Прикладная математика и механика. Том XIX, 1955
Институт механики Академии наук Союза ССР

НЕУСТАНОВИВШЕЕСЯ ГЛИССИРОВАНИЕ ПО ВЗВОЛНОВАННОЙ ПОВЕРХНОСТИ ТЯЖЕЛОЙ ЖИДКОСТИ

М. Д. Хаскинд

(Одесса)

Рассматривается плоская задача о колебаниях слабо изогнутого глиссирующего контура по поверхности тяжелой жидкости при заданной системе набегающих регулярных волн. Для ее решения вводится в рассмотрение функциональная комбинация комплексного переменного, определение которой сводится к решению бесконечной системы уравнений относительно коэффициентов разложения этой функции в ряд. Дается анализ разрешимости этой системы уравнений (в окрестности предельных значений параметров задачи), определяются возмущенное волновое движение тяжелой жидкости и действующие на глиссирующий контур гидродинамические силы.

При помощи развитого здесь метода построения точного решения задачи могут быть рассчитаны все гидродинамические силы.

1. Пусть 2а — проекция смоченной длины слабо изогнутого контура на невозмущенную свободную поверхность, которую считаем совпадающей с осью x, направленной в сторону движения, причем ось y направлена вертикально вверх и проходит через середину проекции смоченной длины. Пусть далее u — горизонтальная скорость середины глиссирующего контура, а Φ — потенциал скоростей возмущенного волнового движения тяжелой жидкости, тогда в подвижной системе координат имеем следующие линеаризированные условия:

$$a\frac{\partial\Phi}{\partial t}-u\frac{\partial\Phi}{\partial x}+agY(x,t)=0 \quad \text{при } y=0,\ |x|>1 \tag{1.1}$$

$$a\frac{\partial Y}{\partial t}-u\frac{\partial Y}{\partial x}=\frac{\partial\Phi}{\partial y} \quad \text{при } y=0 \tag{1.2}$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial y}=aV_n(x,t) \quad \text{при } y=0,\ |x|<1 \tag{1.3}$$

где $x=x^*/a$ и $y=y^*/a$ — безразмерные координаты, g — ускорение силы тяжести, $Y(x,t)$ — возвышение уровня жидкости и $V_n(x,t)$ — нормальная составляющая скоростей точек глиссирующего контура.

В дальнейшем для простоты исследования ограничимся рассмотрением случая $a=\text{const}$ и $u=\text{const}$ и полагаем, что возмущенное движение представляет собой колебательный процесс около установившегося движения. В соответствии с этим положим

$$aV_n(x,t)=av_{n0}(x)+V(x)e^{j\sigma t},\qquad Y(x,t)=y_0(x)+y(x)e^{j\sigma t}$$

$$\Phi(x,y,t)=\varphi_0(x,y)+\varphi(x,y)e^{j\sigma t}\qquad (j=\sqrt{-1}) \tag{1.4}$$

причем здесь и дальше в комплексных выражениях, содержащих экспоненциально-временной множитель $e^{j\sigma t}$, следует рассматривать только действительную часть.

Подставив (1.4) в (1.1)—(1.3), получим две системы условий — одна для определения установившегося движения и вторая для определения возмущенной части движения:

$$\frac{\partial\varphi_0}{\partial x} - \mu u y_0 = 0 \qquad \text{при } y=0,\ |x|>1,$$

$$\frac{\partial\varphi_0}{\partial y} = a v_{n0}(x) \text{ при } y=0,\ |x|<1 \ \left(u y_0(x) = \psi_0(x, 0),\ \ \mu = \frac{ga}{u^2}\right) \tag{1.5}$$

$$u\frac{dy_0}{dx} = -\frac{\partial\varphi_0}{\partial y} = \frac{\partial\psi_0}{\partial x} \qquad \text{при } y=0$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} - j\omega\varphi - \mu u y(x) = 0 \qquad \text{при } y=0,\ |x|>1$$

$$u\left(\frac{dy(x)}{dx} - j\omega y(x)\right) = -\frac{\partial\varphi}{\partial y} \qquad \text{при } y=0 \ \left(\omega = \frac{\sigma a}{u}\right) \tag{1.6}$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y} = V(x) \qquad \text{при } y=0,\ |x|<1$$

где $\psi_0(x, y)$ – функция тока при установившемся глиссировании.

Задача об установившемся глиссировании по поверхности тяжелой жидкости рассматривалась Л. И. Седовым [1]. Впоследствии иными методами эта задача решалась в работах Н. Е. Кочина [2], Л. Н. Сретенского [3], а для случая конечной глубины жидкости ее решение проведено в работе автора [4]. Задача же о неустановившемся глиссировании по поверхности невесомой жидкости ($\mu = 0$) приводится к задаче о движении тонкого крыла с линией разрыва скоростей в несжимаемой жидкости. Теория этого движения разрабатывалась в работах Прандтля [5], Бирнбаума [6], Вагнера [7], Глауэрта [8], М. В. Келдыша и М. А. Лаврентьева [9] и Л. И. Седова [10], причем в последней из цитированных работ разработана теория неустановившегося глиссирования по поверхности невесомой жидкости в общем случае, когда a и u являются переменными величинами, и детально изучен характер гидроаэродинамических сил. В настоящей работе строим решение поставленной задачи для случая тяжелой жидкости.

2. Проведем исключение функции $y(x)$ в условиях (1.6). С этой целью рассмотрим второе из этих условий как дифференциальное уравнение относительно $y(x)$, тогда получим

$$u y(x) = e^{j\omega x}\left(u y_1 e^{-j\omega} - \int_1^x e^{-j\omega x}\frac{\partial\varphi}{\partial y}dx\right) \tag{2.1}$$

где y_1 — значение функции $y(x)$ в точке $x = 1$.

Подставив выражение (2.1) в первое условие из (1.6), найдем

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} - j\omega\varphi + \mu e^{j\omega x}\int_1^x e^{-j\omega x}\frac{\partial\varphi}{\partial y}dx - \mu u y_1 e^{j\omega(x-1)} = 0 \qquad \text{при } y=0,\ |x|>1 \tag{2.2}$$

Для построения решения будем пользоваться функцией $w(z) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y)$ комплексного переменного $z = x + iy$, где $i = \sqrt{-1}$ — мнимая единица, не взаимодействующая с мнимой единицей $j = \sqrt{-1}$.

Рассмотрим далее функцию

$$\chi(z) = \frac{dw}{dz} - j\omega w + i\mu e^{j\omega z}\int_1^z e^{-j\omega z}\frac{dw}{dz}dz - \mu(uy_1 - i\varphi_1)e^{j\omega(z-1)} \tag{2.3}$$

где φ_1 — значение функции φ в точке (1.0).

При помощи функции $\chi(z)$ условие (2.2) можно представить в виде

$$\operatorname{Re}\chi(z) = 0) \qquad \text{при } y = 0,\ |x| > 1 \tag{2.4}$$

На основании этого условия функция $\chi(z)$ аналитически продолжается в верхнюю полуплоскость, и в результате получаем голоморфную функцию во всей плоскости z вне отрезка $(-1, +1)$ оси x.

Из соотношения (2.3) имеем

$$\frac{d\chi}{dz} - j\omega\chi = \frac{d^2w}{dz^2} - 2j\omega\frac{dw}{dz} - \omega^2 w + i\mu\frac{dw}{dz} \tag{2.5}$$

Принимая во внимание, что волновой процесс затухает при $y \to -\infty$, т. е. $dw/dz \to 0$ при $z \to -i\infty$, имеем следующее разложение функции (2.5) в окрестности бесконечно удаленной точки:

$$\frac{d\chi}{dz} - j\omega\chi = \frac{ic_1}{z} + \frac{ic_2}{z^2} + \ldots \tag{2.6}$$

где в силу условия (2.4) коэффициенты $c_1, c_2, \ldots$ действительны относительно мнимой единицы i.

На основании разложения (2.6) и условия (2.4) убеждаемся, что функцию $\chi(z)$ можно представить в виде

$$\chi(z) = F(z) + iCe^{j\omega z} \tag{2.7}$$

где C — действительная относительно i постоянная, а $F(z)$ — голоморфная функция во всей плоскости z вне отрезка $(-1, +1)$ оси x, для которой справедливо следующее разложение в окрестности бесконечно удаленной точки:

$$F(z) = \frac{i\gamma_1}{z} + \frac{i\gamma_2}{z^2} + \ldots \tag{2.8}$$

Здесь в согласии с (2.4) все γ_k $(k = 1, 2, 3, \ldots)$ — действительные величины относительно мнимой единицы i.

Функция $\chi(z)$, а вместе с ней и $F(z)$ обращаются в бесконечность при $z = \pm 1$. Для построения однозначной функции, принимающей всюду конечные значения, поступим так же, как и в цитированной выше работе Л. И. Седова [1], и введем другую функцию $f(z) = r + is$, связанную с $F(z)$ и $\chi(z)$ уравнениями

$$F(z) = \frac{df}{dz} + \frac{i\gamma_1}{\sqrt{z^2-1}}, \quad \chi(z) = \frac{df}{dz} + \frac{i\gamma_1}{\sqrt{z^2-1}} + iCe^{j\omega z} \tag{2.9}$$

и условием $f = 0$ при $z = \infty$.

Очевидно, что функция $f(z)$ однозначна и голоморфна всюду вне отрезка $(-1, +1)$ оси x и ограничена в точках этого отрезка.

На основании (2.4) для функции $f(z)$ имеем условие

$$r = 0 \qquad \text{при } y = 0, \ |x| > 1 \tag{2.10}$$

Составим граничное условие для функции r на отрезке $(-1, +1)$ оси x. С этой целью, отделяя в (2.9) действительную и мнимую части и принимая во внимание (2.3), будем иметь

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} - j\omega\varphi + \mu e^{j\omega x}\int_1^x e^{-j\omega x}\frac{\partial \varphi}{\partial y}\,dx - \mu\, u y_1 e^{j\omega(x-1)} + \frac{\gamma_1}{\sqrt{1-x^2}} \tag{2.11}$$

$$\frac{\partial r}{\partial y} = \frac{\partial \varphi}{\partial y} + j\omega\psi - \mu\, e^{j\omega x}\int_1^x e^{-j\omega x}\frac{\partial \varphi}{\partial x}\,dx - \mu\varphi_1\, e^{j\omega(x-1)} + Ce^{j\omega x} \tag{2.12}$$

Функция ψ на отрезке $(-1, +1)$ оси x известна с точностью до постоянной:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x} = V(x), \qquad \psi = \psi_1 - \int_1^x V(x)\,dx \tag{2.13}$$

где ψ_1 — значение функции ψ в точке (1.0). Следовательно, в выражениях (2.11) и (2.12) неизвестной является функция φ, которую можно исключить. Из выражения (2.11) получаем

$$\varphi = e^{j\omega x}\int_1^x e^{-j\omega x}\frac{\partial r}{\partial x}\,dx + e^{j\omega(x-1)}\left[\varphi_1 - \mu u y_1(1-x)\right] - e^{j\omega x}\int_1^x e^{-j\omega x} Z(x)\,dx \tag{2.14}$$

где $Z(x)$ определяется выражением

$$Z(x) = \mu e^{j\omega x}\int_1^x e^{-j\omega x} V(x)\,dx + \frac{\gamma_1}{\sqrt{1-x^2}} \tag{2.15}$$

Подставив теперь выражение (2.14) в (2.12), получим условие для r на отрезке $(-1, +1)$:

$$\frac{\partial r}{\partial y} + \mu e^{j\omega x}\left(\int_1^x e^{-j\omega x}\frac{\partial r}{\partial x}\,dx + j\omega\int_1^x\int_1^{x'} e^{-j\omega x'}\frac{\partial r}{\partial x'}\,dx'\,dx\right) = \Phi_0(x) \tag{2.16}$$

Здесь

$$\Phi_0(x) = V(x) + j\omega\left(\psi_1 - \int_1^x V(x)\,dx\right) +$$
$$+ Ce^{j\omega x} - \mu\varphi_1\, e^{j\omega(x-1)}\left[1 - j\omega(1-x)\right] + \mu^2 u y_1 e^{j\omega(x-1)}(1-x)\left(1 + j\omega\frac{3-x}{2}\right) +$$
$$+ \mu e^{j\omega x}\left[\int_1^x e^{-j\omega x} Z(x)\,dx + j\omega\int_1^x\int_1^{x'} e^{-j\omega x'} Z(x')\,dx'\,dx\right] \tag{2.17}$$

Функцию $f(z)$ и ее производную будем определять при помощи разложений в ряды:

$$\begin{aligned} f(z) &= i\sum_{n=1}^{\infty} a_n\left(z - \sqrt{z^2-1}\right)^n \\ \frac{df}{dz} &= -\frac{i}{\sqrt{z^2-1}}\sum_{n=1}^{\infty} n a_n\left(z - \sqrt{z^2-1}\right)^n \end{aligned} \tag{2.18}$$

Причем из условия (2.10) следует, что все a_n — действительные коэффициенты. Подходя к отрезку $(-1, +1)$ снизу, находим

$$\lim_{z \to x - i0} (z - \sqrt{z^2 - 1}) = x + i\sqrt{1 - x^2} = e^{i\theta}, \quad x = \cos\theta \quad (0 < \theta < \pi)$$

и соответственно с этим имеем

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{1}{\sin\theta} \sum_{n=1}^{\infty} n a_n \cos n\theta, \quad \frac{\partial r}{\partial y} = -\frac{1}{\sin\theta} \sum_{n=1}^{\infty} n a_n \sin n\theta \tag{2.19}$$

Разложим далее в ряд Фурье по синусам в промежутке $(0, \pi)$ следующие функции:

$$\Phi_0(\cos\theta)\sin\theta = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\theta \tag{2.20}$$

$$\mu\, m e^{j\omega\cos\theta} \sin\theta \left[\int_0^{\theta} e^{-j\omega\cos\theta} \cos m\theta\, d\theta + j\omega \int_0^{\theta}\int_0^{\theta'} e^{-j\omega\cos\theta'} \cos m\theta'\, d\theta'\, d(\cos\theta) \right] = \\ = \sum_{n=1}^{\infty} A_{nm} \sin n\theta \tag{2.21}$$

$$A_{nm} = \frac{2\mu m}{\pi} \int_0^{\pi} e^{j\omega\cos\theta} \sin n\theta \sin\theta \left\{ \int_1^{\theta} e^{-j\omega\cos\theta'} \cos m\theta'\, d\theta' + \right. \\ \left. + j\omega \int_0^{\theta} \left[\int_0^{\theta'} e^{-j\omega\cos\theta''} \cos m\theta''\, d\theta'' \right] d(\cos\theta') \right\} d\theta \tag{2.22}$$

Подставив разложения (2.19)—(2.21) в условие (2.16) и приравняв нулю общий коэффициент при $\sin n\theta$, получим бесконечную систему уравнений для коэффициентов a_n:

$$a_n + \sum_{m=1}^{\infty} C_{nm} a_m + B_n = 0 \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots) \tag{2.23}$$

Здесь

$$C_{nm} = \frac{A_{nm}}{n}, \qquad B_n = \frac{b_n}{n} \tag{2.24}$$

Для вычисления коэффициентов A_{nm} произведем в (2.22) интегрирование по частям, после чего выражение для A_{nm} расчленяется на две части:

$$A_{nm} = A_{nm}^{(1)} + A_{nm}^{(2)} \tag{2.25}$$

где коэффициенты $A_{nm}^{(1)}$ отличны от нуля только при n и m одинаковой четности:

$$A_{2s+1,\, 2p+1}^{(1)} = \frac{2\mu}{\pi} \left[\frac{1}{4(s+p+1)^2 - 1} - \frac{1}{4(s-p)^2 - 1} \right] \\ A_{2s,\, 2p}^{(1)} = \frac{2\mu}{\pi} \left[\frac{1}{4(s+p)^2 - 1} - \frac{1}{4(s-p)^2 - 1} \right] \tag{2.26}$$

а коэффициенты $A_{nm}^{(2)}$ определяются из формулы

$$A_{nm}^{(2)} = -\frac{2\mu}{\pi}\int_0^{\pi} e^{j\omega\cos\theta}\sin n\theta\sin\theta\left\{2\int_0^{\theta}\sin m\theta'\, d\left(e^{-j\omega\cos\theta'}\right) + \right.$$

$$\left. + j\omega\int_0^{\theta}\left[\int_0^{\theta'}\sin m\theta''\, d\left(e^{-j\omega\cos\theta''}\right)\right] d(\cos\theta')\right\} d\theta \tag{2.27}$$

Дальнейший расчет коэффициентов $A_{nm}^{(2)}$ осуществляется при помощи разложения:

$$\frac{d}{d\theta}\left(e^{-j\omega\cos\theta}\right) = -\sum_{k=1}^{\infty} k(-j)^k J_k(\omega)\sin k\theta \tag{2.28}$$

где $J_k(\omega)$ — функция Бесселя.

Подставив разложение (2.28) в (2.27) и произведя необходимые вычисления, получим

$$A_{nm}^{(2)} = \frac{\mu}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty} k(-j)^k J_k(\omega)\left\{2C_{nm}^{-k} - C_{nm}^{k}\right) -$$

$$-\frac{j\omega}{2}\left[\frac{1}{m-k}\left(C_{nm}^{-k-1} - C_{nm}^{-k+1}\right) - \frac{1}{m+k}\left(C_{nm}^{k-1} - C_{nm}^{k+1}\right)\right]\Big\} \tag{2.29}$$

Здесь

$$C_{nm}^{\alpha} = \frac{1}{4(m+\alpha)}\left[E_{m+\alpha+n-1} + E_{m+\alpha-n+1} - E_{m+\alpha+n+1} - E_{m+\alpha-n-1}\right] \tag{2.30}$$

$$E_p(\omega) = \int_0^{\pi}\sin p\theta\, e^{j\omega\cos\theta}\, d\theta$$

причем величины $E_p(\omega)$ вычисляются элементарно. Имеем

$$E_p(\omega) = -j\frac{dE_{p-1}(\omega)}{d\omega} + \frac{j(p-1)}{\omega}E_{p-1}(\omega) + \frac{j}{\omega}\left[(-1)^{p-1}e^{-j\omega} - e^{j\omega}\right] \tag{2.31}$$

$$E_1(\omega) = 2\frac{\sin\omega}{\omega}$$

Выясним теперь условия разрешимости бесконечной системы уравнений (2.23). Прежде всего при $\omega = 0$ все $A_{nm}^{(2)} = 0$ и поэтому система (2.23) принимает вид, совпадающий с системой уравнений для случая установившегося глиссирования [1], и разрешимость которой доказана [11]. Следовательно, при достаточно малых значениях параметра ω система уравнений (2.23) удовлетворяет условиям разрешимости при помощи бесконечных определителей и имеет единственное решение. Точно так же в другом предельном случае при $\mu = 0$ имеем $A_{nm} = 0$ и $a_n = -B_n$. Это означает, что при малых μ и любых ω система (2.23) является вполне регулярной. Наконец, в случае отсутствия поступательного движения, т. е. при $u = 0$ и $\omega^2/\mu = \sigma^2 a/g = \nu$, условие (2.16) после осуществления предельного перехода принимает вид:

$$\frac{\partial r}{\partial x} + \nu s = \Phi_1 \tag{2.32}$$

Определение коэффициентов a_n по условию (2.32) проведено в работах [12, 13], причем в работе [13] доказана разрешимость соответствующей бесконечной системы уравнений для этого случая. Таким образом, из уравнений (2.23) коэффициенты a_n определяются как функции параметров μ и ω и линейно зависят от пяти постоянных: φ_1, ψ_1, y_1, γ_1 и C.

3. Для определения указанных постоянных необходимо найти выражение функции $w(z)$ через коэффициенты a_n. Из соотношений (2.5) и (2.9) имеем следующее дифференциальное уравнение для определения функции:

$$\frac{d^2w}{dz^2} - 2j\omega\frac{dw}{dz} - \omega^2 w + i\mu\frac{dw}{dz} = \left(\frac{d}{dz} - j\omega\right)\left(\frac{df}{dz} + \frac{i\gamma_1}{\sqrt{z^2-1}}\right) \tag{3.1}$$

Чтобы решить это уравнение, необходимо произвести анализ решений соответствующего однородного уравнения. Отделяя в последнем действительную и мнимую части относительно мнимой единицы j, легко устанавливаем общее решение однородного уравнения:

$$w(z) = (1-ij)(A_1e^{-i\nu_1 z} + A_2e^{-i\nu_2 z}) + (1+ij)(A_3e^{-i\nu_3 z} + A_4e^{-i\nu_4 z}) \tag{3.2}$$

где A_k — действительные постоянные относительно мнимой единицы j, а величины ν_k определяются выражениями

$$\nu_{12} = \frac{\mu - 2\omega \pm \sqrt{\mu^2 - 4\mu\omega}}{2}, \qquad \nu_{34} = \frac{\mu + 2\omega \pm \sqrt{\mu^2 + 4\mu\omega}}{2} \tag{3.3}$$

Заметим, что действие оператора $1 \mp ij$ сводится к следующему:

$$(1 \mp ij)(C_1 + iC_2)e^{-i\nu z} = (1 \mp ij)(C_1 \pm jC_2)e^{\nu y \mp j\nu x}$$

$$(1 \mp ij)(A + iB) = (1 \mp ij)(A \pm jB) \tag{3.4}$$

Поэтому выражение (3.2) описывает четыре типа бегущих волн:

$$e^{\nu_{12}y + j(\sigma t - \nu_{12}x)}, \qquad e^{\nu_{34}y + j(\sigma t + \nu_{34}x)} \tag{3.5}$$

Возможность образования волн различных длин связано с дисперсными свойствами волн на поверхности тяжелой жидкости [14].

Решение уравнения (3.1) при помощи (3.2) осуществляется обычным путем, но при этом следует учесть характер излучения, подробный анализ которого проведен в работе [14]. Из этого анализа следует, что в случае $\mu \neq 0$ нижние пределы интегралов, стоящих коэффициентами при $\exp(-i\nu_k z)$, следует выбрать следующими: для ν_{12} соответственно $+\infty$ и $-\infty$, а для ν_{34} $+\infty$ и $+\infty$. При $\mu = 0$ все нижние пределы интегралов следует взять равными $+\infty$. Приняв эти замечания во внимание и частично пользуясь (3.4), мы можем решение уравнения (3.1) представить в форме

$$w(z) = \frac{1-ij}{2\sqrt{\mu^2-4\mu\omega}}\left[(\nu_1+\omega)e^{-i\nu_1 z}\int_{\infty}^{z} F(z)e^{i\nu_1 z}dz - (\nu_2+\omega)e^{-i\nu_2 z}\int_{-\infty}^{z} F(z)e^{i\nu_2 z}dz\right] +$$

$$+ \frac{1+ij}{2\sqrt{\mu^2+4\mu\omega}}\left[(\nu_3-\omega)e^{-i\nu_3 z}\int_{\infty}^{z}(F(z)e^{i\nu_3 z}dz -\right.$$

$$\left. - (\nu_4-\omega)e^{-i\nu_4 z}\int_{\infty}^{z} F(z)e^{i\nu_4 z}dz\right] + w^*(z) \tag{3.6}$$

где

$$F(z)=\frac{df}{dz}+\frac{i\gamma_1}{\sqrt{z^2-1}}, \qquad w^*(z)=j\frac{g}{\sigma_0}r_0(1\mp ij)\,e^{-ikaz} \tag{3.7}$$

причем функция $w^*(z)$ характеризует систему регулярных волн, набегающих на глиссирующий контур. В выражении (3.7) для этой функции величина σ_0 есть истинная частота колебаний набегающих волн, $k=\sigma_0^2/g$ — волновое число, r_0 — полувысота волн, $\sigma=|\sigma_0\pm ku|$ — кажущаяся частота колебаний. Здесь верхний знак отвечает случаю, когда фазовая скорость волн $v_ф=g/\sigma_0$ совпадает по направлению с горизонтальной скоростью глиссирования, а нижний — когда эти скорости противоположно направлены. Если относительная фазовая скорость $v_r=v_ф-u$ совпадает по направлению со скоростью глиссирования, то в выражении (3.7) оператор $1\mp ij$ следует взять с верхним знаком, а в случае, когда скорости $v_r=|v_ф\mp u|$ и u противоположно направлены, берется нижний знак.

При $w^*(z)=0$ имеем вынужденное колебательное движение жидкости, обусловленное действующими извне на глиссирующий контур периодическими силами частоты σ. Как отмечалось в работе [14], образующиеся при этом волны в неподвижной системе координат имеют не только различную длину, но и различные частоты.

При $w^*(z)\neq 0$ вынужденное колебательное движение жидкости можно рассматривать как результат колебаний глиссирующего контура под воздействием регулярной системы набегающих волн частоты σ_0. В этом случае волновые числа ν_k определенным образом связаны с волновым числом k набегающих волн. В самом деле, при $\sigma=|\sigma_0-ku|$ имеем

$$\nu_1=ka+\mu-2\omega_0, \qquad \nu_2=ka \qquad \left(\omega_0=\frac{\sigma_0 a}{u},\ \mu ka=\omega_0^2,\ u<u_{гр}=\frac{1}{2}v_ф\right)$$

$$\nu_1=ka, \qquad \nu_2=ka-(2\omega_0-\mu) \qquad (u_{гр}<u<v_ф)$$

$$\nu_{34}=\frac{1}{2}\left[\mu+2(\omega_0-ka)\pm\sqrt{(\mu+2\omega_0)^2-8\omega_0^2}\right] \quad (u<v_ф)$$

$$\nu_{12}=\frac{1}{2}\left[\mu+2(\omega_0-ka)\pm\sqrt{(\mu+2\omega_0)-8\omega_0^2}\right] \quad (u>v_ф)$$

$$\nu_3=ka, \qquad \nu_4=ka-(2\omega_0-\mu)$$

а в случае $\sigma=\sigma_0+ku$

$$\nu_{12}=\frac{1}{2}\left[\mu-2(\omega_0+ka)\pm\sqrt{(\mu-2\omega_0)^2-8\omega_0^2}\right]$$

$$\nu_3=ka+\mu+2\omega_0, \qquad \nu_4=ka$$

Из (3.5) следует, что частота колебаний образующихся волн относительно неподвижной системы координат определяется выражением

$$\sigma_k=|\sigma_0\mp ku|\pm\frac{\nu_k u}{a}$$

Следовательно, образующиеся волны, кроме частоты σ_0, имеют еще и другие частоты.

Перейдем теперь к определению постоянных φ_1, ψ_1, y_1, γ_1 и C. Положим для этого в (3.6) $z=1$, тогда, принимая во внимание (3.4), получим следующие уравнения для определения постоянных φ_1 и ψ_1:

$$\varphi_1 = \frac{1}{2\sqrt{\mu^2-4\mu\omega}}\left[(\nu_1+\omega)(A_1+jB_1)-(\nu_2+\omega)(D_1+jD_2)\right]+$$
$$+\frac{1}{2\sqrt{\mu^2+4\mu\omega}}\left[(\nu_3-\omega)(A_3-jB_3)-(\nu_4-\omega)(A_4-jB_4)\right]+j\frac{g}{\sigma_0}r_0e^{\mp jka} \tag{3.8}$$

$$\psi_1 = -\frac{j}{2\sqrt{\mu^2-4\mu\omega}}\left[(\nu_1+\omega)(A_1+jB_1)-(\nu_2+\omega)(D_1+jD_2)\right]+$$
$$+\frac{j}{2\sqrt{\mu^2+4\mu\omega}}\left[(\nu_3-\omega)(A_3-jB_3)-(\nu_4-\omega)(A_4-jB_4)\right]\pm\frac{g}{\sigma_0}r_0e^{\mp jka} \tag{3.9}$$
$$\left(\sqrt{\mu^2-4\mu\omega}=j\sqrt{4\mu\omega-\mu^2},\ \text{если}\ \mu<4\omega\right)$$

Здесь введены обозначения

$$A_k+iB_k=e^{-i\nu_k}\int\limits_{\infty}^{1}F(z)\,e^{i\nu_k z}\,dz,\quad D_1+iD_2=e^{-i\nu_2}\int\limits_{-\infty}^{1}F(z)\,e^{i\nu_2 z}\,dz \tag{3.10}$$

Из формулы (3.6) находим

$$\frac{dw}{dz}-j\omega w=F(z)-\frac{j\mu(1-ij)}{2\sqrt{\mu^2-4\mu\omega}}\left[\nu_1e^{-i\nu_1 z}\int\limits_{\infty}^{z}F(z)\,e^{i\nu_1 z}zd-\nu_2e^{-i\nu_2 z}\int\limits_{-\infty}^{z}F(z)\,e^{i\nu_2 z}dz\right]+$$
$$+\frac{j\mu(1+ij)}{2\sqrt{\mu^2+4\mu\omega}}\left[\nu_3e^{-i\nu_3 z}\int\limits_{\infty}^{z}F(z)\,e^{i\nu_3 z}\,dz-\nu_4e^{-i\nu_4 z}\int\limits_{\infty}^{z}F(z)\,e^{i\nu_4 z}\,dz\right]+$$
$$+\frac{ga}{u}r_0(1\mp ij)\,e^{-ikaz} \tag{3.11}$$

На основании первого условия из (1.6) имеем

$$\mu u y_1=\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}-j\omega\varphi\right)_{x=1}=\mathrm{Re}\left(\frac{dw}{dz}-j\omega w\right)_{z=1}$$

Поэтому, полагая в (3.11) $z=1$ и отделяя действительную часть, получим

$$uy_1=-\frac{j}{2\sqrt{\mu^2-4\mu\omega}}\left[\nu_1(A_1+jB_1)-\nu_2(D_1+jD_2\right]+$$
$$+\frac{j}{2\sqrt{\mu^2+4\mu\omega}}\left[\nu_3(A_3-jB_3)-\nu_4(A_4-jB_4)\right]+ur_0e^{\mp jka} \tag{3.12}$$

Составим теперь уравнение для определения постоянной C. Пользуясь соотношением (2.3), имеем

$$\chi(z)=\frac{dw}{dz}-j\omega w+i\mu w-\mu(uy_1-\psi_1)\,e^{j\omega(z-1)}+$$
$$+i\mu j\omega e^{j\omega z}\int\limits_{1}^{z}w(z)\,e^{-j\omega z}\,dz \tag{3.13}$$

Выполняя в (3.13) необходимые вычисления, будем иметь

$$\chi(z) = F(z) + ie^{j\omega(z-1)}\,\mathrm{Im}\left\{\frac{dw}{dz} - j\omega w + i\mu w - F(z)\right\}_{z=1}$$

Отсюда в соответствии с формулой (2.7) имеем

$$C = \frac{\mu\omega}{2}e^{-j\omega}\left[\frac{1}{\sqrt{\mu^2-4\mu\omega}}(A_1 + jB_1 - D_1 - jD_2) + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{\sqrt{\mu^2-4\mu\omega}}(A_3 - jB_3 - A_4 + jB_4) + 2\frac{ju}{ka}r_0 e^{\mp jka}\right] \qquad (3.14)$$

Наконец, для определения постоянной γ_1 имеем условие о конечности скорости у заднего края.

Из (3.11) и (2.9) видно, что это условие будет выполнено, если

$$\gamma_1 = \left(i\sqrt{z^2-1}\,\frac{df}{dz}\right)_{z=-1}$$

и, следовательно, на основании (2.18) имеем уравнение

$$\gamma_1 = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n n a_n \qquad (3.15)$$

Выразим величины A_k, B_k и D_k через коэффициенты a_n. Пользуясь (2.18) и (2.9), имеем

$$A_k + iB_k = i\gamma_1\left(P_0^{(k)} + iQ_0^{(k)}\right) - i\sum_{n=1}^{\infty} n a_n\left(P_n^{(k)} + iQ_n^{(k)}\right) \qquad (3.16)$$

где

$$P_n^{(k)} + iQ_n^{(k)} = e^{-i\nu_k}\int_{\infty}^{1}\frac{(z-\sqrt{z^2-1})^n}{\sqrt{z^2-1}}e^{i\nu_k z}\,dz \qquad (3.17)$$

причем все $P_n^{(k)}$ и $Q_n^{(k)}$ выражаются через функции Ганкеля [1] $H_0^{(1)}(\nu_k)$ и $H_1^{(1)}(\nu_k)$.

Если $\mu > 4\omega$, то D_1 и D_2 могут быть выражены через $P_n^{(2)}$ и $Q_n^{(2)}$. Действительно,

$$D_1 + iD_2 = e^{-i\nu_2}\int_{-\infty}^{+\infty}F(z)\,e^{i\nu_2 z}\,dz + A_2 + iB_2$$

Так как в рассматриваемом случае $\nu_2 > 0$, то путь интегрирования можно заменить замкнутым контуром, охватывающим отрезок $(-1, +1)$ оси x с обходом против стрелки часов, и после этой замены получим

$$D_1 + iD_2 = A_2 + iB_2 + 2\pi e^{-i\nu_2}\left[-\gamma_1 J_0(\nu_2) + \sum_{n=1}^{\infty} n a_n i^n J_n(\nu_2)\right] \qquad (3.18)$$

Если же $\mu < 4\omega$, то ν_1 и ν_2 — комплексно сопряженные величины:

$$\nu_{12} = \alpha \pm i\beta, \qquad \alpha = \frac{1}{2}(\mu - 2\omega), \qquad \beta = \frac{1}{2}\sqrt{4\mu\omega - \mu^2}$$

В этом случае путь интегрирования от $-\infty$ до $+1$ разбиваем на две части: от $-\infty$ до -1 и от -1 до $+1$.

В результате вычислений находим

$$D_1 + iD_2 = ie^{-2i\nu_2}\Big\{\gamma_1\Big[P_0^{(1)}(\alpha, \beta) - iQ_0^{(1)}(\alpha, \beta) -$$

$$- \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n na_n\,[P_n^{(1)}(\alpha, \beta) - iQ_n^{(1)}(\alpha, \beta)]\Big\} -$$

$$- e^{-i\nu_2}\Big\{\pi\gamma_1 J_0(\nu_2) - \sum_{n=1}^{\infty} na_n\,[\pi i^n J_n(\nu_2) + iE_n(\nu_2)]\Big\} \qquad (3.19)$$

где $E_n(\nu_2)$ определяются из формул (2.31).

Таким образом, получено пять линейных уравнений (3.8), (3.9), (3.12), (3.14) и (3.15) для определения постоянных φ_1, ψ_1, uy_1, C и γ_1, которые можно решить численными методами.

4. Для вычисления гидродинамических сил и момента этих сил имеем формулы

$$P = a\int_{-1}^{+1}(p - p_0)\,dx, \qquad M = a^2\int_{-1}^{+1}(p - p_0)\,x\,dx \qquad (4.1)$$

где

$$a(p - p_0) = -\rho\Big[a\frac{\partial\Phi}{\partial t} - u\frac{\partial\Phi}{\partial t} + agY(x, t)\Big] \qquad (4.2)$$

причем p_0 — атмосферное давление и ρ — плотность жидкости.

Учитывая равенства (1.4), выражение (4.2) можем представить в форме

$$a(p - p_0) = aq + \delta\,[a(p - p_0)] \qquad (4.3)$$

Здесь q — давление при установившемся глиссировании, а

$$\delta\,[a(p - p_0)] = \rho u\Big(\frac{\partial\varphi}{\partial x} - j\omega\varphi + \mu e^{j\omega x}\int_1^x e^{-j\omega x}\frac{\partial\varphi}{\partial y}\,dx -$$

$$- \mu uy_1 e^{j\omega(x-1)}\Big)e^{j\sigma t} = \rho u e^{j\sigma t}\,\mathrm{Re}\,F(x) \qquad (4.4)$$

Подставляя (4.3) и (4.4) в (4.1), получим

$$P - P_0 = \rho u e^{j\sigma t}\,\mathrm{Re}\int_{-1}^{+1}F(x)\,dx, \quad M - M_0 = \rho u a e^{j\sigma t}\,\mathrm{Re}\int_{-1}^{+1}xF(x)\,dx \qquad (4.5)$$

где P_0 и M_0 — соответственно результирующая гидродинамических сил и их момент при установившемся глиссировании.

Интегралы в (4.5) нетрудно вычислить. В самом деле, в силу условия (2.4) значения $\mathrm{Re}\,F$ при подходе снизу и сверху отрезка $(-1, +1)$ оси x отличаются только знаком, а значения $\mathrm{Im}\,F$ одинаковы с обеих сторон этого отрезка. Поэтому эти интегралы можно заменить криволинейными по замкнутому контуру, содержащему внутри себя отрезок $(-1, +1)$, и обходимым против хода часовой стрелки. Последние же интегралы на основании разложения (2.8) и соотношений (2.9) и (2.18) вычисляются при помощи теоремы о вычетах. В результате получаем простые формулы:

$$P - P_0 = -\rho\pi u \gamma_1 e^{j\sigma t}, \qquad M - M_0 = \frac{1}{2}\rho\pi a u a_1 e^{j\sigma t} \tag{4.6}$$

Поступила 30 X 1954

ЛИТЕРАТУРА

1. Седов Л. И. Плоская задача о глиссировании по поверхности тяжелой жидкости. Труды конференции по теории волнового сопротивления. ЦАГИ, 1937.
2. Кочин Н. Е. Плоская задача о глиссировании слабо изогнутого контура по поверхности тяжелой несжимаемой жидкости. Труды ЦАГИ, вып. 356, 1938.
3. Сретенский Л. Н. К теории глиссера. Известия АН СССР, ОТН, № 7, 1940.
4. Хаскинд М. Д. Плоская задача о глиссировании по поверхности тяжелой жидкости конечной глубины. Известия АН СССР, ОТН, № 1—2, 1943.
5. Prandtl L. Über die Entstehung von Wirbeln in einer idealem Flüssigkeit. Vorträge zur Hydro- und Aerodynamik, S. 25, 1924.
6. Birnbaum. Das ebene Problem des schlagenden Flügeln. ZAMM, S. 277—292, 1924.
7. Wagner. Über die Entstehung des dinamischen Auftriebs von Tragflügeln. ZAMM, S. 17—35, 1925.
8. Glauert H. The force and moment on oscillating aerofoil. R and M. No 1242.
9. Келдыш М. В. и Лаврентьев М. А. К теории колеблющегося крыла. Технические заметки ЦАГИ, № 45, 1935.
10. Седов Л. И. Теория нестационарного глиссирования и движение крыла со сбегающими вихрями. Труды ЦАГИ, вып. 252, 1936.
11. Седов Л. И. Плоские задачи гидродинамики и аэродинамики. ГИТТЛ, 1950.
12. Хаскинд М. Д. Плоская задача о колебаниях пластинки на поверхности тяжелой жидкости. Известия АН СССР, ОТН, № 7—8, 1942.
13. Хаскинд М. Д. Колебания плавающего контура на поверхности тяжелой жидкости. ПММ, т. XVII, вып. 2, 1953.
14. Хаскинд М. Д. О волновых движениях тяжелой жидкости. ПММ, т. XVIII, вып. 1, 1954.