Прикладная математика и механика. Том XIX, 1955
Институт механики Академии наук Союза ССР

РАЗЛИЧНЫЕ ФОРМЫ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ ВЯЗКО-ПЛАСТИЧНЫХ ЖИДКОСТЕЙ И ЗАКОН ГИДРОДИНАМИЧЕСКОГО ПОДОБИЯ

А. Ф. Касимов, А. Х. Мирзаджанзаде,
(Баку)

Для определения гидравлических сопротивлений при движении вязко-пластичных жидкостей (глинистый раствор, цементный раствор, торфяная гидромасса и др.) и вывода безразмерных параметров необходимы основные дифференциальные уравнения движения.

Будем предполагать, что вязко-пластичная жидкость подчиняется закону Шведова-Бингхема, тогда, следуя А. А. Ильюшину, согласно второй гипотезе имеем для модуля пластичности

$$m = 2\left(\eta + \frac{\tau_0}{h}\right) \tag{1}$$

где η — структурная вязкость вязко-пластичной жидкости, τ_0 — предельное напряжение сдвига вязко-пластичной жидкости,

$$h = \sqrt{S^2{}_{yz} + S^2{}_{xy} + S^2{}_{xz} + \tfrac{2}{3}\left[(S_{xx} - S_{yy})^2 + (S_{yy} - S_{zz})^2 + (S_{xx} - S_{zz})^2\right]}$$

Подставив значения компонентов напряженного состояния в уравнение Коши, получим основные дифференциальные уравнения движения вязкопластичных жидкостей в декартовых координатах:

$$\frac{Dv_x}{Dt} = K_x - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{\rho}\left(\eta + \frac{\tau_0}{h}\right)\left(\nabla^2 v_x + \frac{1}{3}\frac{\partial \theta_1}{\partial x}\right) - \frac{\tau_0}{\rho h^2}\left[2\frac{\partial h}{\partial x}\frac{\partial v_x}{\partial x} + \right.$$
$$\left. + \frac{\partial h}{\partial y}\left(\frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y}\right) + \frac{\partial h}{\partial z}\left(\frac{\partial v_z}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial z}\right) - \frac{2}{3}\theta_1\frac{\partial h}{\partial x}\right]$$

$$\frac{Dv_y}{Dt} = K_y - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{1}{\rho}\left(\eta + \frac{\tau_0}{h}\right)\left(\nabla^2 v_y + \frac{1}{3}\frac{\partial \theta_1}{\partial y}\right) - \frac{\tau_0}{\rho h^2}\left[\frac{\partial h}{\partial x}\left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x}\right) + \right.$$
$$\left. + 2\frac{\partial h}{\partial y}\frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial h}{\partial z}\left(\frac{\partial v_z}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial z}\right) - \frac{2}{3}\theta_1\frac{\partial h}{\partial y}\right]$$

$$\frac{Dv_z}{Dt} = K_z - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{1}{\rho}\left(\eta + \frac{\tau_0}{h}\right)\left(\nabla^2 v_z + \frac{1}{3}\frac{\partial \theta_1}{\partial z}\right) - \frac{\tau_0}{\rho h^2}\left[\frac{\partial h}{\partial x}\left(\frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x}\right) + \right.$$
$$\left. + \frac{\partial h}{\partial y}\left(\frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y}\right) + 2\frac{\partial h}{\partial z}\frac{\partial v_z}{\partial z} - \frac{2}{3}\theta_1\frac{\partial h}{\partial z}\right] \tag{2}$$

где K_x, K_y, K_z — проекции ускорения массовых сил на оси, ρ — плотность, ∇^2 — оператор Лапласа, $\theta_1 = \operatorname{div} V$.

Согласно третьей гипотезе А. А. Ильюшина принимаем, что вязко-пластичная жидкость несжимаема. В этом случае выражение для h имеет вид:

$$h = \left[\left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y}\right)^2 + \right.$$
$$\left. + 2\left(\frac{\partial v_x}{\partial x}\right)^2 + 2\left(\frac{\partial v_y}{\partial y}\right)^2 + 2\left(\frac{\partial v_z}{\partial z}\right)^2\right]^{1/2}$$

В векторно-тензорной форме уравнения (2) имеют вид:

$$\frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \mathbf{K} - \frac{1}{\rho}\ \mathrm{grad}\ p + \frac{1}{\rho}\left(\eta + \frac{\tau_0}{h}\right)\left(\triangle^2\mathbf{v} + \frac{1}{3}\mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,\mathbf{v}\right) - \\ - \frac{2\tau_0\Phi}{\rho h^2}\,\mathrm{grad}\,h - \frac{2}{3}\ \frac{\tau_0}{\rho h^2}\,\mathrm{grad}\,h.\,\mathrm{div}\,\mathbf{v} \tag{3}$$

Здесь Φ — тензор скоростей деформации:

$$\Phi = \begin{Vmatrix} S_{xx} & \frac{1}{2} S_{xy} & \frac{1}{2} S_{xz} \\ \frac{1}{2} S_{xy} & S_{yy} & \frac{1}{2} S_{yz} \\ \frac{1}{2} S_{xz} & \frac{1}{2} S_{yz} & S_{zz} \end{Vmatrix}$$

В форме Ламба уравнения движения несжимаемой вязко-пластичной жидкости будут иметь вид:

$$\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t} + \frac{1}{2}\,\mathrm{grad}\,v^2 - \mathbf{v}\times\mathrm{rot}\,\mathbf{v} = \mathbf{K} - \frac{1}{\rho}\,\mathrm{grad}\,p - \\ - \frac{1}{\rho}\left(\eta + \frac{\tau_0}{h}\right)\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{v} - \frac{2\tau_0\Phi}{\rho h^2}\,\mathrm{grad}\,h \tag{4}$$

При наличии потенциала F массовой силы $\mathbf{K}$ уравнение (4) примет вид:

$$\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t} - \mathbf{v}\times\Omega = -\,\mathrm{grad}\,H - \frac{1}{\rho}\left(\eta + \frac{\tau_0}{h}\right)\mathrm{rot}\,\Omega - \frac{2\tau_0\Phi}{\rho h^2}\,\mathrm{grad}\,h \tag{5}$$

где

$$H = \frac{p}{\rho} + F + \frac{v^2}{2}, \qquad \Omega = \mathrm{rot}\,\mathbf{v}$$

При изучении вихревых движений в вязко-пластичной жидкости необходимо обобщить уравнения Гельмгольца, позволяющие количественно учесть происходящие с вихрями изменения.

Из уравнений (5) нетрудно получить обобщенные уравнения Гельмгольца, которые будут иметь вид:

$$\frac{\partial\Omega}{\partial t} + (\mathbf{v}\cdot\nabla)\,\Omega - (\Omega\cdot\triangle)\,\mathbf{v} = \frac{1}{\rho}\left(\eta + \frac{\tau_0}{h}\right)\triangle^2\Omega + \\ + \frac{\tau_0}{\rho}\,\mathrm{rot}\,\Omega\times\mathrm{grad}\,\frac{1}{h} + \frac{2\tau_0}{\rho}\,\mathrm{grad}\,h\times\mathrm{grad}\,\frac{\Phi}{h^2} \tag{6}$$

или

$$\frac{d\Omega}{dt} = (\Omega\cdot\triangle)\,\mathbf{v} + \frac{1}{\rho}\left(\eta + \frac{\tau_0}{h}\right)\triangle^2\Omega + \\ + \frac{\tau_0}{\rho}\,\mathrm{rot}\,\Omega\times\mathrm{grad}\,\frac{1}{h} + \frac{2\tau_0}{\rho}\,\mathrm{grad}\,h\times\mathrm{grad}\,\frac{\Phi}{h^2} \tag{7}$$

В ряде случаев удобно вместо прямоугольных координат пользоваться криволинейными координатами. Обозначив проекции массовой силы на оси цилиндрических координат через K_r, K_φ, K_z и произведя вычисления членов уравнения (3) по формулам, известным в литературе, получим уравнения движения вязко-пластичной жидкости в цилиндрических координатах:

$$K_r - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r} + \frac{1}{\rho}\left(\eta + \frac{\tau_0}{h}\right)\left(\frac{\partial^2 v_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial v_r}{\partial r} - \frac{v_r}{r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v_r}{\partial \varphi^2} - \frac{2}{r^2}\frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + \right.$$
$$\left. + \frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2} + \frac{1}{3}\frac{\partial \theta_1}{\partial r}\right) - \frac{\tau_0}{\rho h^2}\left[2\frac{\partial h}{\partial r}\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial h}{\partial \varphi}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial v_r}{\partial \varphi} + \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} - \frac{v_\varphi}{r}\right) + \right.$$
$$\left. + \frac{\partial h}{\partial z}\left(\frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{\partial v_r}{\partial z}\right) - \frac{2}{3}\theta_1\frac{\partial h}{\partial r}\right] = \frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\varphi}{r}\frac{\partial v_r}{\partial \varphi} + v_z\frac{\partial v_z}{\partial z} - \frac{v_\varphi^2}{r}$$

$$K_\varphi - \frac{1}{\rho r}\frac{\partial p}{\partial \varphi} + \frac{1}{\rho}\left(\eta + \frac{\tau_0}{h}\right)\left(\frac{\partial^2 v_\varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial v_\varphi}{\partial r} - \frac{v_\varphi}{r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v_\varphi}{\partial \varphi^2} + \frac{2}{r^2}\frac{\partial v_z}{\partial \varphi} + \right.$$
$$\left. + \frac{\partial^2 v_\varphi}{\partial z^2} + \frac{1}{3r}\frac{\partial \theta_1}{\partial \varphi}\right) - \frac{\tau_0}{\rho h^2}\left[\frac{\partial h}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial v_r}{\partial \varphi} + \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} - \frac{v_\varphi}{r}\right) + \frac{2}{r^2}\frac{\partial h}{\partial \varphi}\left(\frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + v_r\right) + \right.$$
$$\left. + \frac{\partial h}{\partial z}\left(\frac{\partial v_\varphi}{\partial z} + \frac{1}{r}\frac{\partial v_z}{\partial \varphi}\right) - \frac{2}{3}\theta_1\frac{\partial h}{\partial \varphi}\right] = \frac{\partial v_\varphi}{\partial t} + v_r\frac{\partial v_\varphi}{\partial r} + \frac{v_\varphi}{r}\frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + v_z\frac{\partial v_\varphi}{\partial z} + \frac{v_r v_\varphi}{r}$$

$$K_z - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{1}{\rho}\left(\eta + \frac{\tau_0}{h}\right)\left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v_z}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{1}{3}\frac{\partial \theta_1}{\partial z}\right) -$$
$$- \frac{\tau_0}{\rho h^2}\left[\frac{\partial h}{\partial r}\left(\frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{\partial v_r}{\partial z}\right) + \frac{1}{r}\frac{\partial h}{\partial \varphi}\left(\frac{\partial v_\varphi}{\partial z} + \frac{1}{r}\frac{\partial v_z}{\partial \varphi}\right) + 2\frac{\partial h}{\partial z}\frac{\partial v_z}{\partial z} - \frac{2}{3}\theta_1\frac{\partial h}{\partial z}\right] =$$
$$= \frac{\partial v_z}{\partial t} + v_r\frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{v_\varphi}{r}\frac{\partial v_z}{\partial \varphi} + v_z\frac{\partial v_z}{\partial z} \tag{8}$$

Для иллюстрации использования основных дифференциальных уравнений движения вязко-пластичной жидкости рассмотрим установившееся движение в цилиндрической трубе круглого сечения. В этом случае

$$v_r = v_\varphi = 0, \qquad \frac{\partial v_z}{\partial \varphi} = \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0, \qquad \frac{\partial v_z}{\partial t} = 0$$

Из уравнения неразрывности следует $\partial v_z/\partial z = 0$. При этом

$$v_z = v = f(r), \qquad h = \left|\frac{dv}{dr}\right|$$

Первые два уравнения (8) показывают гидростатическое распределение давлений в каждом поперечном сечении трубы. Третье уравнение (8) примет вид:

$$-\frac{dp}{dz} + \left(\eta + \frac{\tau_0}{h}\right)\left(\frac{d^2 v}{dr} + \frac{1}{r}\frac{dv}{dr}\right) - \frac{\tau_0}{h^2}\frac{dh}{dr}\frac{dv}{dr} = 0 \tag{9}$$

Отсюда, дифференцируя по z, имеем $\partial^2 p/\partial z^2 = 0$, т. е. давление падает вдоль трубы по закону прямой линии; это дает

$$-\frac{\partial p}{\partial z} = \frac{p_1 - p_2}{l}$$

где $p_1 - p_2$ — перепад давлений, l — длина трубы.

Решая уравнения (9), получим

$$v = -\frac{p_1 - p_2}{4l\eta}r^2 + \frac{\tau_0}{\eta}r + c_1 \ln r + c_2 \tag{10}$$

Пусть r_0 — радиус ядра, движущегося с постоянной скоростью. Тогда

$$\frac{dv}{dr} = 0 \qquad \text{при } r = r_0 = \frac{2l\tau_0}{p_1 - p_2}$$

Кроме того

$$v = 0 \qquad \text{при } r = R$$

Из этих условий имеем

$$c_1 = 0, \qquad c_2 = \frac{p_1 - p_2}{4l\eta} R^2 - \frac{\tau_0}{\eta} R$$

Подставляя значение $c_1 = 0$ и c_2 в (10), получим

$$v = \frac{p_1 - p_2}{4l\eta}(R^2 - r^2) - \frac{\tau_0}{\eta}(R - r) \tag{11}$$

Рассмотрение основных дифференциальных уравнений движений вязко-пластичной жидкости позволяет вывести следующие безразмерные параметры:

$$N_{\mathrm{Re}}' = \frac{v\rho l_1 / \eta}{1 + \tau_0 l_1 / \eta v}, \qquad N_{\mathrm{Re}}'' = \frac{v^2 \rho}{\tau_0} \qquad \text{(параметр Рейнольдса)}$$

$$N_{\mathrm{La}}' = \frac{p l^2_1}{l\eta (1 + \tau_0 l_1/\eta v) v}, \qquad N_{\mathrm{La}}'' = \frac{p l_1}{l \tau_0} \qquad \text{(параметр Лагранжа)}$$

$$N_{\mathrm{St}}' = \frac{\gamma l_1^2}{\eta v (1 + \tau_0 l_1 / \eta v)}, \qquad N_{\mathrm{St}}'' = \frac{\gamma l_1}{\tau_0} \qquad \text{(параметр Стокса)}$$

$$N_{\mathrm{Fr}} = \frac{v^2}{l_1 g} \quad \text{(параметр Фруда)}, \qquad N_{\mathrm{Eu}} = \frac{p l_1}{\rho v^2 l} \quad \text{(параметр Эйлера)}$$

$$N_{\text{И}} = \frac{\tau_0 l_1}{\eta v} \quad \text{(параметр Ильюшина)}, \qquad N_{\mathrm{Sh}} = \frac{vt}{l} \quad \text{(параметр Струхаля)}$$

где v — характерная для данного явления скорость, l_1, l — характерные для данного явления размеры (для трубы — поперечный и продольный размеры), γ — объемный вес, t — время.

Параметры N_{Re}', N_{La}', N_{St}' относятся к вязко-пластичным жидкостям, а параметры N_{Re}'', N_{La}'', N_{St} относятся к пластичным жидкостям.

Число $N_{\text{И}}$ является параметром, характеризующим, к движению какой жидкости относится движение данной жидкости (вязко-пластичной или пластичной).

Как известно, для гидродинамических процессов характерным являются не абсолютные значения давления, а перепад давления. Поэтому в значениях параметров подобия под p в дальнейшем подразумевается перепад давления.

Дадим анализ приведенных выше параметров для следующих случаев установившегося движения

1. Влияние инерционных сил и сил тяжести по сравнению с силами вязкости, предельного напряжения сдвига и силами давления мало.

2. Влияние сил вязкости, предельного напряжения сдвига и сил тяжести по сравнению с силами давления и инерции мало.

3. Инерционные силы и силы давления играют второстепенную роль по сравнению с силами вязкости, предельного напряжения сдвига и силой тяжести.

4. Влияние сил вязкости, предельного напряжения сдвига и давления ничтожно по сравнению с силами инерции и силами тяжести.

Параметры N_{La}', N_{Eu}, N_{St}', N_{Fr} применимы каждый в соответствующих (1—4) случаях и представляют собой отношение сил.

Для того чтобы параметры N_{La}', N_{La}'' и N_{Eu} представляли отношение сил, нами в них введен симплекс геометрического подобия l_1/l.

При движении вязко-пластичной жидкости по трубам в случае отсутствия сил тяжести существуют две предельные автомодельные области, определяющиеся зависимостями $N_{\mathrm{La}}' = \mathrm{const}$, $N_{\mathrm{Eu}} = \mathrm{const}$. Параметром, характеризующим возможность применения того или иного закона, в данном случае является параметр N_{Ru}'. Равенство $N_{\mathrm{La}}' = \mathrm{const}$ характеризует структурный режим движения, а $N_{\mathrm{Eu}} = \mathrm{const}$ — область, соответствующую квадратичному закону движения. В общем случае при обработке результатов опытов можно пользоваться зависимостью $N_{\mathrm{Eu}} = f(N_{\mathrm{Re}}')$.

В случае падения твердого тела в вязко-пластичной жидкости существуют также две предельные автомодельные области, определяющиеся зависимостями $N_{\mathrm{St}} = \mathrm{const}$, $N_{\mathrm{Fr}} = \mathrm{const}$. Параметром, характеризующим возможность применения того или иного закона, в этом случае является также параметр N_{Re}'. В общем случае при обработке результатов опытов можно пользоваться зависимостью $N_{\mathrm{Fr}} = f(N_{\mathrm{Re}}')$.

Рассмотрим структурный режим движения в круглой трубе, при этом в качестве характерной скорости выберем скорость ядра v_0, а в качестве $l_1 = R - r_0$ (R — радиус трубы). Под перепадом давления подразумевается какой-то фиктивный перепад давления p', соответствующий движению в кольце $R - r_0$. За характерную скорость выбрана v_0, так как изменение скоростей происходит лишь в градиентных слоях.

Из условия $N_{\mathrm{La}}' = \mathrm{const}$ определим p' через p:

$$p' = cp\,\frac{A-1}{A+1}$$

Представляем результаты опытов в виде $N_{\mathrm{Eu}} = f(_{\mathrm{Re}}')$. В параметр N_{Eu} входят p', v_0 и $R - r_0$.

Связывая p с p', получим

$$p = \lambda\,\frac{B}{\varphi^2}\,\frac{l}{D}\,\frac{v_{\mathrm{cp}}^2}{2g}\,\gamma \tag{12}$$

Здесь

$$\lambda = f(N_{\mathrm{Re}}'), \qquad N_{\mathrm{Re}}' = \frac{v_{\mathrm{cp}} D\rho B}{\eta\varphi}, \qquad B = \frac{(A-1)^2}{A^2}, \qquad \varphi = 1 - \frac{4}{3A} + \frac{4}{3A^4}$$

Параметр A представляет собой параметр N_{La}'', определенный по диаметру трубы и, следовательно, равный p/p_0 (где p_0 — давление, затрачиваемое на преодоление предельного напряжения сдвига).

При структурном режиме движения путем сопоставления с формулой Букингама получим для λ следующее выражение:

$$\lambda = \frac{64}{N_{\mathrm{Re}}'} \tag{13}$$

При движении вязкой жидкости $B = 1$, $\varphi = 1$, так как $A = \infty$ ($r_0 = 0$), формула (12) превращается в обычную формулу Дарси-Вейсбаха, а формула (13) превращается в обычную формулу Стокса.

Поступила 5 V 1954