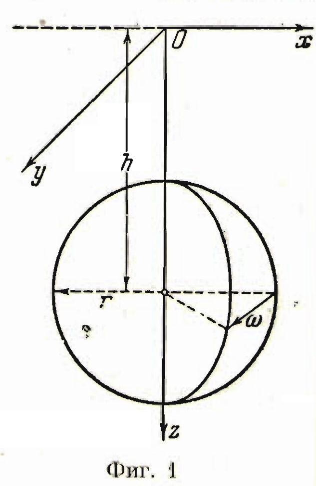
Прикладная математика и механика. Том XIX, 1955
Институт механики Академии наук Союза ССР

ВЛИЯНИЕ ГЛУБИНЫ ПОГРУЖЕНИЯ СФЕРЫ НА КОЭФФИЦИЕНТ ПРИСОЕДИНЕННОЙ МАССЫ ПРИ ГОРИЗОНТАЛЬНОМ УДАРЕ

Э. Л. Блох

(Москва)

§ 1. **Основные уравнения.** Как было показано в работе [1], коэффициент присоединенной массы сферы, наполовину погруженной в идеальную жидкость, при горизонтальном ударе оказался равным 0,273. Известно, также, что если сфера погружена на бесконечно большую глубину, ее коэффициент присоединенной массы равен 0,5. Такое значительное различие в величине коэффициентов присоединенной массы в этих предельных случаях заставляет обратиться к исследованию влияния глубины погружения на величину коэффициента присоединенной массы при горизонтальном ударе. Для этого рассмотрим сферу радиуса r, центр которой расположен под свободной поверхностью идеальной жидкости на глубине $h \geqslant r$. Выбирая систему координат x, y, z так, чтобы оси x и y располагались на поверхности жидкости, а ось z проходила через центр сферы (фиг. 1), введем пространственную биполярную систему координат α, β, ω, связанную с координатами x, y, z соотношениями



Фиг. 1

$$x = \frac{\varkappa \sin\alpha \cos\omega}{\operatorname{ch}\beta - \cos\alpha}, \quad y = \frac{\varkappa \sin\alpha \sin\omega}{\operatorname{ch}\beta - \cos\alpha}, \quad z = \frac{\varkappa \operatorname{sh}\beta}{\operatorname{ch}\beta - \cos\alpha}$$

где

$$\varkappa = \mathrm{const}, \qquad 0 \leqslant \alpha \leqslant \pi, \qquad -\infty < \beta < \infty, \qquad 0 \leqslant \omega \leqslant 2\pi$$

На поверхностих жидкости ($z = 0$) $\beta = 0$, причем для нижнего полупространства $\beta > 0$, а в бесконечно удаленной точке $\beta = 0$, $\alpha = 0$. Так как уравнение сферы в координатах α, β, ω имеет вид: $\beta = \beta_0 = \mathrm{const}$, то в области, занятой жидкостью, $0 \leqslant \beta \leqslant \beta_0$. Постоянные $\varkappa$ и β_0 связаны с радиусом сферы r и глубиной погружения h соотношениями

$$r = \frac{\varkappa}{\operatorname{sh}\beta_0}, \qquad h = \varkappa \operatorname{cth}\beta_0 \qquad \text{или} \qquad \operatorname{ch}\beta_0 = \frac{h}{r}, \qquad \varkappa = r \operatorname{sh}\beta_0 = \sqrt{h^2 - r^2}$$

При внезапном движении сферы (ударе) из состояния покоя потенциал скоростей φ возмущенного движения жидкости связан с давлением известным соотношением $\varphi = -p/\rho$ и, следовательно, на свободной поверхности жидкости $\varphi = 0$.

На поверхности сферы должно выполняться условие $\partial\varphi/\partial n = V_n$, где V_n — проекция на нормаль скорости точек сферы. В бесконечно удаленных точках потенциал φ исчезает и, следовательно, $\varphi = 0$ при $\alpha = 0$, $\beta = 0$

Для отыскания потенциала φ воспользуемся общим решением уравнения Лапласа в пространственной биполярной системе координат[2], которое имеет вид:

$$\varphi = (2\,\mathrm{ch}\,\beta - 2\cos\alpha)^{1/2} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{n} (M_n^m \cos m\omega + N_n^m \sin m\omega) \times$$

$$\times \left[C_n^m \,\mathrm{ch}\left(n+\frac{1}{2}\right)\beta + D_n^m \,\mathrm{sh}\left(n+\frac{1}{2}\right)\beta\right]\left[E_n^m P_n^m(\cos\alpha) + F_n^m Q_n^m(\cos\alpha)\right]$$

где $P_n^m(\cos\alpha)$ и $Q_n^m(\cos\alpha)$ — присоединенные функции Лежандра первого и второго рода.

Так как потенциал φ должен обращаться в нуль на свободной поверхности $(\beta = 0)$ и оставаться конечным на оси z ($\beta \neq 0$; $\alpha = 0$ и $\alpha = \pi$), исчезая в бесконечности, то коэффициенты C_n^m и F_n^m следует принять равными нулю при всех значениях n.

Заменяя коэффициенты M_n^m и N_n^m коэффициентами A_n^m и B_n^m так, чтобы

$$M_n^m = \frac{rU_0}{D_n^m E_n^m} \frac{A_n^m}{(2\,\mathrm{ch}\,\beta_0)^{1/2}\,\mathrm{sh}\,(n+{}^1/_2)\,\beta_0}$$

$$N_n^m = \frac{rU_0}{D_n^m E_n^m} \frac{A_n^m}{(2\,\mathrm{ch}\,\beta_0)^{1/2}\,\mathrm{sh}\,(n+{}^1/_2)\,\beta_0}$$

где U_0 — модуль скорости центра сферы, получим для φ выражение

$$\varphi = rU_0 \left[\frac{\mathrm{ch}\,\beta - \cos\alpha}{\mathrm{ch}\,\beta_0}\right]^{1/2} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{n} (A_n^m \cos m\omega + B_n^m \sin m\omega)\, \frac{\mathrm{sh}\,(n+{}^1/_2)\,\beta}{\mathrm{sh}\,(n+{}^1/_2)\,\beta_0} P_n^m(\cos\alpha)$$

Для определения коэффициентов A_n^m и B_n^m воспользуемся условием на поверхности сферы. Так как

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right)_{\beta=\beta_0} = \frac{\mathrm{ch}\,\beta_0 - \cos\alpha}{\varkappa} \left(\frac{\partial\varphi}{\partial\beta}\right)_{\beta=\beta_0}$$

то

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right)_{\beta=\beta_0} = \frac{rU_0}{2\varkappa}\left(\frac{\mathrm{ch}\,\beta_0 - \cos\alpha}{\mathrm{ch}\,\beta_0}\right)^{1/2} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{n} (A_n^m \cos m\omega + B_n^m \sin m\omega) \times$$

$$\times \left[\frac{(2n+1)\,\mathrm{ch}\,\beta_0}{\mathrm{th}\,(n+{}^1/_2)\,\beta_0} + \mathrm{sh}\,\beta_0 - \frac{(2n+1)\cos\alpha}{\mathrm{th}\,(n+{}^1/_2)\,\beta_0}\right] P_n^m(\cos\alpha)$$

В случае горизонтального удара, соответствующего движению сферы вдоль оси x:

$$V_n = U_0 \cos(n,\, x) = U_0 \frac{\mathrm{sh}\,\beta_0 \sin\alpha}{\mathrm{ch}\,\beta_0 - \cos\alpha} \cos\omega$$

Тогда, заменяя в предыдущем выражении $\varkappa$ его значением, получим для определения коэффициентов A_n^m и B_n^m соотношение

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{n} (A_n^m \cos m\omega + B_n^m \sin m\omega)\left[\frac{(2n+1)\,\mathrm{ch}\,\beta_0}{\mathrm{th}\,(n+{}^1/_2)\,\beta_0} + \mathrm{sh}\,\beta_0 - \frac{(2n+1)\cos\alpha}{\mathrm{th}\,(n+{}^1/_2)\,\beta_0}\right] P_n^m(\cos\alpha) =$$

$$= 2\,\mathrm{sh}^2\beta_0\,(\mathrm{ch}\,\beta_0)^{1/2} \frac{\sin\alpha}{(\mathrm{ch}\,\beta_0 - \cos\alpha)^{3/2}} \cos\omega$$

Из этого условия непосредственно видим, что все $B_n^m = 0$ и $A_n^m = 0$ для всех m, отличных от единицы. Обозначая коэффициенты A_n^1 через A_n, записываем выражение для потенциала скоростей φ в виде

$$\varphi = rU_0 \cos\omega \left(\frac{\mathrm{ch}\,\beta - \cos\alpha}{\mathrm{ch}\,\beta_0}\right)^{1/2} \sum_{n=1}^{\infty} A_n \frac{\mathrm{sh}\,(n+{}^1/_2)\,\beta}{\mathrm{sh}\,(n+{}^1/_2)\,\beta_0} P_n^1(\cos\alpha)$$

где коэффициенты A_n следует определить из условия

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n \left[\frac{(2n+1)\,\mathrm{ch}\,\beta_0}{\mathrm{th}\,(n+{}^1/_2)\,\beta_0} + \mathrm{sh}\,\beta_0 - \frac{(2n+1)\cos\alpha}{\mathrm{th}\,(n+{}^1/_2)\,\beta_0}\right] P_n^1(\cos\alpha) =$$

$$= 2\,\mathrm{sh}^2\beta_0\,(\mathrm{ch}\,\beta_0)^{1/2}\frac{\sin\alpha}{(\mathrm{ch}\,\beta_0 - \cos\alpha)^{3/2}} \qquad (1.1)$$

В последних уравнениях отсутствует коэффициент A_0, так как $P_0^1(\cos\alpha)=0$.

§ 2. Выражение для коэффициента присоединенной массы. Из соображений симметрии очевидно, что в рассматриваемом случае действующие на сферу при ударе импульсные силы приводятся к одной равнодействующей, проходящей через центр сферы. Эта равнодействующая импульсных сил параллельна оси x и направлена в сторону, обратную движению сферы.

Величина равнодействующей, которую обозначим P_t, определяется равенством

$$P_t = \rho\iint_\sigma \varphi(\beta_0, \alpha, \omega)\cos(n, x)\,d\sigma \qquad \left(d\sigma = r^2\frac{\mathrm{sh}\,\beta_0 \sin\alpha}{(\mathrm{ch}\,\beta_0 - \cos\alpha)^2}\,d\alpha d\omega\right)$$

где $d\sigma$ — элемент поверхности сферы. Тогда, заменяя $\cos(n, x)$ и $\varphi(\beta_0, \alpha, \omega)$ их значениями и выполняя интегрирование по ω, получаем

$$P_t = \pi\rho r^3 U_0\frac{\mathrm{sh}^3\beta_0}{(\mathrm{ch}\,\beta_0)^{1/2}}\sum_{n=1}^{\infty} A_n\int_0^\pi \frac{\sin^2\alpha P_n^1(\cos\alpha)}{(\mathrm{ch}\,\beta_0 - \cos\alpha)^{3/2}}\,d\alpha$$

Разделив P_t на $\rho{}^4/_3\pi r^3 U_0$, получим для коэффициента присоединенной массы

$$\lambda = \frac{3}{4}\frac{\mathrm{sh}^3\beta_0}{(\mathrm{ch}\,\beta_0)^{1/2}}\sum_{n=1}^{\infty} A_n J_n(\beta_0) \qquad \left(J_n(\beta_0) = \int_0^\pi \frac{\sin^2\alpha P_n^1(\cos\alpha)}{(\mathrm{ch}\,\beta_0 - \cos\alpha)^{5/2}}\,d\alpha\right)$$

Выполняя замену переменной $\cos\alpha = \mu$ и используя равенство

$$P_n^1(\mu) = \sqrt{1-\mu^2}\,\frac{dP_n(\mu)}{d\mu}$$

приведем интеграл $J_n(\beta_0)$ к виду

$$J_n(\beta_0) = \frac{1}{2}J_n^{(3)}(\beta_0) + 3\,\mathrm{ch}\,\beta_0 J_n^{(5)}(\beta_0) + \frac{5}{2}\,\mathrm{sh}^2\beta_0 J_n^{(7)}(\beta_0)$$

где

$$J_n^{(k)}(\beta_0) = \int_{-1}^{+1}\frac{P_n(\mu)\,d\mu}{(\mathrm{ch}\,\beta_0 - \mu)^{k/2}}$$

Для вычисления $J_n^{(k)}(\beta_0)$ при $k=3$, 5 и 7 воспользуемся известным интегралом[3]

$$J_n^{(1)}(\beta_0) = \int_{-1}^{+1}\frac{P_n(\mu)\,d\mu}{(\mathrm{ch}\,\beta_0 - \mu)^{1/2}}$$

дифференцируя который по параметру β_0, легко находим $J_n^{(3)}(\beta_0)$, $J_n^{(5)}(\beta_0)$, $J_n^{(7)}(\beta_0)$. После этого в результате простых преобразований находим, что

$$J_n(\beta_0) = \frac{4\sqrt{2}}{3}\frac{n(n+1)}{\mathrm{sh}\,\beta_0}\exp\left[-\left(n+\frac{1}{2}\right)\beta_0\right]$$

Подставляя в выражение для λ вместо $J_n(\beta_0)$ его значение, получаем

$$\lambda = \left(\frac{2}{\mathrm{ch}\,\beta_0}\right)^{1/2}\mathrm{sh}^2\beta_0\sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)A_n\exp\left[-\left(n+\frac{1}{2}\right)\beta_0\right]$$

§ 3. Вычисление коэффициентов A_n. Для вычисления коэффициентов A_n перепишем условие (1.1) в виде

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n\,[a_n(\beta_0) - b_n(\beta_0)\,\mu]\,P_n^1(\mu) = 2\,\mathrm{sh}\,\beta_0\,(\mathrm{ch}\,\beta_0)^{1/2}\,\frac{\sqrt{1-\mu^2}}{[\mathrm{ch}\,\beta_0 - \mu]^{3/2}}$$

где

$$a_n(\beta_0) = \frac{2n+1}{\mathrm{th}\,\beta_0\,\mathrm{th}\,(n+{}^1/_2)\,\beta_0} + 1, \qquad b_n(\beta_0) = \frac{2n+1}{\mathrm{sh}\,\beta_0\,\mathrm{th}\,(n+{}^1/_2)\,\beta_0}$$

Умножим теперь левую и правую части этого равенства на $P_k^1(\mu)$ и проинтегрируем по μ от -1 до 1, тогда

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n a_n(\beta_0)\int_{-1}^{+1} P_n^1(\mu)\,P_k^1(\mu)\,d\mu - \sum_{n=1}^{\infty} A_n b_n(\beta_0)\int_{-1}^{+1}\mu P_n^1(\mu)\,P_k^1(\mu)\,d\mu =$$

$$= 2\,\mathrm{sh}\,\beta_0\,(\mathrm{ch}\,\beta_0)^{1/2}\int_{-1}^{+1}\frac{\sqrt{1-\mu^2}P_k^1(\mu)\,d\mu}{(\mathrm{ch}\,\beta_0-\mu)^{3/2}}$$

Воспользовавшись рекуррентным соотношением

$$\mu P_k^1(\mu) = \frac{k}{2k+1}\,P_{k+1}^1(\mu) + \frac{k+1}{2k+1}\,P_{k-1}^1(\mu)$$

и ортогональностью присоединенных функций Лежандра для $-1 \leqslant \mu \leqslant 1$, получим

$$A_k a_k(\beta_0)\int_{-1}^{+1}[P_k^1(\mu)]^2 d\mu - \frac{k}{2k+1}A_{k+1}b_{k+1}(\beta_0)\int_{-1}^{+1}[P_{k+1}^1(\mu)]^2\,d\mu -$$

$$-\frac{k+1}{2k+1}A_{k-1}b_{k-1}(\beta_0)\int_{-1}^{+1}[P_{k-1}^1(\mu)]^2\,d\mu = 2\,\mathrm{sh}\,\beta_0\,(\mathrm{ch}\,\beta_0)^{1/2}\int_{-1}^{+1}\frac{\sqrt{1-\mu^2}P_k^1(\mu)\,d\mu}{(\mathrm{ch}\,\beta_0-\mu)^{3/2}}$$

Учитывая, что

$$\int_{-1}^{+1}[P_n^1(\mu)]^2\,d\mu = \frac{2}{2n+1}\,\frac{(n+1)!}{(n-1)!} = \frac{2n(n+1)}{2n+1}$$

и что интеграл, стоящий в правой части, вычисляется точно так же, как и найденный ранее интеграл $J_n(\beta_0)$, получаем после замены $a_k(\beta_0)$ и $b_k(\beta_0)$ их значениями:

$$\left[(2k+1) + \mathrm{th}\,\beta_0\,\mathrm{th}\left(k+\frac{1}{2}\right)\beta_0\right]\frac{A_k}{\mathrm{th}\,\beta_0\,\mathrm{th}\,(k+{}^1/_2)\,\beta_0} - \frac{k+2}{\mathrm{sh}\,\beta_0}\,\frac{A_{k+1}}{\mathrm{th}\,(k+{}^3/_2)\,\beta_0} -$$

$$-\frac{k-1}{\mathrm{sh}\,\beta_0}\,\frac{A_{k-1}}{\mathrm{th}\,(k-{}^1/_2)\,\beta_0} = 4\sqrt{2}\,\mathrm{sh}\,\beta_0\,(\mathrm{ch}\,\beta_0)^{1/2}\exp\left[-\left(k+\frac{1}{2}\right)\beta_0\right]$$

Если вместо A_k ввести новые коэффициенты B_k так, чтобы

$$A_k = 4\sqrt{2}\,\mathrm{sh}\,\beta_0\,(\mathrm{ch}\,\beta_0)^{1/2}\exp\left[-\left(k+\tfrac{1}{2}\right)\beta_0\right]\mathrm{th}\left(k+\tfrac{1}{2}\right)\beta_0 B_k$$

то последнее выражение приводится к виду

$$\left[(2k+1) + \mathrm{th}\,\beta_0\,\mathrm{th}\left(k+\tfrac{1}{2}\right)\beta_0\right]B_k - (k+2)(1-\mathrm{th}\,\beta_0)\,B_{k+1} - (k-1)(1+\mathrm{th}\,\beta_0)\,B_{k-1} =$$

$$= \mathrm{th}\,\beta_0 \quad (k = 1, 2, \ldots) \tag{3.1}$$

Коэффициент присоединенной массы λ после введения коэффициентов B_n будет определяться равенством

$$\lambda = 8\,\mathrm{sh}^3\,\beta_0\sum_{n=1}^{\infty} n\,(n+1)\,B_n\exp\left[-\left(n+\tfrac{1}{2}\right)\beta_0\right]\mathrm{th}\left(n+\tfrac{1}{2}\right)\beta_0 \tag{3.2}$$

Вычисление коэффициентов B_k начнем с предельного случая $\beta_0 \to \infty$, соответствующего бесконечно глубокому погружению сферы, когда коэффициент присоединенной массы должен быть равен 0,5.

В этом предельном случае уравнения (3.1) принимают вид:

$$2(k+1)B_k - 2(k-1)B_{k-1} = 1 \quad \text{или} \quad B_k = \frac{1}{4} + \frac{k-1}{k+1}(4B_{k-1} - 1) \quad (k = 1, 2, \ldots)$$

Полагая $k=1$, находим $B_2 = {}^1/_4$ и, следовательно, для всех остальных k получаем $B_k = {}^1/_4$. Таким образом, при $\beta_0 \to \infty$ коэффициенты B_k не зависят от номера k.

Подставляя B_k в выражение (3.2), убеждаемся, что все члены, кроме первого, обращаются в нуль при $\beta_0 \to \infty$ и коэффициент λ для этого случая равен $\lambda = 0.5$.

Переходя к определению коэффициентов B_k для произвольных значений β_0, перепишем уравнение (3.1) в виде

$$\left[(k+2)(1-\operatorname{th}\beta_0) + (k-1)(1+\operatorname{th}\beta_0) + \operatorname{th}\beta_0\left(3 + \operatorname{th}\left(k+\tfrac{1}{2}\right)\beta_0\right)\right] B_k -$$
$$-(k+2)(1-\operatorname{th}\beta_0)B_{k+1} - (k-1)(1+\operatorname{th}\beta_0)B_{k-1} = \operatorname{th}\beta_0$$

или

$$\operatorname{th}\beta_0\left[3 + \operatorname{th}\left(k+\tfrac{1}{2}\right)\beta_0\right]B_k - (k+2)(1-\operatorname{th}\beta_0)(B_{k+1} - B_k) +$$
$$+(k-1)(1+\operatorname{th}\beta_0)(B_k - B_{k-1}) = \operatorname{th}\beta_0$$

Откуда

$$\left[3 + \operatorname{th}\left(k+\tfrac{1}{2}\right)\beta_0\right]B_k = 1 + (k-1)\frac{1+\operatorname{th}\beta_0}{\operatorname{th}\beta_0}(B_{k-1} - B_k) -$$
$$(k+2)\frac{1-\operatorname{th}\beta_0}{\operatorname{th}\beta_0}(B_k - B_{k+1})$$

Это уравнение будем решать методом последовательных приближений; тогда для $B_k^{(n)}$ получим

$$\left[3 + \operatorname{th}\left(k+\frac{1}{2}\right)\beta_0\right]B_k^{(n)} = 1 + (k-1)\,\frac{1+\operatorname{th}\beta_0}{\operatorname{th}\beta_0}\left(B_{k-1}^{(n-1)} - B_n^{(n-1)}\right) -$$
$$-(k+2)\,\frac{1-\operatorname{th}\beta_0}{\operatorname{th}\beta_0}\left(B_k^{(n-1)} - B_{k+1}^{(n-1)}\right)$$

где $B_k^{(n)}$ есть n-е приближение для коэффициентов B_k.

В качестве первого приближения возьмем для B_k значения, соответствующие случаю $\beta_0 = \infty$, т. е. $B_k^{(1)} = {}^1/_4$. Тогда во втором приближении

$$B_k^{(2)} = \frac{1}{3 + \operatorname{th}(k + {}^1/_2)\beta_0}$$

Целесообразность вычисления третьего приближения оценим, вычисляя коэффициент присоединений массы λ по первому и второму приближениям и сравнению этих приближений.

§ 4. Вычисление коэффициента присоединенной массы в первом и втором приближениях. Подставляя в выражение для коэффициента присоединенной массы λ вместо B_n их значения по первому и второму приближениям, получаем

$$\lambda^{(1)} = 2\operatorname{sh}^3\beta_0 \sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)\exp[-(2n+1)\beta_0]\operatorname{th}(n + {}^1/_2)\beta_0$$

$$\lambda^{(2)} = 8\operatorname{sh}^3\beta_0 \sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)\exp[-(2n+1)\beta_0]\,\frac{\operatorname{th}(n+{}^1/_2)\beta_0}{3 + \operatorname{th}(n+{}^1/_2)\beta_0}$$

Вводя величину $q = e^{-\beta_0}$, преобразуем $\lambda^{(1)}$ и $\lambda^{(2)}$ к виду

$$\lambda^{(1)} = \frac{(1-q^2)^3}{16q^3} \sum_{n=1}^{\infty} [(2n+1)^2 - 1]\, q^{2n+1} \frac{1-q^{2n+1}}{1+q^{2n+1}}$$

$$\lambda^{(2)} = \frac{(1-q^2)^3}{8q^3} \sum_{n=1}^{\infty} [(2n+1)^2 - 1]\, q^{2n+1} \frac{1-q^{2n+1}}{2+q^{2n+1}}$$

Если воспользоваться разложениями

$$\frac{1}{1+q^{2n+1}} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k q^{k(2n+1)}, \qquad \frac{1}{2+q^{2n+1}} = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{q^{k(2n+1)}}{2^k}$$

то, изменяя порядок суммирования и вычисляя суммы

$$\sum_{n=1}^{\infty} q^{k(2n+1)}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} (2n+1)^2\, q^{k(2n+1)}$$

выражения для $\lambda^{(1)}$ и $\lambda^{(2)}$ можно привести к виду

$$\lambda^{(1)} = 0.5 - \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \left[q^k \frac{1-q^2}{1-q^{2(k+1)}} \right]^3$$

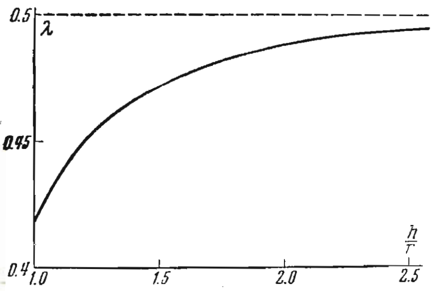
$$\lambda^{(2)} = 0.5 - \frac{3}{4} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{1}{2^{k-1}} \left[q^k \frac{1-q^2}{1-q^{2(k+1)}} \right]^3$$

и, следовательно,

$$\Delta\lambda = \frac{\lambda^{(2)} - \lambda^{(1)}}{\lambda^{(2)}} = \frac{1}{\lambda^{(2)}} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \left(1 - \frac{3}{2^{k+1}}\right) \left[q^k \frac{1-q^2}{1-q^{2(k+1)}} \right]^3$$

Наибольшего значения $\Delta\lambda$ достигает при $q = 1$, при котором $\Delta\lambda = 0.0302$.

Отсюда следует, что с достаточной для практических целей точностью можно ограничиться вторым приближением, принимая $\lambda = \lambda^{(2)}$.



Фиг. 2

Зависимость коэффициента λ от глубины погружения сферы h/r показана на фиг. 2, из которой видно, что λ меняется от 0.418 при $h/r = 1$ до 0.5 при $h/r = \infty$.

Однако уже при $h/r = 2$ величина λ достигает значения, близкого к 0.490, откуда следует, что дальнейшее увеличение глубины погружения сферы практически не сказывается на величине коэффициента присоединенной массы. Кроме того, так как $\lambda = 0.273$ при $h/r = 0$, следует, что наиболее заметное увеличение λ происходит в диапазоне $0 \leqslant h/r \leqslant 1$.

Поступила 23 XI 1954

ЛИТЕРАТУРА

1. Блох Э. Л. Горизонтальный гидродинимический удар сферы при наличии свободной поверхности. ПММ, т, XVII, вып. 5, 1953.
2. Лебедев И. И. Специальные функции и их приложения. ГИТТЛ,, 1953.
3. Рыжик И. М, и Градштейн И. С. Таблицы интегралов сумм рядов и произведений. ГИТТЛ, 1953.