Прикладная математика и механика. Том XIX, 1955
Институт механики Академии наук Союза ССР

К ЛИНЕАРИЗИРОВАННОЙ ТЕОРИИ ОБТЕКАНИЯ ТЕЛ ВРАЩЕНИЯ СВЕРХЗВУКОВЫМ ПОТОКОМ ГАЗА

И. М. Юрьев

(Москва)

В рассматриваемой работе предлагается приближенное в конечном виде решение линеаризированного уравнения осесимметрического сверхзвукового течения газа.

Предлагаемый способ решения пригоден для расчета тел вращения с протоком и частей тел вращения на участках контура, не выходящих на ось симметрии.

§ 1. Некоторые замечания относительно метода аппроксимаций. Рассмотрим уравнение типа

$$\frac{\partial^2 z}{\partial\xi\partial\eta} + a\left(\frac{\partial z}{\partial\xi} + \frac{\partial z}{\partial\eta}\right) = 0 \qquad (1.1)$$

где a является функцией от $(\xi + \eta)$. С целью определения функций $a(\xi + \eta)$, при которых уравнение (1.1) интегрируется в конечном виде и решаются различные краевые задачи, применим к этому уравнению метод Лапласа[1]. Если перейти к новой искомой функции z_1 по формуле

$$\frac{\partial z}{\partial\eta} + az = z_1 \qquad (1.2)$$

или, что для уравнения (1.1) то же самое, по формуле

$$Hz = az_1 + \frac{\partial z_1}{\partial\xi} \qquad \left(H = \frac{da}{d\sigma} + a^2,\ \sigma = \xi + \eta\right) \qquad (1.3)$$

то получим следующее уравнение:

$$\frac{\partial^2 z_1}{\partial\xi\partial\eta} + a_1\frac{\partial z_1}{\partial\xi} + b_1\frac{\partial z_1}{\partial\eta} + c_1 z_1 = 0 \qquad (1.4)$$

где

$$a_1 = a - \frac{d\ln H}{d\sigma}, \qquad b_1 = a, \qquad c_1 = -a\frac{d\ln H}{d\sigma} \qquad (1.5)$$

Потребуем теперь, чтобы инвариант последнего уравнения $H_1 = da_1/d\sigma + a_1 b_1 - c_1$ был равен нулю, т. е.

$$\frac{d^2\ln H}{d\sigma^2} - H = 0 \qquad (1.6)$$

Общим решением уравнения (1.6) будет

$$H = -\frac{B^2}{1 + \operatorname{ch}[B(\sigma + C)]}, \qquad \text{или} \qquad H = \frac{B^2}{1 \pm \cos[B(\sigma + C)]} \qquad (1.7)$$

где B и C — произвольные постоянные интегрирования.

Определение функции $a(\sigma)$ сводится, таким образом, к решению уравнения Рикатти

$$\frac{da}{d\sigma} + a^2 = -\frac{B^2}{1 + \operatorname{ch}[B(\sigma + C)]} \qquad (1.8)$$

В частности, из (1.6) и (1.4) можно получить

$$H = \frac{2}{\sigma^2}, \qquad a = \frac{2}{\sigma} \quad \text{или} \quad a = -\frac{1}{\sigma}$$

Функция

$$k = \frac{B}{\operatorname{sh}\left[B(\sigma + C)\right]}$$

является частным решением уравнения (1.8). По формуле

$$a(\sigma) = k + \frac{J(\sigma)}{C_3 + \int J(\sigma)\, d\sigma} \qquad \left(J(\sigma) = \exp\left[-2\int k d\sigma\right]\right) \tag{1.9}$$

вычисляем общее решение, которое уже будет зависеть от трех произвольных постоянных. При выполнении условия (1.6) общий интеграл уравнения (5) равен

$$z_1 = \exp\left(-\int a_1 d\sigma\right)\left[\Phi_1(\xi) + \int \frac{\Phi_2(\eta)}{H(\sigma)} d\eta\right] \tag{1.10}$$

где $\Phi_1(\xi)$ и $\Phi_2(\eta)$ — произвольные функции своих переменных.

Вспоминая зависимость (1.3), вычислим общий интеграл уравнения (1.1):

$$\exp\left(\int a d\sigma\right) z = \frac{d\ln H}{d\sigma}\Phi_1(\xi) + \Phi_1'(\xi) + \frac{d\ln H}{d\sigma}\int\frac{\Phi_2(\eta)}{H(\sigma)}d\eta - \int\frac{H'(\sigma)}{H^2(\sigma)}\Phi_2(\eta)\,d\eta \tag{1.11}$$

Поскольку уравнение (1.1) имеет симметричный вид относительно ξ и η, то и его общее решение (1.11) можно привести к симметричному виду.

Нетрудно при выполнении условия (1,6) проверить, что при переходе от функции $\Phi_2(\eta)$ к функции $\Phi(\eta)$ по формуле

$$\Phi_2(\eta) = \Phi'''(\eta) - B^2\Phi'(\eta) \tag{1.12}$$

получим

$$\frac{d\ln H}{d\sigma}\int\frac{\Phi_2(\eta)}{H(\sigma)}d\eta - \int\frac{H'(\sigma)}{H^2(\sigma)}\Phi_2(\eta)\,d\eta = \frac{d\ln H}{d\sigma}\Phi(\eta) + \Phi'(\eta) \tag{1.13}$$

Представленное в несимметричном виде общее решение уравнения (1.1) удобно для решения различных краевых задач. Нетрудно, например, решить при помощи уравнений (1.2) и (1.10) задачу Коши. Сразу выписывается решение задачи Гурса. От уравнения (1.5) можно перейти к новому уравнению относительно функции z_2 при помощи формулы

$$\frac{\partial z_1}{\partial\eta} + a_1 z_1 = z_2 \tag{1.14}$$

или, что для уравнения (1.5) то же самое, по формуле

$$H_1 z_1 = \frac{\partial z_2}{\partial\xi} + b_1 z_2 \tag{1.15}$$

Коэффициенты полученного нового уравнения

$$\frac{\partial^2 z_2}{\partial\xi\partial\eta} + a_2\frac{\partial z_2}{\partial\xi} + b_2\frac{\partial z_2}{\partial\eta} + c_2 z_2 = 0 \tag{1.16}$$

выражаются через коэффициенты уравнения (1.5) так:

$$a_2 = a_1 - \frac{d\ln H_1}{d\sigma}, \qquad b_2 = b_1, \qquad c_2 = c_1 - \frac{da_1}{d\sigma} + \frac{db_1}{d\sigma} - b_1\frac{d\ln H_1}{d\sigma} \tag{1.17}$$

Если потребовать, чтобы инвариант последнего уравнения был равен нулю, т. е.

$$H_2 = \frac{da_2}{d\sigma} + a_2 b_2 - c_2 = 0 \tag{1.18}$$

то общее решение для $a(\sigma)$ будет зависеть уже от пяти произвольных постоянных и т. д. Общее решение уравнения (1.1) при этом нетрудно выписать, если использовать зависимости (1.15) и (1.3). Здесь также решаются в конечном виде задачи Гурса, Коши и т. д.

Если коэффициент уравнения (1.1) недостаточно точно аппроксимируется функцией (1.9), то можно использовать функцию, получающуюся из уравнения (1.18), и т. д. Различные аппроксимации уравнений Чаплыгина для плоского течения газа получаются как простейшие решения при применении метода Лапласа. Так, например, из условия равенства нулю инварианта уравенения (1.1), т. е. из уравнения

$$\frac{da}{d\sigma} + a^2 = 0$$

получаем аппроксимацию С. А. Христиановича

$$\frac{1}{2}\frac{d\ln\sqrt{K}}{d\sigma} = a = \frac{1}{\sigma + C}$$

где C — произвольная постоянная интегрирования, $\sqrt{K}$ — коэффициент системы уравнений Чаплыгина в каноническом виде при сверхзвуковом течении газа[2]. Частное решение уравнения (1.8)

$$a = k = \frac{B}{\operatorname{sh}[B(\sigma + C)]} \tag{1.19}$$

совпадает с аппроксимацией уравнений Чаплыгина, полученной при помощи применения обобщения преобразования Лежандра. Такой аппроксимацией для некоторых плоских течений газа пользовался Г. А. Домбровский (см., например, Л. И. Седов [3]).

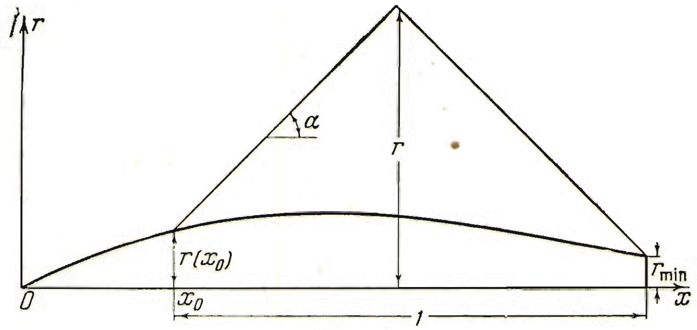
§ 2. Решение в конечном виде задачи обтекания. Потенциал скорости линеаризированного пространственного сверхзвукового течения газа в цилиндрической системе координат x, r, ω имеет следующий вид:

$$\beta^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2} - \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\omega^2} - \frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial r} = 0 \qquad \left(\beta = \sqrt{M_\infty^2 - 1}\right) \tag{2.1}$$

В случае тела вращения потенциал скорости φ можно представить в виде

$$\varphi(x, r, \omega) = \varphi_0 + \varphi_1(x, r) + \varphi_2(x, r, \omega) \tag{2.2}$$

где $\varphi_0 = w_\infty(x + \vartheta r\cos\omega)$ является потенциалом невозмущенного параллельного



Фиг. 1

потока, ϑ — угол атаки, $\varphi_1(x, r)$ — добавочный потенциал осесимметричного течения, а

$$\varphi_2 = \chi(x, r)\cos\omega$$

второй добавочный потенциал, учитывающий отклонение от осесимметричного течения. Функция $\varphi_1(x, r)$ и $\chi(x, r)$ удовлетворяют уравнениям

$$\beta^2\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial x^2} - \frac{\partial^2\varphi_1}{\partial r^2} - \frac{1}{r}\frac{\partial\varphi_1}{\partial r} = 0 \tag{2.3}$$

$$\beta^2\frac{\partial^2\chi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2\chi}{\partial r^2} - \frac{1}{r}\frac{\partial\chi}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\chi = 0 \tag{2.4}$$

В новых независимых переменных ξ, η, связанных с x, r формулами

$$2\xi = -x + \beta r, \qquad 2\eta = x + \beta r \tag{2.5}$$

уравнение (2.3) имеет следующий вид:

$$\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{1}{2(\xi + \eta)}\left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial \xi} + \frac{\partial \varphi_1}{\partial \eta}\right) = 0 \tag{2.6}$$

В порядке аппроксимации заменим коэффициент уравнения (2.6) функцией (1.19). Тем самым ограничиваем себя телами вращения с протоком или частями тел вращения на участках контура, не выходящих на ось симметрии. Минимальное значение $r_{\min}$ достигается на одном из концов рассматриваемой части тела вращения

βr	0.05	0.07	0.1	0.15	0.20
r^* при $\beta r_0 = 0.2$	—	—	0.147	0.177	0.209
r^* при $\beta r_0 = 0.1$	0.08	0.092	0.109	0.140	0.173
βr	0.30	0.40	0.50	0.60	0.70
r^* при $\beta r_0 = 0.2$	0,281	0.365	0.465	0.586	0.733
r^* при $\beta r_0 = 0.1$	0.253	0.353	0.483	0.654	—

если производная $r'(x)$ на теле является монотонной функцией x. Если принять длину рассматриваемой части тела за единицу, то βr будет изменяться от $\beta r_{\min}$ до $^1/_2\,[r_{\min} + r(x_0)]\,\beta + 0.5$, где $r(x_0)$ принадлежит другому концу тела (фиг. 1). Постоянные B и C определим из условий

$$\operatorname{ch}[B(\beta r_0 + C + 0.25)] = 2, \qquad \frac{\beta r_0}{0.5 + \beta r_0} = \frac{\operatorname{sh}[B(\beta r_0 + C)]}{\operatorname{sh}[B(\beta r_0 + C + 0.25)]} \tag{2.7}$$

где

$$r_0 = \frac{r_{\min} + r(x_0)}{2}$$

Имеем

$$B = 2\ln\frac{\beta r_0 + (0.5 + \beta r_0)(2 + \sqrt{3})^2}{\beta r_0 + 0.5 + \beta r_0 (2 + \sqrt{3})^2}, \qquad C = \frac{\ln(2 + \sqrt{3})}{B} - \beta r_0 - 0.25$$

Выше в таблице даются значения функции

$$r^* = \frac{\operatorname{sh}[B(\beta r + C)]}{2B} \qquad \text{при } \beta r_0 = 0.2, \quad \beta r_0 = 0.1$$

Чем больше $r_{\min}$, тем точнее будет предлагаемая аппроксимация. Общее решение для добавочного потенциала скорости φ_1 имеет вид:

$$\varphi_1 = -B\Phi_1(\xi) + \operatorname{cth}\left[\frac{B}{2}(\xi + \eta + C)\right]\Phi_1'(\xi) + \frac{1}{B}\int\left\{1 + \operatorname{ch}[B(\xi + \eta + C)]\right\}\Phi_2(\eta)\,d\eta -$$

$$-\frac{1}{B}\operatorname{cth}\left[\frac{B}{2}(\xi + \eta + C)\right]\int \operatorname{sh}[B(\xi + \eta + C)]\,\Phi_2(\eta)\,d\eta \tag{2.8}$$

Функция $\Phi_1(\xi)$ и $\Phi_2(\eta)$ определим из условия $\varphi_1 = \varphi_*(\eta)$ на начальной характеристике $\xi = \xi_0$ и условия $w_\infty r'(x) = \varphi_{1r}$ на теле вращения. Согласно формулам (1.2) и (1.10)

$$\Phi_1(\xi) - \frac{1}{B^2}\int\{1 + \operatorname{ch}[B(\xi + \eta + C)]\}\,\Phi_2(\eta)\,d\eta =$$

$$= -\frac{\operatorname{sh}[B(\xi + \eta + C)]}{B}\frac{\partial \varphi_1}{\partial \eta} - \frac{1}{B}\varphi_1(\xi, \eta) \tag{2.10}$$

Дифференцируя уравнение (2.10), получим

$$\Phi_2(\eta) = \operatorname{th}\left[\frac{B}{2}(\xi_0 + \eta + C)\right]\frac{d^2\varphi_*(\eta)}{d\eta^2} + B\,\frac{d\varphi_*(\eta)}{d\eta} \tag{2.11}$$

Из граничного условия на теле вращения получим следующее уравнение:

$$\frac{d\Phi_*(\xi)}{d\xi} - B\,\mathrm{cth}\left[\frac{B}{2}(\xi+\eta(\xi)+C)\right]\Phi_*(\xi) = -\frac{\mathrm{sh}\,[B(\xi+\eta(\xi)+C)]}{B}\,\eta'(\xi)\,\Phi_2(\eta(\xi)) +$$
$$+\frac{2w_\infty}{\beta^2}\,\frac{\eta'(\xi)+1}{\eta'(\xi)-1}\,\mathrm{th}\left[\frac{B}{2}(\xi+\eta(\xi)+C)\right] \qquad (2.12)$$

где $\eta=\eta(\xi)$ — уравнение контура тела вращения в новых переменных.

Функция $\Phi_*(\xi)$ связана с функциями $\Phi_1(\xi)$ и $\Phi_2(\eta)$ формулами

$$\Phi_*(\xi) = \Phi(\xi, \eta(\xi)) \qquad \Phi(\xi,\eta) = \frac{d\Phi_1(\xi)}{d\xi} - \int \frac{\mathrm{sh}\,[B(\xi+\eta+C)]}{B}\,\Phi_2(\eta)\,d\eta \qquad (2.13)$$

При помощи формул (2.8) и (2.12) вычисляем составляющую скорости возмущения u' на теле вращения:

$$u' = \frac{\partial\varphi_1}{\partial x} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial\eta} - \frac{\partial\varphi_1}{\partial\xi}\right) = -\frac{w_\infty}{\beta^2}\,\frac{\eta'(\xi)+1}{\eta'(\xi)-1} - \frac{B\Phi_*(\xi)}{2\mathrm{sh}^2\,[{}^1\!/_2 B(\xi+\eta(\xi)+C)]} \qquad (2.14)$$

Возвращаясь к переменным (x, r), вместо уравнений (2.12) и (2.14) получим:

$$\frac{d\Phi^*(x)}{dx} + \frac{B(1-\beta r'(x))\,\mathrm{cth}\,[{}^1\!/_2(B(\beta r(x)+C)]}{2}\,\Phi^*(x) =$$
$$= -\frac{\mathrm{sh}\,[B(\beta r(x)+C)]\,(1+\beta r'(x))}{2B}\,\Phi_2\left(\frac{x+\beta r(x)}{2}\right) + \frac{w_\infty(\beta r'(x)-1)\,r'(x)}{\beta\,\mathrm{cth}\,[{}^1\!/_2 B(\beta r(x)+C)]} \qquad (2.15)$$

$$u' = -\frac{w_\infty}{\beta}\,r'(x) - \frac{B\Phi^*(x)}{2\,\mathrm{sh}^2\,[{}^1\!/_2 B(\beta r(x)+C)]}, \qquad \Phi^*(x) = \Phi_*\left(\frac{-x+\beta r(x)}{2}\right) \qquad (2.16)$$

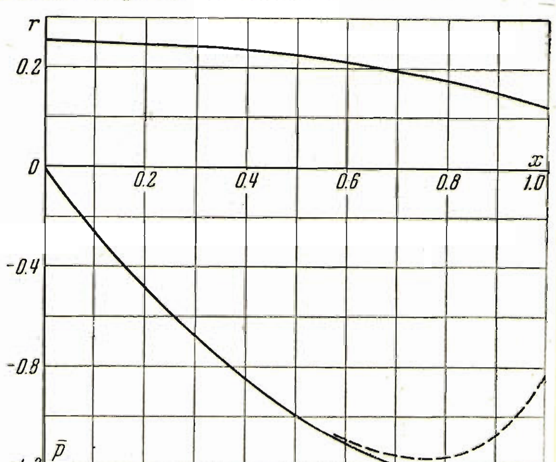
Таким образом, расчет распределения скорости на заданной части тела вращения сводится к решению обыкновенного линейного дифференциального уравнения первого порядка. Для тела с протоком $\Phi_2(\eta)=0$. Коэффициент давления в линеаризированной постановке задачи вычисляется по формуле

$$\bar{p} = -\frac{2u'}{w_\infty} \qquad (2.17)$$

На фиг. 2 сплошной кривой дано распределение давления на тело вращения

$$r = 0.25 - 0.125x^2 \qquad (0 \leqslant x \leqslant 1)$$

вычисленное при помощи метода характеристик, а пунктиром — давление по формулам (2.16) и (2.17) при $M_\infty = 2$.



Фиг. 2

Существенной погрешности за счет аппроксимации для взятого нами тела вращения не было обнаружено. Аналогичный способ можно применить к уравнению (2.4).

Поступила 23 VIII 1954

ЛИТЕРАТУРА

1. Гурса. Курс математического анализа, ч. 1, т. III.
2. Христианович С. А. Приближенное интегрирование уравнений сверхзвукового течения газа. ПММ, XI, вып. 2, 1947.
3. Седов Л. И. Плоские задачи гидродинамики и аэродинамики, гл. IX, § 3, 1950. Гостехиздат.