

О ВЕЛИЧИНЕ МЕСТНОЙ СВЕРХЗВУКОВОЙ ЗОНЫ ПРИ ОБТЕКАНИИ КЛИНА
ПОТОКОМ СЖИМАЕМОГО ГАЗА

С. К. Асланов

(Саратов)

При обтекании клиновидного профиля потоком сжимаемого газа около точки *A* (фиг. 1) появляется местная сверхзвуковая зона, размеры которой неограниченно растут с увеличением скорости набегающего потока до критической. В настоящей заметке на основе приближенного решения, полученного Коулом^[7] для случая околосвукового обтекания тупого клина, проводится анализ поведения величины местной сверхзвуковой зоны в зависимости от угла раствора клина и скорости потока.

§ 1. Распределение скоростей на звуковой линии. Исследуя в приближенной постановке задачу обтекания симметрично расположенного острого клина единичной длины околосвуковым потоком газа, Коул^[7] нашел следующее решение:

$$y(z, v) = \left(\frac{2}{3} z z_1\right)^{1/2} v_0 \int_0^\infty \frac{\text{sh } \lambda (v_0 - v)}{\text{sh } \lambda v_0} J_{-1/2}(\lambda z) J_{-1/2}(\lambda z_1) \lambda d\lambda$$

$$x(z, v) = 1 - z_1^{1/2} z^{1/2} v_0 \int_0^\infty \frac{\text{ch } \lambda (v_0 - v)}{\text{sh } \lambda v_0} J_{3/2}(\lambda z) J_{-1/2}(\lambda z_1) \lambda d\lambda \tag{1.1}$$

где

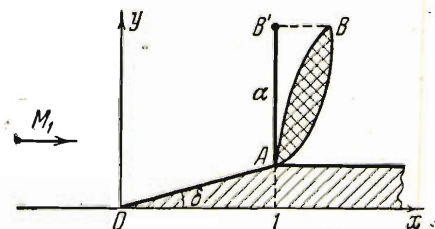
$$z = \frac{2}{3} \left[\frac{\kappa + 1}{a_*} (a_* - U) \right]^{3/2}, \quad v = \frac{\kappa + 1}{a_*} V, \quad z_1 = \frac{2}{3} \left[\frac{\kappa + 1}{a_*} (a_* - U_1) \right]^{3/2}$$

и $J_\nu(\xi)$ — бесселева функция порядка ν .

Здесь U, V — составляющие скорости по осям x, y соответственно (фиг. 1), причем $U = U_1, V = 0$ представляет набегающий поток в бесконечности, a_* — критическая скорость звука, κ — показатель адиабаты, v_0 — скорость v на щеке клина (OA), которая в рамках данного приближения выражается через полуугол клина δ ; так:

$$v_0 = (\kappa + 1) \delta.$$

Приведенное решение уравнений околосвукового движения газа имеет дипольную особенность, которая представляет набегающий поток при $z = z_1, v = 0$. Оно удовлетворяет условию симметрии течения, условию обтекания щеки клина и обеспечивает



Фиг. 1

точку покоя на его острие и достижение звуковой скорости в точке A (фиг. 1). Однако решение Коула не удовлетворяет точным граничным условиям задачи. В частности, остается неудовлетворенным условие поворота потока около точки A , которое может быть заменено эквивалентным соотношением на линии перехода^[7]. Другими словами, Коул пренебрегает влиянием сверхзвуковой зоны, имеющей около точки A . Несмотря на это вычисленное из формул (1.1) распределение скоростей и давлений по поверхности клина хорошо совпадает с экспериментальными данными^[6]. Это подтвер-

ждает правильность высказанного Коулом предположения, что (1.1) представляет главный член решения точной краевой задачи.

Для дальнейшего выяснения эффективности метода Коула интересно будет рассмотреть, как ведет себя решение (1.1) на той части границы (в плоскости zv), где краевое условие остается не выполненным, т. е. на звуковой линии ($z = 0$). Причем, как видно из (1.1), этой линией на физической плоскости является $x = 1$ (вертикаль, исходящая из точки A).

Чтобы найти распределение поперечных скоростей возмущения v вдоль линии перехода $z = 0$, внесем в (1.1) выражение $J_{-1/2}(\lambda z)$ в виде ряда [2]

$$J_{-1/2}(\lambda z) = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{(1/2 \lambda z)^{2m-1/2}}{m! \Gamma(m + 3/2)}$$

где Γ — гамма-функция. Тогда переход к пределу при $z \rightarrow 0$ дает

$$y(0v) = y_s(v) = \frac{2^{1/2} z_1^{1/2} v_0}{3^{1/2} \Gamma(3/2)} \int_0^{\infty} \frac{\text{sh } \lambda (v_0 - v)}{\text{sh } \lambda v_0} J_{-1/2}(\lambda z_1) \lambda^{3/2} d\lambda \quad (1.2)$$

Вводя разложение

$$\frac{\text{sh } \lambda (v_0 - v)}{\text{sh } \lambda v_0} = \sum_{m=0}^{\infty} e^{-mt} \{e^{-ht} - e^{-(1-h)t}\}$$

где $t = 2v_0 \lambda$ и $h = v/2v_0$, легко получить

$$y_s(v) = \frac{z_1^{1/2}}{2 \cdot 3^{1/2} v_0^{2/2} \Gamma(3/2)} \sum_{m=0}^{\infty} \left\{ \int_0^{\infty} e^{-(m+h)t} J_{-1/2}\left(\frac{z_1}{2v_0} t\right) t^{3/2} dt - \int_0^{\infty} e^{-(m+1-h)t} J_{-1/2}\left(\frac{z_1}{2v_0} t\right) t^{3/2} dt \right\} \quad (1.3)$$

Почленное интегрирование ряда законно [1] в силу его равномерной сходимости, абсолютной сходимости интеграла (1.1) и непрерывности подинтегрального выражения при конечных λ . Применяя к последнему формулу [1]

$$\int_0^{\infty} e^{-at} J_{\nu}(bt) t^{\nu+1} dt = \frac{2a(2b)^{\nu} \Gamma(\nu + 3/2)}{\pi^{1/2} (a^2 + b^2)^{\nu+3/2}} \quad (1.4)$$

будем иметь

$$y_s = \frac{\Gamma(7/6)}{\pi^{1/2} v_0^{1/2} 3^{1/2} \Gamma(2/3)} \sum_{m=0}^{\infty} \left\{ \frac{m+h}{[(m+h)^2 + (z_1/2v_0)^2]^{7/6}} - \frac{m+1-h}{[(m+1-h)^2 + (z_1/2v_0)^2]^{7/6}} \right\}$$

Если использовать свойства гамма-функции [2] и ввести в рассмотрение параметр околосвукового подобия [3]

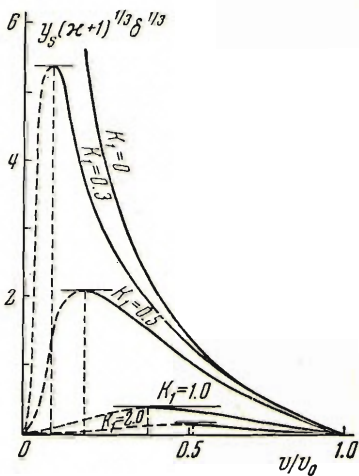
$$K_1 = \frac{1 - M_1^2}{[(\kappa + 1) \delta]^{3/2}} = \left(\frac{3}{2} \frac{z_1}{v_0}\right)^{3/2} \quad \left(M_1 = \frac{U_1}{a}\right) \quad (1.5)$$

то (1.4) принимает вид:

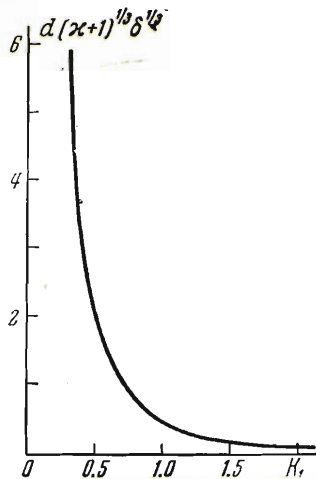
$$y_s(\kappa + 1)^{1/2} \delta^{3/2} = \frac{2^{3/2} \pi}{3^{11/6} \Gamma^3(2/3)} \left\{ \frac{h}{(h^2 + 1/9 K_1^2)^{7/6}} - \sum_{m=1}^{\infty} \left[\frac{m-h}{[(m-h)^2 + 1/9 K_1^2]^{7/6}} - \frac{m+h}{[(m+h)^2 + 1/9 K_1^2]^{7/6}} \right] \right\} \quad (1.6)$$

На фиг. 2 приведены результаты расчетов (1.6) для $K_1 = 0, 0.3, 0.5, 1.0$.

§ 2. Величина местной сверхзвуковой зоны. Изображенные на фиг. 2 кривые отражают характер изменения скорости v в зависимости от y_s , т. е. на звуковой линии. Но, исходя из уравнений движения газа и краевых условий, можно показать^[7], что вдоль линии перехода скорость v убывает с удалением от профиля, что



Фиг. 2



Фиг. 3

вполне ясно из физических соображений. Следовательно, наименьшей скоростью v будет в вершине сверхзвуковой зоны точки B (фиг. 1). Поэтому на фиг. 2 физический смысл имеют только те части кривых, на которых с возрастанием y_s убывает v . Из фиг. 2 непосредственно видно, что таковыми являются участки кривых, расположенные справа от точки с наибольшей ординатой. Причем максимумы y_s соответствуют, очевидно, вершине B звуковой линии. Здесь линия перехода оканчивается, а дальше поток сплошь дозвуковой. Нужно отметить, что из-за приближенной постановки задачи звуковая линия получается из решения Коула (1.1) в виде отрезка вертикали AB' (фиг.1), что является, конечно, грубым приближением. Но этот факт, повидимому, слабо будет влиять на величину сверхзвуковой зоны, если за размеры последней мы примем максимальные y_s . В таком случае нас интересует, как будет изменяться $\max y_s$ в зависимости от параметра подобия набегающего потока K_1 . Для этого из (1.6) найдем $\max y_s$.

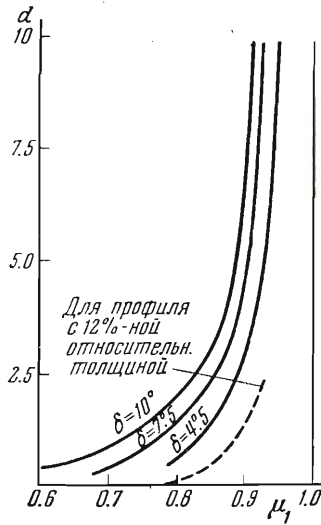
После простых преобразований уравнение $dy_s / dv = 0$ примет вид:

$$\frac{K_1^3 - 12h^2}{(h^2 + \frac{1}{9}K_1^3)^{13/6}} = \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \frac{12(m+h)^2 - K_1^3}{[(m+h)^2 + \frac{1}{9}K_1^3]^{13/6}} - \frac{12(m-h)^2 - K_1^3}{[(m-h)^2 + \frac{1}{9}K_1^3]^{13/6}} \right\}$$

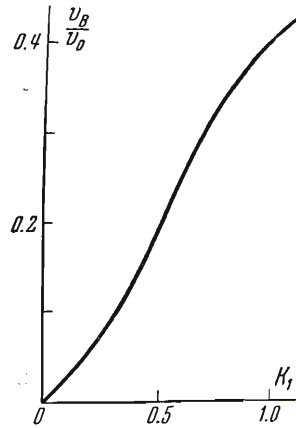
Легко показать, что дифференцируемость ряда (1.6) законна. Находя отсюда абсциссу v_B экстремальной точки, по (1.6) можно вычислить $\max y_s = d$.

На фиг. 3 приведена кривая зависимости величины d сверхзвуковой зоны от параметра подобия K_1 набегающего потока и полуугла клина δ , а на фиг. 4 — эта же кривая, пересчитанная для $\delta = 4^\circ, 5; 7^\circ, 5; 10^\circ$. Кроме того, на фиг. 4 (пунктиром) приведен экспериментальный график изменения величины местной сверхзвуковой зоны^[4] в зависимости от числа Маха M_1 набегающего потока для крылового профиля с 12%-ной относительной толщиной. Из сопоставления наших результатов с экспериментальными данными^[4] можно сделать вывод об их качественном совпадении. Далее, из поведения кривых на фиг. 3 и 4 видно, что сверхзвуковая зона растет с убыванием K_1 (возрастанием M_1), но все же остается конечной для $K_1 \neq 0$ ($M_1 \neq 1$) и только при $K_1 = 0$ ($M_1 = 1$), т. е. при звуковом обтекании, она простирается не-

ограниченно в поперечном к потоку направлении. Причем, как видно из (1.6), при $K_1 = 0$ $y_s \rightarrow \infty$ по закону $v^{-4/3}$. Таким образом, решая задачу звукового обтекания клина в приближенной постановке Коула как предельный случай дозвукового об-



Фиг. 4



Фиг. 5

текания, мы получим в начале координат плоскости годографа (z, v) особенность с показателем $-4/3$. Здесь следует обратить внимание на несоответствие последнего результата с результатом Ф. Франкля^[5], по которому показатель особенности для случая звукового обтекания профиля равен $-3/2$. Вопрос о причинах такого расхождения остается пока открытым.

Далее, на фиг. 5 нанесена кривая изменения поперечной скорости v_B в вершине сверхзвуковой зоны в зависимости от параметра подобия K_1 , из характера которой можно заключить, что скорость возмущения в точке B растет с увеличением K_1 . Это вполне понятно, ибо при увеличении K_1 сверхзвуковая зона уменьшается слишком сильно, а значит, точка B очень быстро приближается к клину. Поэтому и его влияние становится эффективнее. Автор приносит благодарность С. В. Фальковичу за указания.

Поступила 29 X 1954

ЛИТЕРАТУРА

1. Ватсон Г. Теория бесселевых функций, ч. 1 и 2, ИИЛ, 1949.
2. Уиттекер Р. и Ватсон Г. Курс современного анализа, ч. 2. ИИЛ, 1935.
3. Карман Т. Закон подобия для трансзвукового потока. Сб. «Газовая динамика». ИИЛ, 1950.
4. Карман Т. Сверхзвуковая аэродинамика. ИИЛ, 1948.
5. Франкль Ф. Исследования по теории крыла бесконечного размаха, движущегося со скоростью звука. ДАН СССР, т. LVII, 1947.
6. Липман Г. и Брисон А. Обтекание клиновидных профилей потоком газа с околозвуковыми скоростями. Сб. «Механика», вып. 3, ИИЛ, 1951.
7. Cole J. Drag of a Finite Wedge at High Subsonic Speeds. Journal of Math. and Phys., vol. 30, № 2, 1951.