.113
	$(\tau_1^*)_2$	0.421	0.348	0.255	0.191	0.151	0.124
1	$(\tau_1^*)_1$	1.05	0.705	0.435	0.306	0.234	0.189
	$(\tau_1^*)_2$	1.05	0.716	0.457	0.327	0.252	0.204
0.75	$(\tau_1^*)_1$	1.35	0.940	0.594	0.420	0.322	0.260
	$(\tau_1^*)_2$	1.35	0.947	0.614	0.444	0.344	0.280
0.5	$(\tau_1^*)_1$	1.68	1.36	0.956	0.707	0.553	0.451
	$(\tau_1^*)_2$	1.68	1.36	0.964	0.717	0.564	0.462
0.3	$(\tau_1^*)_1$	1.93	1.81	1.56	1.31	1.10	0.938
	$(\tau_1^*)_2$	1.93	1.81	1.56	1.31	1.11	0.955
0.1	$(\tau_1^*)_1$	2.08	2.08	2.07	2.06	2.04	2.01
	$(\tau_1^*)_2$	2.08	2.08	2.07	2.06	2.04	2.01

Для плоской панели соответственно имеем

$$\tau_1{}^* = 4\pi\sqrt{3(1-\mu^2)}\left[9(1-\mu^2)\,\psi_1 W_*{}^{02} + \psi_4 - \frac{\psi_5 q_*{}^0}{W_*{}^0}\right]^{-1/2} \tag{3.19}$$

Вычисления по формулам (3.18) — (3.19) по сравнению с (3.14), (3.16) имеют такой же порядок погрешности, как и для случаев, разобранных в статье [2]. Погрешность растет с увеличением амплитуды прогиба. Однако для практических расчетов она не существенна. Наибольшая погрешность возникает при $\lambda = 1$, при этом, когда $W_*{}^0 = 10$, она равна 2.04%.

Поступила 20 II 1955 Институт механики АН СССР

ЛИТЕРАТУРА

1. Муштари Х. М., Свирский И. В. Определение больших прогибов цилиндрической панели, опертой на гибкие нерастяжимые ребра, под действием внешнего нормального давления. ПММ., т. XVII, вып. 6, стр. 755—760, 1953.
2. Григолюк Э. И. Нелинейные колебания и устойчивость пологих оболочек и стержней. Изв. Отд. технич. наук АН СССР, № 3, стр.33—68, 1955.
3. Тимошенко С. П. Теория колебаний в инженерном деле. ГТТИ, М.— Л., 1934.
4. Самойлова-Яхонтова Н. С. Таблицы эллиптических интегралов. ОНТИ НКТП СССР, М.— Л., 1935.