Прикладная математика и механика. Том XIX, 1955
Институт механики Академии наук Союза ССР

К ВОПРОСУ О СЛОЖНОМ НАГРУЖЕНИИ

Л. М. Качанов

(Ленинград)

§ 1. В теории пластичности используются, как известно, два типа основных зависимостей:

1) уравнения теории упруго-пластических деформаций, устанавливающие связь между компонентами деформации и компонентами напряжения и являющиеся, по существу, уравнениями состояния нелинейно-упругого тела [1];

2) уравнения теории пластического течения, связывающие бесконечно малые приращения компонентов деформации с компонентами напряжения и их бесконечно малыми приращениями.

Обе теории совпадают в случае простого нагружения [2] и приводят к разным результатам при сложных путях деформации. Вопрос о связи между этими теориями и их оценке обсуждается во многих теоретических и экспериментальных работах. Несомненно, что теоретические соображения и экспериментальные данные говорят в пользу теории пластического течения.

Однако было бы нецелесообразно полностью отказываться от применения теории пластических деформаций; последняя приводит к несравненно более простым математическим задачам, чем теория пластического течения, в то время как решения конкретных задач, выполненные по обеим теориям, приводят зачастую к близким результатам. Наконец, самые уравнения теории пластического течения, как показывают опыты, не являются универсальными, а лишь приближенно описывают пластические деформации при не слишком сложных путях нагружения. Поэтому понятен интерес, который проявляется к выяснению связи между упомянутыми теориями.

Для материала с упрочнением этот вопрос частично решается теоремой А. А. Ильюшина [2], рассматривающей случай пропорционального возрастания приложенных нагрузок и основывающейся на возможности аппроксимации всей кривой деформации простейшим степенным законом. Против такой аппроксимации выдвигались возражения [3], однако при пластических деформациях, значительно превышающих упругие, упомянутая аппроксимация приводит, несомненно, к правильным выводам

При отсутствии упрочнения степенная аппроксимация непригодна и при пропорциональном возрастании нагрузок элементы тела могут испытывать, вообще говоря, сложное нагружение и даже разгрузку [4]. Так, в задаче о бесконечной тонкой пластинке с круговым вырезом, нагруженным равномерным давлением, напряженное состояние частиц, примыкающих к вырезу, изменяется с возрастанием давления от состояния чистого сдвига к состоянию одноосного сжатия.

В настоящей заметке излагаются некоторые качественные признаки сближения решений по двум упомянутым теориям при сложных путях деформирования и отсутствии упрочнения.

§ 2. Для упрощения выкладок считаем материал несжимаемым, что внесет лишь незначительные изменения в общую картину деформации.

Уравнения теории пластических деформаций имеют вид

$$s_x = \frac{2\tau_s}{\Gamma}\,\varepsilon_x, \ldots \qquad \tau_{xy} = \frac{\tau_s}{\Gamma}\,\gamma_{xy}, \ldots \tag{2.1}$$

где Γ — интенсивность деформаций сдвига, $s_x = \sigma_x - \sigma, \ldots$; $\tau_{xy}, \ldots$ — компоненты девиатора напряжений, τ_s — предел текучести при чистом сдвиге ($\sqrt{3}\,\tau_s = \sigma_s$). Компоненты напряжения удовлетворяют условию пластичности Мизеса

$$(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6\,({\tau_{xy}}^2 + {\tau_{yz}}^2 + {\tau_{zx}}^2) = 6{\tau_s}^2 \tag{2.2}$$

Уравнения теории пластического течения таковы

$$d\varepsilon_x = \frac{1}{2G}\,ds_x + \lambda s_x, \ldots, \qquad d\gamma_{xy} = \frac{1}{G}\,d\tau_{xy} + 2\lambda\tau_{xy}, \ldots \tag{2.3}$$

где множитель λ пропорционален приращению работы пластической деформации

$$2{\tau_s}^2\lambda = \sigma_x\,d\varepsilon_x + \ldots + \tau_{xz}\,d\gamma_{xz} > 0 \tag{2.4}$$

Напряжения здесь также удовлетворяют условию пластичности (2.2).

Как уже упоминалось, обе теории совпадают при простом нагружении, когда, в силу (2.2), напряжения $s_x, \ldots$; $\tau_{xy}; \ldots$ постоянны.

§ 3. Рассмотрим сначала симметричную деформацию круглой тонкостенной трубы при действии скручивающего момента и осевого растяжения. Здесь можно считать отличными от нуля лишь напряжения σ_z, $\tau_{\varphi z}$ (в цилиндрической системе координат r, φ, z). Введем безразмерные величины

$$q = \frac{\sigma_z}{\sigma_s}, \qquad \tau = \frac{\tau_{\varphi z}}{\tau_s}, \qquad \zeta = \frac{\varepsilon_z}{\varepsilon_s}, \qquad \gamma = \frac{\gamma_{\varphi z}}{\gamma_s} \qquad (E\varepsilon_s = \sigma_s,\ G\gamma_s = \tau_s)$$

По теории упруго-пластических деформаций имеем

$$q = \frac{\zeta}{\sqrt{\zeta^2 + \gamma^2}}, \qquad \tau = \frac{\gamma}{\sqrt{\zeta^2 + \gamma^2}} \tag{3.1}$$

Условие пластичности

$$q^2 + \tau^2 = 1 \tag{3.2}$$

Полагая

$$q = \sin v \qquad \left(0 \leqslant v \leqslant \frac{1}{2}\pi\right), \qquad \operatorname{tg}\frac{v}{2} = w \qquad (0 \leqslant w \leqslant 1) \tag{3.3}$$

находим

$$w = -\frac{\gamma}{\zeta} + \sqrt{\left(\frac{\gamma}{\zeta}\right)^2 + 1} \tag{3.4}$$

причем отношение γ/ζ считаем положительным.

По теории пластического течения

$$d\zeta = dq + \Lambda q, \qquad d\gamma = d\tau + \Lambda\tau \tag{3.5}$$

где

$$\Lambda = \frac{2}{3}E\lambda = q\,d\zeta + \tau\,d\gamma \tag{3.6}$$

При помощи (3.2) получаем из (3.5), (3.6) дифференциальное уравнение

$$\frac{dq}{d\zeta} = \sqrt{1 - q^2}\left(\sqrt{1 - q^2} - q\,\frac{d\gamma}{d\zeta}\right) \tag{3.7}$$

Будем полагать известным путь деформации $\gamma = \gamma(\zeta)$, удовлетворяющий условию нагружения $\Lambda > 0$. Выполнив подстановки (3.3), преобразуем (3.7) к уравнению Риккати

$$\frac{dw}{d\zeta} = -\frac{1}{2}\,w^2 - w\gamma'(\zeta) + \frac{1}{2} \tag{3.8}$$

Нетрудно построить частные решения этого уравнения для некоторых классов функции $\gamma(\zeta)$, представляющие интерес для анализа уравнений пластического течения и постановки опытов; на этом мы не останавливаемся.

Пусть, начиная с некоторого момента, с возрастанием ζ путь деформации приближается к прямой $\gamma = A + B\zeta$; тогда $\gamma'(\zeta) \to B$, причем, так как рассматривается деформация при положительных ζ, γ (при сложном нагружении с переменами знака приобретает значение эффект Баушингера, игнорируемый теориями), то $B > 0$.

Рассмотрим «установившееся течение», представляемое корнем

$$w^\circ = -B + \sqrt{1 + B^2} > 0$$

уравнения

$$-\frac{1}{2} w^{\circ 2} - Bw^\circ + \frac{1}{2} = 0 \tag{3.9}$$

и введем новое неизвестное $u = w - w^\circ$. Тогда дифференциальное уравнение (3.8) преобразуется к виду

$$\frac{du}{d\zeta} = -u\,[w^\circ + \gamma'(\zeta)] - \frac{1}{2} u^2 - w^\circ\,[B - \gamma'(\zeta)] \tag{3.10}$$

Воспользуемся теперь теоремой Асколи [5], относящейся к дифференциальному уравнению [1]

$$y' = -g(x)\,y + f(x, y) \tag{3.11}$$

где

(1) x, y вещественны и принадлежат области Ω ($x \geqslant a$, $|y| \leqslant b$)

(2) $f(x, y)$ непрерывна

(3) $g(x) > 0$ и для $x \geqslant a$ непрерывна

(4) $\lim \dfrac{f(x, 0)}{g(x)} = 0$ при $x \to \infty$

(5) $|f(x, y_2) - f(x, y_1)| \leqslant \theta g(x) |y_2 - y_1|$ $\quad (0 \leqslant \theta \leqslant 1)$

Тогда интеграл уравнения (3.11), исходящий из внутренней точки x_0, y_0 области Ω, существует в $(x_0 \leqslant x < \infty)$, причем $|y(x)| \leqslant b$. Если, кроме того, интеграл

$$\int_a^\infty g(x)\,dx$$

расходится, то все решения стремятся к нулю при $x \to \infty$.

Возвращаясь к уравнению (3.10), убеждаемся в том, что условия теоремы Асколи выполнены. Действительно, $\zeta \geqslant 0$, $|u| \leqslant 1$; при гладком пути деформирования условия непрерывности выполняются; начиная с некоторого ζ_0 $w^\circ + \gamma'(\zeta) > 0$, так как $w^\circ > 0$ и $\gamma'(\zeta) \to B > 0$. Далее,

$$\lim_{\zeta \to \infty} \frac{w^\circ\,[\gamma'(\zeta) - B]}{w^\circ + \gamma'(\zeta)} = 0, \qquad \int_{\zeta_0}^\infty [w^\circ + \gamma'(\zeta)]\,d\zeta = \infty$$

Наконец, по условию (5)

$$\frac{1}{2}\,|u_2{}^2 - u_1{}^2| = \left\{\frac{1}{2}\,\frac{|u_1 + u_2|}{w^\circ + \gamma'(\zeta)}\right\} [w^\circ + \gamma'(\zeta)]\,|u_2 - u_1|$$

Выражение внутри фигурных скобок, начиная с некоторого ζ, меньше единицы, так как $|u_1 + u_2| \leqslant 2$, а $w^\circ + \gamma'(\zeta) = \sqrt{1 + B^2} + \gamma'(\zeta) - B$ становится больше единицы. Итак, $w \to w^\circ$ при $\zeta \to \infty$.

С другой стороны из решения (3.4) вытекает, что, если путь деформации приближается к прямой $\gamma = A + B\zeta$, то также $w \to w^\circ$.

Таким образом, напряжения в трубе, определяемые рассматриваемыми теориями пластичности, сближаются по мере развития деформации в некотором направлении.

---

[1] К сожалению, с работой Асколи оказалось возможным ознакомиться только по реферативным журналам.

§ 4. Рассмотрим деформацию трубы под действием внутреннего давления и осевой силы. В трубе будут лишь нормальные напряжения σ_φ, σ_z (в безразмерной форме p, q), удовлетворяющие условию пластичности

$$p^2 - pq + q^2 = 1 \tag{4.1}$$

Ограничимся, для простоты, рассмотрением случая

$$p > \frac{1}{\sqrt{3}}, \qquad q \geqslant 0, \qquad \eta > 0 \qquad \left(\eta = \frac{\varepsilon_\varphi}{\varepsilon_s}\right)$$

Тогда по теории пластических деформаций

$$p = \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{2+\xi}{\sqrt{1+\xi+\xi^2}}, \qquad q = \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{1+2\xi}{\sqrt{1+\xi+\xi^2}} \qquad \left(\xi = \frac{\zeta}{\eta}\right)$$

Полагая во втором соотношении

$$\frac{\sqrt{3}}{2} q = \sin v \qquad \left(0 \leqslant v < \frac{1}{2}\pi\right), \qquad \operatorname{tg}\frac{1}{2} v = w \qquad (0 \leqslant w < 1) \tag{4.2}$$

получаем при $\xi \geqslant -\frac{1}{2}$

$$w = -\frac{\sqrt{3}}{1+2\xi} + \sqrt{1 + \frac{3}{(1+2\xi)^2}} \tag{4.3}$$

По теории пластического течения

$$\begin{aligned} 2d\eta &= (2dp - dq) + \Lambda(2p - q) \\ 2d\zeta &= (2dq - dp) + \Lambda(2q - p) \end{aligned} \tag{4.4}$$

причем

$$\Lambda = p\,d\eta + q\,d\zeta$$

Исключая с помощью условия пластичности из (4.4) p, dp, Λ и выполняя преобразования (4.2), вновь приходим к уравнению Риккати

$$\frac{dw}{d\eta} = -w + (1 - w^2)\, Z(\eta) \tag{4.5}$$

где

$$1 + 2\frac{d\zeta}{d\eta} = 2\sqrt{3}\, Z(\eta)$$

Пусть, как и ранее, с возрастанием η путь деформации приближается к прямой $\zeta = A + B\eta$, тогда $2\sqrt{3}\, Z(\eta) \to 1 + 2B \equiv 2\sqrt{3}\, C$; введем новую неизвестную функцию $u = w - w^\circ$, где $0 \leqslant w^\circ < 1$ является корнем уравнения

$$w^\circ - (1 - w^{\circ 2})\, C = 0 \tag{4.6}$$

Складывая (4.5), (4.6), получаем

$$\frac{du}{d\zeta} = -u\,[1 + 2w^\circ Z(\eta)] - u^2 Z(\eta) + (1 - w^{\circ 2})\,[Z(\eta) - C] \tag{4.7}$$

Вследствие ограничений, рассмотренных в начале параграфа, $C \geqslant 0$ и нетрудно видеть, что, по крайней мере с некоторого значения η, условия теоремы Асколи выполняются и, стало быть, $w \to w^\circ$. Решение (4.2) по теории пластических деформаций также стремится к w°, так как $\xi \to B$.

§ 5. Перейдем к обсуждению общего случая. Полагая

$$\frac{3s_x}{2\sigma_s} = s_{11}, \ldots, \qquad \frac{\tau_{xy}}{\tau_s} = s_{12}, \ldots, \qquad \frac{\varepsilon_x}{\varepsilon_s} = \varepsilon_{11}, \ldots, \qquad \frac{\gamma_{xy}}{\gamma_s} = \varepsilon_{12}, \ldots$$

перепишем уравнения теории пластического течения в виде ($i, j = 1, 2, 3$)

$$ds_{ij} = d\varepsilon_{ij} - \Lambda s_{ij} \tag{5.1}$$

где

$$\Lambda = \frac{2}{3} s_{11}\, ds_{11} + \ldots + s_{12}\, d\varepsilon_{12} > 0 \tag{5.2}$$

Соответствующим образом перепишется и условие пластичности (2.2).

Пусть компоненты деформации $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}(t)$, тогда $d\varepsilon_{ij} = \dot{\varepsilon}_{ij}\, dt \equiv \xi_{ij}\, dt$ и из (5.1) получаем

$$\frac{ds_{ij}}{dt} = \xi_{ij} - \dot{\Lambda}\, s_{ij} \tag{5.3}$$

где «мощность» пластической деформации $\dot{\Lambda} > 0$.

Рассмотрим «установившееся» пластическое течение; пусть с возрастанием t функции ξ_{ij} стремятся к постоянным значениям ξ_{ij}°. Полагая в (5.3) равными нулю производные в левой части и заменяя ξ_{ij} их предельными значениями ξ_{ij}°, получаем систему квадратных уравнений относительно $s_{ij} \equiv s_{ij}^\circ$

$$\xi_{ij}^\circ - \dot{\Lambda}_0 s_{ij}^\circ = 0, \qquad \dot{\Lambda}_0 = \frac{2}{3} s_{11}^\circ \xi_{11}^\circ + \ldots > 0 \tag{5.4}$$

Решение этой системы, удовлетворяющее условию $\dot{\Lambda}_0 > 0$, будет

$$s_{ij}^\circ = K\xi_{ij}^\circ, \qquad K^{-1} = +\sqrt{\frac{2}{3}\xi_{11}^{\circ 2} + \ldots + \xi_{12}^{\circ 2} + \ldots} \tag{5.5}$$

Возвращаясь к общему случаю, положим $s_{ij} - s_{ij}^\circ = w_{ij}$ и вычтем (5.4) из (5.3); тогда

$$\frac{dw_{ij}}{dt} = -\dot{\Lambda}'' w_{ij} + [(\dot{\Lambda}_0 - \dot{\Lambda}'') s_{ij}^\circ - \dot{\Lambda}' (s_{ij}^\circ + w_{ij}) + (\xi_{ij} - \xi_{ij}^\circ)]$$

причем

$$\dot{\Lambda}' = \frac{2}{3} w_{11} \xi_{11} + \ldots, \qquad \dot{\Lambda}'' = \frac{2}{3} s_{11}^\circ \xi_{11} + \ldots$$

Начиная, по крайней мере, с некоторых значений ξ_{jj} $\dot{\Lambda}'' > 0$; при $w_{ij} = 0$ выражение внутри квадратных скобок стремится к нулю. Хотя мы не располагаем обобщением теоремы Асколи на случай системы дифференциальных уравнений рассмотренного типа и потому нельзя сформулировать все необходимые условия, тем не менее интуитивно представляется бесспорным, что $s_{ij} \to s_{ij}^\circ$.

Обратимся теперь к уравнениям теории пластических деформаций (2.1); в новых обозначениях имеем

$$s_{ij} = \frac{\varepsilon_{ij}}{\Gamma_*}, \qquad \Gamma_* = \sqrt{\frac{2}{3}\varepsilon_{11}^2 + \ldots + \varepsilon_{12}^2 + \ldots}$$

Пусть $\xi_{ij} = \alpha_{ij}(t) + \xi_{ij}^\circ t$, где $\alpha_{ij}(t)$, стремятся к нулю или к некоторым постоянным, но тогда

$$\frac{\varepsilon_{ij}}{\Gamma_*} \to \frac{\xi_{ij}^\circ}{K} \qquad \text{при } t \to \infty$$

Следовательно, и в этом случае $s_{ij} \to s_{ij}^\circ$.

Приведенный анализ относится к случаю малой деформации и поэтому нельзя, конечно, неограниченно продолжать путь деформации. Однако все же можно говорить о пластических деформациях, в несколько десятков раз превосходящих максимальные упругие деформации. Это позволяет заключить, что если, начиная с некоторого момента, деформации развиваются в определенном направлении, то напряженные состояния, подсчитываемые по обеим теориям пластичности, сближаются.

Поступила 24 XI 1954

ЛИТЕРАТУРА

1. Качанов Л. М. Механика пластических сред. Гостехиздат. 1948.
2. Ильюшин А. А. Пластичность. Гостехиздат, 1948.
3. Winzer, Prager. On the Use of Power Laws in Stress Analysis beyond the Elastic Range. Journ. Appl. Mech. Vol. 14, № 4, 1947.
4. Гвоздев А. А. Расчет несущей способности конструкций по методу предельного равновесия. Стройиздат, 1949.
5. Ascoli G. Sul comportamento asintotico e sulla valutazione approssimata degli integrali delle equazioni differenziali del primo ordine. Scritti matematici offerti a Luigi Berzolari. Pavia. 1936.

См. также Jahrbuch über d. Fortschritte d. Math. Bd. 62 II. Стр. 1260. Berlin.