Прикладная математика и механика. Том XIX, 1955
Институт механики Академии наук Союза ССР

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ТЕОРИИ ВОЛН НА ПОВЕРХНОСТИ ОГРАНИЧЕННОГО ОБЪЕМА ЖИДКОСТИ

Н. Н. Моисеев

(Москва)

1. При исследовании различных устройств, демпфирующих качку корабля, могут встретиться следующие задачи (фиг. 1).

I. Определить движение тяжелой жидкости в открытом сосуде τ, если на дуге DC давление есть заданная периодическая функция времени:

$$p = -\rho g y + \rho c \cos \omega t \qquad (1)$$

II. Определить возможные периодические движения жидкости в сосуде при условии постоянства давления на дуге DC:

$$p = -\rho g y \qquad (2)$$

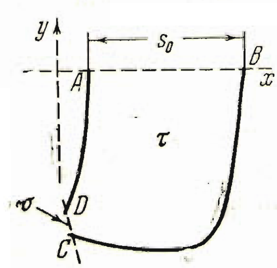


Рис. 1

Ниже исследуются эти вопросы в обычных предположениях плоской задачи линейной теории волн.

2. Рассмотрим неоднородную задачу. Определим периодическое движение жидкости частоты ω. Будем искать решение в виде $\varphi = \varphi_0 \sin \omega t$. Используя интеграл Коши-Лагранжа, мы придем к следующей краевой задаче для функции φ_0:

$$\frac{\partial \varphi_0(Q)}{\partial y} = \nu \varphi_0(Q) \qquad \left(\nu = \frac{\omega^2}{g}\right) \qquad \text{на свободной поверхности (дуга } AB)$$

$$\frac{\partial \varphi_0(Q)}{\partial n} = 0 \quad \left(\begin{matrix}\text{на стенках сосуда}\\ \text{дуги } AD \text{ и } BC\end{matrix}\right), \qquad \varphi_0(Q) = -\frac{c}{\omega} \quad \text{на дуге } DC \qquad (3)$$

Будем предполагать, что дуга DC является либо дугой окружности, либо отрезком прямой (не представляет принципиального труда рассмотреть и более общий случай аналитической дуги). Последнее из условий (3) позволяет продолжить функцию φ_0 через дугу DC. Обозначим через τ' область, симметричную τ; A' и B' будут означать точки, симметричные A и B. Используя принцип симметрии, найдем, что функция φ_0 удовлетворяет на границах области $\tau + \tau'$ следующим условиям:

$$\frac{\partial \varphi_0(Q)}{\partial n} - \nu \varphi_0(Q) = 0 \quad \text{на дуге } AB, \qquad \frac{\partial \varphi_0(Q)}{\partial n} = 0 \quad \text{на дугах } ADA' \text{ и } BCB' \qquad (4)$$

$$-\frac{\partial \varphi_0(Q)}{\partial n} + \nu \varphi_0(Q) + \frac{2\nu c}{\omega} = 0 \quad \text{на дуге } A'B'$$

Вводя функцию Грина задачи Неймана для области $\tau+\tau'-H$, получи

$$\varphi_0(Q)=\nu\int\limits_{S_0}H(Q;P)\varphi_0(P)\,ds_P-\nu\int\limits_{S_0'}H(Q;P)\varphi_0(P)\,ds_P-\frac{2\nu c}{\omega}\int\limits_{S_0'}H(Q;P)\,ds_P.$$

Обозначим

$$F(Q)=-\frac{2\nu C}{\omega}\int\limits_{S_0'}H(Q;P)\,ds_P,\quad H^*(P;Q)=\begin{cases}H(P;Q) & \text{для точки } Q \text{ на дуге } AB\\ -H(P;Q) & \text{для точки } Q \text{ на дуге } A'B'\end{cases}$$

Тогда

$$\varphi_0(Q)=\nu\int\limits_{S_0+S_0'}H^*(Q;P)\varphi_0(P)\,ds_P+F(Q)\tag{5}$$

Задача определения $\varphi_0(Q)$ сводится к решению интегрального уравнения Фредгольма, которое получается, если в (5) принять, что точка Q лежит на дугах AB и $A'B'$. Его решение существует для всех ν, не являющихся собственными числами уравнения

$$\varphi_n(Q)=\lambda_n\int\limits_{S_0+S_0'}H^*(Q;P)\varphi_n(P)\,ds_P\tag{6}$$

Если $\nu=\lambda_n$, то имеет место резонансный случай. Полученное таким образом решение задачи I не единственно: решением будет любая функция вида

$$\varphi_n=\varphi_0\sin\sqrt{\nu g}\,t+\varphi_n\sin\sqrt{\lambda_n g}\;t$$

гармонические функции $\varphi_n(Q)$, определенные равенством (6) для всех точек области $\tau+\tau'$, определяют потенциал свободных колебаний. Очевидно, что в точках дуги CD $\varphi_n(Q)=0$ и, следовательно, на этой части поверхности давление постоянно и равно $-\rho gy$. Функция $\varphi_n(Q)$ решает задачу II. В самом деле, разыскивая ее решение в виде $\varphi=\varphi^*\sin\omega t$, найдем из выражения интеграла Коши для точек дуги CD: $\varphi^*\omega\cos\omega t=0$, откуда и следует $\varphi^*=\varphi_n$. Полученные результаты сформируем в виде следующей теоремы.

Теорема. Частоты ω_n свободных колебаний в открытом сосуде при условиях задачи II равны $\omega_n=\sqrt{\lambda_n g}$, где λ_n — собственные числа интегрального уравнения (6). Вынужденные колебания при условиях задачи I могут иметь место с любыми частотами $\omega\neq\omega_n$. Потенциал скоростей в этом случае имеет вид: $\varphi=\varphi_0\sin\omega t$, где φ_0 вычисляются по формуле (5).

3. Пусть $\zeta=f(z)$ реализует конформное преобразование области τ на некоторый прямоугольник (фиг. 2). Тогда задачи I и II могут быть сведены к решению некоторой бесконечной системы алгебраических уравнений. Ограничимся решением однородной задачи. Краевые условия на границах прямоугольника $A''B''C''C''$ будут

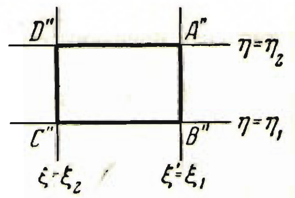
$$\frac{\partial\varphi_0}{\partial\eta}=0,\qquad \text{если}\quad \eta=\begin{cases}\eta_1\\ \eta_2\end{cases}$$

$$\varphi_0=0,\qquad \text{если } \xi=\xi_1,\qquad \frac{\partial\varphi_0}{\partial\xi}-\nu h(\xi_1,\eta)\varphi_0=0,\qquad \text{если}\quad \xi=\xi_2\tag{7}$$

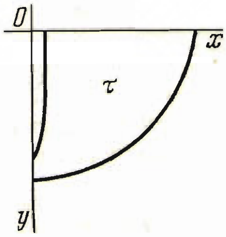
где $h(\xi, \eta)$ — коэффициент Ламе. Он характеризует растяжение и равен $|f'(z)|$. Будем искать решение в виде

$$\varphi_0 = \sum \frac{a_n \operatorname{sh} K_n (\xi - \xi_1) N \cos K_n (\eta - \eta_1)}{\operatorname{ch} K_n (\xi_2 - \xi_1)}, \qquad K_n = \frac{n\pi}{\eta_2 - \eta_1}, \qquad N = \sqrt{\frac{2}{\eta_2 - \eta_1}}$$

Функция φ_0 удовлетворяет первым двум условиям (7).



Фиг. 2



Фиг. 3

Система $\{\psi_n = N \cos K_n (\eta - \eta_1)\}$ — полная, ортонормированная на $[\eta_1, \eta_2]$. Положим

$$h\psi_m = \sum C_{mn} \psi_n$$

Для определения a_n будем иметь систему

$$[K_n \operatorname{cth} K_n (\xi_2 - \xi_1) - \nu C_{nn}] a_n - \nu \sum_{m \neq n} a_m C_{mn} = 0 \qquad (m, n = 1, 2, \ldots) \tag{8}$$

Система (8) всегда разрешима. Для этого достаточно доказать сходимость двойного ряда

$$S = \sum_n \sum_{m \neq n} \frac{C_{mn}^2}{[K_n \operatorname{cth} K_n (\xi_2 - \xi_1) - \nu C_{nn}]} \qquad \text{для} \quad \nu \neq \frac{K_n \operatorname{cth} K_n (\xi_2 - \xi_1)}{C_{nn}}$$

Но

$$\sum C_{mn}^2 = \int_{\eta_1}^{\eta_2} (h\psi_n)^2 \, d\eta < M$$

следовательно,

$$S < M \sum_n \frac{1}{[K_n \operatorname{cth} K_n (\xi_2 - \xi_1) - \nu C_{nn}]^2}$$

Но C_{nn} ограничены в своей совокупности, а ряд

$$\sum \frac{1}{K_n^2}$$

сходится

Рассмотрим в качестве примера сосуд, ограниченный дугами софокусных эллипсов (фиг. 3). Пусть

$$x = c \operatorname{ch} \eta \cos \xi, \qquad y = c \operatorname{sh} \eta \sin \xi \tag{9}$$

конформным преобразованием (9) область перейдет в прямоугольник, ограниченный прямыми

$$\xi_2 = 0, \qquad \xi_1 = \frac{1}{2}\pi, \qquad \eta = \eta_1, \qquad \eta = \eta_2$$

коэффициент Ламе будет

$$h = \sqrt{\operatorname{ch}^2 \eta - \cos^2 \xi}, \qquad (h)_{\xi=0} = \operatorname{sh} \eta$$

Задача сведется к отысканию собственных чисел матрицы системы (8), в которой

$$C_{nm} = \frac{\eta_2 - \eta_1}{2} \int\limits_{\eta_1}^{\eta_2} \operatorname{sh} \eta \cos(\eta - \eta_1) K_n \cos(\eta - \eta_1) K_m \, d\eta$$

Примечание. Все выводы п. 2 данной работы можно распространить и на случай пространственной задачи, так как условие $\varphi_0 = c$ на σ позволяет использовать аппарат аналитического продолжения, что же касается результатов п. 3, то в данном случае возможности сведения задачи к бесконечной системе алгебраических уравнений значительно более ограничены. Повидимому, практическая применимость этих методов исчерпывается тем случаем, когда границами области являются координатные поверхности изотермической системы координат, т. е. системы координат, в которой все три коэффициента Ламе равны между собой.

4. Возможны различные обобщения рассмотренной задачи. Так, например, условие (1) может быть заменино условием

$$p = -\rho g y + \rho c(P) \cos \omega t \tag{10}$$

которое имеет место для точек дуги CD. Условие (10) будет означать, что давление на дуге CD зависит от течения жидкости вне полости τ.

В условии (3) постоянная c будет некоторой функцией точки P. Эта задача может быть сведена к рассмотренной. В самом деле, условимся в существовании некоторого оператора, который по значениям функции Φ на дуге DC определяет некоторую гармоническую функцию в области τ_1, содержащую τ. Например, можно положить

$$\Phi(Q) = \int\limits_{CD} \frac{\partial}{\partial n} (\ln r_{pq}) \frac{c(P)}{\omega} ds_p$$

Тогда, положив $\varphi_0 = \Phi + \psi$, получим, что гармоническая функция ψ должна решать следующую краевую задачу:

$$\frac{\partial \psi(Q)}{\partial y} - \nu \psi(Q) = -\left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} - \nu \Phi(Q)\right) \quad \text{на дуге } AB$$

$$\frac{\partial \psi(Q)}{\partial n} = -\frac{\partial \Phi(Q)}{\partial n} \quad \text{на дугах } AD \text{ и } BC, \qquad \psi(Q) = 0 \quad \text{на дуге } DC.$$

Повторяя рассуждения п. 2, мы придем к интегральному уравнению (5), в котором функция $F(Q)$ определяется следующим образом:

$$F(Q) = -\int\limits_{S_0} \left\{\frac{\partial \Phi(P)}{\partial y} - \nu \Phi(P)\right\} H(P;\ Q)\, ds_p - \\ - \int\limits_{S_0'} \left\{\frac{\partial \Phi(P)}{\partial y} - \nu \Phi(P)\right\} H(P';\ Q)\, ds_{p'} - \\ - \int\limits_{CA+DB} \frac{\partial \Phi(P)}{\partial n} H(P;\ Q)\, ds_p - \int\limits_{CA'+DB'} \frac{\partial \Phi(P)}{\partial n} H(P';\ Q)\, ds_{p'}$$

где P' — точка, симметричная P. Таким образом, предложение, сформулированное в конце п. 2, сохраняет свою силу и в этом случае.

Для конкретных вычислений можно снова воспользоваться конформными преобразованиями. Пусть функция $\zeta = f(z)$ попрежнему осуществляет отображение области τ на прямоугольных a_1, b_1, c_1, d_1.

Без ограничения общности можно принять $b_1 = \pi$, $d_1 = -l$. Тогда в плоскости $\zeta = u + iv$ мы придем к следующей краевой задаче:

$$\frac{\partial\psi}{\partial n} = 0, \quad \begin{cases} u = 0 \\ u = \pi \end{cases}$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial v} - \nu h(u)\psi = 0 \quad \text{при} \quad v = 0, \qquad \psi = \frac{c(u)}{\omega} \quad \text{при} \quad u = -l$$

Полагая

$$\psi(uv) = \sum \cos nu \, (a_n e^{-nv} + be^{nv})$$

$$h(u)\cos nu = \sum \beta_{mn} \cos mu, \qquad \frac{c(u)}{\omega} = \sum \gamma_n \cos nu$$

получим следующую бесконечную систему алгебраических уравнений:

$$n(b_n - a_n) + \nu \sum \beta_{nm}(a_m + b_m) = 0, \qquad b_n = \gamma_n e^{-nl} - a_n e^{-2nl} \tag{11}$$

Исключая b_n и пользуясь рассуждениями п. 3 настоящей работы, мы легко докажем разрешимость системы (11).

5. В том случае, если сосуд совершает малые колебания около положения равновесия $v_n = v_n^0 \cos \omega t$, то на боковых стенках потенциал φ_0 должен удовлетворять условиям

$$\frac{\partial\varphi_0}{\partial n} = \bar{v}_0 \bar{n}^\circ \qquad (\bar{v}_0 = v_x \bar{x}^\circ + v_y \bar{y}^\circ + \bar{\omega}_0 \bar{r})$$

Здесь x°, y° — единичные векторы, ω_0 — вектор угловой скорости, n° — единичный вектор внешней нормали, r — радиус-вектор точек контура области S. Естественно положить $\varphi_0 = v_x x + v_y y + \omega_0 \chi + \psi = \Phi + \psi$, где χ — функция, гармоническая внутри τ, нормальная производная которой удовлетворяет на границе области следующему условию:

$$\frac{\partial x}{\partial n} = (\xi - y_0)\beta - (\eta - \eta_0)\alpha$$

где $x_0 y_0$ — координаты точки, через которую проходит ось вращения, α, β — направляющие косинусы нормали, ξ, η — координаты точек границы τ. Для функции ψ мы получаем следующую краевую задачу:

$$\psi(P) = \frac{c(P)}{\omega} - \Phi(P) \qquad \text{(для точек дуги } DC\text{)}$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial n} = 0 \qquad \text{(в точках, лежащих на дугах } AD \text{ и } BC\text{)} \tag{12}$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial y} - \nu\psi = -\frac{\partial\Phi}{\partial y} + \nu\Phi \qquad \text{при } y = 0$$

Краевая задача (12) ничем существенным не отличается от краевой задачи, рассмотренной в п. 4 данной работы.

6. К задачам, рассмотренным в данной работе, сводятся при известных упрощающих предположениях некоторые из задач теории демпфирующих цистерн. Однако эти задачи имеют и самостоятельный механический смысл: потенциал φ, который мы разыскивали, характеризует течение жидкости в движущемся сосуде, у которого имеется отверстие, закрытое пленкой или безмоментной мембраной.

Поступила 13 XII 1954