Прикладная математика и механика. Том XIX, 1955
Институт механики Академии наук Союза ССР

ОБ УСЛОВИЯХ НА ПОВЕРХНОСТЯХ СИЛЬНЫХ РАЗРЫВОВ ДЛЯ УПРУГИХ И ПЛАСТИЧЕСКИХ ТЕЛ

Г. Я. Галин

При постановке динамических задач теории упругости, пластичности и механики грунтов для схематизации таких явлений, как, например, ударные волны, «упаковка» грунта, вводят поверхности, на которых характеристики движения терпят разрыв. Так как эти явления должны подчиняться общим физическим законам, то значения характеристик по разным сторонам поверхности разрыва не могут быть независимыми.

В настоящей статье формулируется условие на скачке, вытекающее из законов термодинамики, для сред, деформация которых вне поверхности разрыва может рассматриваться как равновесный обратимый (упругие тела) или равновесный необратимый по Дюгему (пластические тела) термодинамический процесс.

Это условие для движений упругих сред плоскими волнами получено Х. А. Рахматулиным [1].

1. Рассмотрим материальную частицу. Пусть в результате процесса, схематизируемого поверхностью разрыва, частица переходит из состояния *1* в состояние *2* (величины, относящиеся к этим состояниям, условимся обозначать индексами 1 и 2). Из закона сохранения массы и закона сохранения импульса следует, что плотность ρ, скорость $\mathbf{V}$, вектор напряжения σ_n должны удовлетворять условиям [2]

$$\rho_1 W_1 = \rho_2 W_2 \tag{1}$$

$$\rho_1 \mathbf{V}_1 W_1 + \sigma_{n1} = \rho_2 \mathbf{V}_2 W_2 + \sigma_{n2} \tag{2}$$

Здесь W — скорость распространения поверхности разрыва по частицам.

Явления, протекающие в скачках, сопровождаются обычно переходом энергии из одной формы в другую. Поэтому необходимо учесть также требования, которые накладывают на характеристики движения законы термодинамики, управляющие этими превращениями.

Из закона сохранения энергии на скачке следует, что [2]

$$\rho_1 W_1 \left[\frac{1}{2} V_2^2 - \frac{1}{2} V_1^2\right] + (\sigma_n \mathbf{V})_2 - (\sigma_n \mathbf{V})_1 + \rho_1 W_1 [U_2 - U_1] = 0 \tag{3}$$

где U — внутренняя энергия единицы массы.

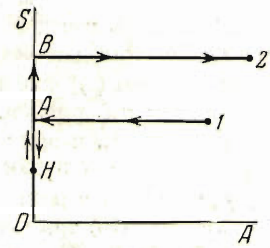
Процесс $1 \to 2$, вообще говоря, необратимый. Чтобы подсчитать приращение внутренней энергии, сопоставим рассматриваемому переходу обратимый процесс, переводящий частицу из состояния *1* в состояние *2*. Тогда согласно определению

$$dU = TdS - dA \tag{4}$$

где S — энтропия единицы массы, T — абсолютная температура, dA — отнесенная к единице массы работа внутренних сил, соответствующая обратимому переходу. Последняя определяется формулой

$$dA = -\frac{1}{\rho_0} (\sigma_{11}^* d\varepsilon_{11} + \sigma_{22}^* d\varepsilon_{22} + \sigma_{33}^* d\varepsilon_{33} + \sigma_{12}^* d\varepsilon_{12} + \sigma_{13}^* d\varepsilon_{13} + \sigma_{23}^* d\varepsilon_{23}) \tag{5}$$

где ρ_0 — начальная плотность, ε_{ij} — компоненты конечной деформации, σ_{ij}^* — компоненты симметричного тензора, характеризующего напряжения на площадках, которые до деформации были перпендикулярны ортам касательных к координатным линиям. Обозначим через τ_i условное напряжение на этих площадках, через τ_{ij} —проекцию напряжения τ_i на направление линейного элемента, совпадавшего до деформации с ортом $\mathbf{j}$, через $E(j)$ относительное удлинение этого элемента.



Фиг. 1

Между σ_{ij}^* и τ_{ij} существует следующее соотношение:

$$\sigma_{ij}^* = \frac{\tau_{ij}}{1 + E^j}$$

Отметим, что $dA = -d\Phi$; $d\Phi$ — работа внешних сил, затраченная на деформацию частицы.

Для упругих сред $d\Phi$ совпадает с приращением потенциальной энергии деформации.

Выберем в качестве обратимого пути в плоскости (S, A) путь, указанный на фиг. 1 стрелками. Точка H соответствует состоянию до деформации. Тогда

$$U_2 - U_1 = \int\limits_{AB} T dS + \frac{1}{\rho_0} \int\limits_{H\to 2} \left[\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{3} (\sigma_{ii}^* d\varepsilon_{ii} + \sigma_{ij}^* d\varepsilon_{ij})\right] - \\ - \frac{1}{\rho_0} \int\limits_{H\to 1} \left[\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{3} (\sigma_{ii}^* d\varepsilon_{ii} + \sigma_{ij}^* d\varepsilon_{ij})\right] \qquad (6)$$

Принимая во внимание, что $\int\limits_{AB} T dS \geqslant 0$, из (3) и (6) получаем

$$(\sigma_n \mathrm{V})_2 - (\sigma_n \mathrm{V})_1 + \rho_1 W_1 \left[\frac{1}{2} V_2^2 - \frac{1}{2} V_1^2 + \Phi_2 - \Phi_1\right] \leqslant 0 \qquad (7)$$

где

$$\Phi_2 - \Phi_1 = \frac{1}{\rho_0} \int\limits_{H\to 2} \left[\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{3} (\sigma_{ii}^* d\varepsilon_{ii} + \sigma_{ij}^* d\varepsilon_{ij})\right] - \frac{1}{\rho_0} \int\limits_{H\to 1} \left[\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{3} (\sigma_{ii}^* d\varepsilon_{ii} + \sigma_{ij}^* d\varepsilon_{ij})\right]$$

Неравенство (7) при помощи (1) и (2) можно преобразовать к виду

$$\frac{(\sigma_n)_1 + (\sigma_n)_2}{2} [\mathrm{V}_2 - \mathrm{V}_1] + \rho_1 W_1 [\Phi_2 - \Phi_1] \leqslant 0 \qquad (8)$$

Физический смысл условия (8) состоит в том, что сумма приращения кинетической энергии и работы, затраченной на деформацию, должна быть не больше, чем работа внешних сил.

Условия (1), (2) и (8) представляют совокупность требований, которым должны удовлетворять на скачках разрывные решения.

2. Для движений с центральной ($\nu = 3$) или осевой ($\nu = 2$) симметрией и для плоских одномерных движений ($\nu = 1$) условие (8) значительно упрощается:

$$\frac{W_1}{(1+E_1^{(1)})_1} \left\{ \int\limits_{E_1^{(1)}}^{E_2^{(1)}} \sigma^{(1)} dE^{(1)} + \frac{1}{(1 + E^{(2)})^{\nu-1}} \int\limits_{0}^{E^{(2)}} \left[\sigma_2^{(2)} (1 + E_2^{(1)}) - \right.\right. \\ \left.\left. - \sigma_1^{(2)} (1 + E_1^{(1)})\right] d (1 + E^{(2)})^{\nu-1} - \frac{\sigma_1^{(1)} + \sigma_2^{(1)}}{2} \left[E_2^{(1)} - E_1^{(1)}\right] \right\} \leqslant 0 \qquad (9)$$

где $\sigma^{(1)}$ — напряжение на площадке, перпендикулярной радиусу.

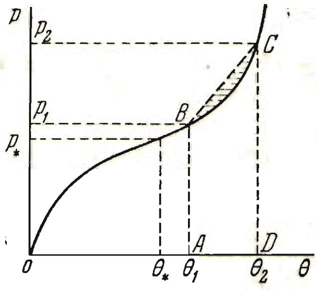
Если, кроме того, среда идеальная, т. е. $\sigma^{(1)} = \sigma^{(2)} = -p$, то будем иметь

$$\frac{W_1}{(\rho_0/\rho)_1} \left\{ \int\limits_{\theta_1}^{\theta_2} p d\theta - \frac{p_2 + p_1}{2} (\theta_2 - \theta_1) \right\} \leqslant 0 \qquad \left(\theta = 1 - \frac{\rho_0}{\rho} \right) \tag{10}$$

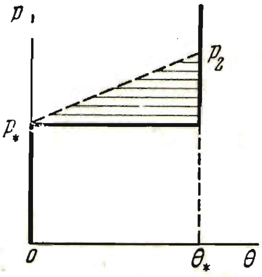
Множитель перед фигурной скобкой в (9) и (10) всегда положителен. Поэтому при одномерных движениях можно судить о возможности [в смысле непротиворечивости условию (8)] сильных разрывов, имея в распоряжении лишь связь напряжения — компоненты деформации.

Рассмотрим, например, идеальную среду, для которой зависимость $p = p(\theta)$ в случае сжатия ($d\theta > 0$) имеет вид, показанный на фиг. 2. Критическая точка (θ_*, p_*) — точка перегиба.

Условие (10) требует, чтобы площадь фигуры, ограниченной кривой $p(\theta)$ и прямыми $\theta = \theta_1$, $\theta = \theta_2$ и $p = 0$, была меньше, чем площадь трапеции $ABCD$ (фиг. 2). Таким образом, если $p_2 > p_1 \geqslant p_*$, то скачок возможен. Заштрихованная площадь с точностью до множителя равна потерям механической энергии. Если же $p_1 < p_2 \leqslant p_*$, разрыв невозможен. Когда $p_2 > p_* > p_1$, возможность скачка будет определяться величиной и характером изменения p_1 и p_2. Аналогичные рассуждения можно провести и для разгрузки, учитывая, что тогда $d\theta \leqslant 0$, $\theta_2 \leqslant \theta_1$.



Фиг. 2



Фиг. 3

Возможность сильных разрывов при плоских одномерных движениях упругих сред изучена Х. А. Рахматулиным [1]. Исследование этого вопроса опирается на энергетические соображения, сформулированные Х. А. Рахматулиным в виде требования (9) для плоских волн.

Часто для облегчения математического решения задачи зависимость напряжения — характеристики деформации упрощают. Заметим, что в этих случаях также необходимо принимать во внимание условие (8). Чтобы пояснить это, остановимся на задаче, рассмотренной А. Ю. Ишлинским, Н. В. Зволинским и И. З. Степаненко [3]. В этой работе грунт рассматривается как идеальная среда с диаграммой сжатия $p = p(\theta)$, изображенной на фиг. 3. Картина движения принимается следующей. По покоящейся среде распространяется сильный разрыв, в котором происходит «упаковка» грунта. Давление p_2 с течением времени падает. Давление p_1 перед скачком полагается постоянным и равным p_*. Условие (10) выполняется. В случае же $p_1 < p_*$ скачок, соответствующий «упаковке», был бы физически невозможен.

Автор благодарен Л. И. Седову за оказанное внимание и ценные указания.

Поступила 9 III 1955

ЛИТЕРАТУРА

1. Рахматулин Х. А. О распространении плоских волн в упругой среде при нелинейной зависимости напряжения от деформации. Ученые записки МГУ, вып. 152, 1951.
2. Седов Л. И. Плоские задачи гидродинамики и аэродинамики. ГИТТЛ, 1950.
3. Ишлинский А. Ю., Зволинский Н. Б. и Степаненко И. З. К динамике грунтовых масс. ДАН СССР, т. XCV, № 4, 1954.