**Прикладная математика и механика. Том XIX, 1955**

**Институт механики Академии наук Союза ССР**

# РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О ДВИЖЕНИИ ВЯЗКОГО ГАЗА МЕЖДУ ДВУМЯ ДВИЖУЩИМИСЯ ПАРАЛЛЕЛЬНЫМИ ПЛАСТИНАМИ С ТЕПЛООТДАЧЕЙ

**И. Е. Тарапов**

(Харьков)

Задача о движении вязкого газа между двумя движущимися параллельными пластинами при различных температурных граничных условиях представляет интерес для газодинамической теории смазки (теории смазки сжимаемым газом) и теории теплопередачи. Ниже будет дано точное решение этой задачи.

Рассматривается стационарное движение вязкого газа между двумя параллельными плоскостями; одна из плоскостей $y = 1$ неподвижна в системе безразмерных координат $x$, $y$, а другая $y = 0$ движется по оси $x$ со скоростью $v_0$.

Температурные граничные условия предполагаются однородными, т. е. температура и теплоотдача на каждой из плоскостей постоянны; градиент давления $dp/dx$ равен нулю.

Тогда, очевидно,

$$v_y = 0, \qquad v_x = v_x(y), \qquad T' = T'(y)$$

При этом уравнения движения и энергии для газа имеют вид:

$$\frac{d}{dy}\left(\mu \frac{dv_x}{dy}\right) = 0, \qquad \frac{d}{dy}\left[\mu \frac{d}{dy}\left(T' + \frac{v_x^2}{2c_p} Pr\right)\right] = 0 \qquad \left(Pr = \frac{\mu c_p}{\lambda} = \text{const}\right) \tag{1}$$

где $\mu$, $\lambda$, $c_p$ — соответственно коэффициенты вязкости, теплопроводности и теплоемкости газа, $T'$ — температура газа.

Примем, как обычно, степенной закон зависимости вязкости газа от температуры:

$$\frac{\mu}{\mu_0} = \left(\frac{T'}{T_0'}\right)^m \qquad (0.5 \leqslant m \leqslant 1)$$

Введя безразмерные величины

$$v = \frac{v_x}{v_0}, \qquad T = \frac{T'}{T_0'}, \qquad a^2 = 1 + \frac{2c_p T_0'}{v_0^2 Pr}, \qquad \Theta = T + \frac{v^2}{a^2 - 1}$$

из системы (1), получим

$$\frac{d}{dy}\left(T^m \frac{dv}{dy}\right) = 0 \tag{2}$$

$$\frac{d}{dy}\left(T^m \frac{d\Theta}{dy}\right) = 0 \tag{3}$$

К таким же уравнениям приводит задача о движении газа между двумя соосными цилиндрами в случае малого (по сравнению с радиусами цилиндров) зазора между ними.

Граничные условия для $v(y)$ следующие:

$$v(0) = 1, \qquad v(1) = 0 \tag{4}$$

Граничные условия для $T(y)$ рассмотрены для трех случаев:

1) одна из поверхностей теплоизолирована, т. е. поток тепла $\lambda\nabla T$ на ней равен нулю, а на другой поверхности задана постоянная температура $T_0'$; тогда

$$\left.\frac{dT}{dy}\right|_{y=1} = 0, \qquad T(0) = 1 \tag{5}$$

или

$$\left.\frac{dT}{dy}\right|_{y=0} = 0, \qquad T(1) = 1 \tag{6}$$

2) на обеих поверхностях заданы температуры, равные по величине $T_0'$ и $T_1'$; тогда

$$T(0) = 1, \qquad T(1) = \alpha \qquad \left(\alpha = \frac{T_1'}{T_0'}\right) \tag{7}$$

Решение системы (2) — (3) ищем в виде $T = T(v)$, предполагая $dv/dy \neq 0$. Из уравнения (3) имеем

$$\frac{d}{dv}\left(\frac{dT}{dv} T^m \frac{dv}{dy} + \frac{2}{a^2 - 1} vT^m \frac{dv}{dy}\right) = 0$$

Так как из уравнения (2) следует $T^m dv/dy = \mathrm{const}$, то

$$\frac{d^2T}{dv^2} = -\frac{2}{a^2 - 1}$$

Отсюда

$$T(v) = \frac{a^2}{a^2 - 1}\left(\gamma_1 + \frac{v}{a}\right)\left(\gamma_2 - \frac{v}{a}\right) \tag{8}$$

Постоянные интегрирования $\gamma_1$, $\gamma_2$ определяются из граничных условий для $v$ и $T$.

В случае (5) температурных граничных условий получим

$$\gamma_1\gamma_2 = 1, \qquad \gamma_2 - \gamma_1 = 0$$

в случае (6)

$$\gamma_1\gamma_2 = \frac{a^2 - 1}{a^2}, \qquad \gamma_2 - \gamma_1 = \frac{2}{a}$$

в случае (7)

$$\gamma_1\gamma_2 = \alpha\frac{a^2 - 1}{a^2}, \qquad \gamma_2 - \gamma_1 = \frac{a^2 - \alpha(a^2 - 1)}{a}$$

Функцию скорости $v(y)$ определяем из уравнения (2), подставляя вместо $T$ выражение (8). Получим

$$\frac{dv}{dy} = \frac{C_1}{T^m}, \qquad \int_1^v T^m(t)\,dt = C_1 y, \qquad C_1 = \int_1^0 T^m(t)\,dt$$

Отсюда следует, что на всем интервале [0.1]

$$\frac{dv}{dy} = \frac{C_1}{T^m} < 0 \tag{9}$$

Для определения функции $v(y)$ имеем уравнение

$$\int\limits_v^1 \left(\gamma_1 + \frac{t}{a}\right)^m \left(\gamma_2 - \frac{t}{a}\right)^m dt = y \int\limits_0^1 \left(\gamma_1 + \frac{t}{a}\right)^m \left(\gamma_2 - \frac{t}{a}\right)^m dt \tag{10}$$

Эти интегралы можно привести к неполным бета-функциям, которые табулированы [2]. Тогда вместо (10) получим

$$B\left(\frac{\gamma_1 + v/a}{\gamma_1 + \gamma_2};\ m+1,\ m+1\right) = yB\left(\frac{\gamma_1}{\gamma_1 + \gamma_2};\ m+1,\ m+1\right) \tag{11}$$

где

$$B(x;\ p,\ q) = \int\limits_0^x t^{p-1}(1-t)^{q-1}\,dt$$

Таким образом, точные значения функции $v(y)$ для различных случаев температурных граничных условий могут быть получены из (11) при помощи таблиц.

Исследуем полученное решение для рассматриваемых случаев граничных условий. Предварительно из выражений (8) и (9) найдем

$$T(v) = \frac{a^2}{a^2-1}\left(\gamma_1\gamma_2 + (\gamma_2 - \gamma_1)\frac{v}{a} - \frac{v^2}{a^2}\right)$$

$$\frac{dv}{dy} = \frac{C_1}{T^m} < 0 \qquad (0 \leqslant v \leqslant 1)$$

$$\frac{d^2v}{d^2y} = -\frac{ma^2}{(a^2-1)T}\left(\frac{\gamma_2-\gamma_1}{a} - \frac{2v}{a^2}\right)\left(\frac{dv}{dy}\right)^2$$

$$\frac{dT}{dy} = \frac{a^2}{a^2-1}\left(\frac{\gamma_2-\gamma_1}{a} - \frac{2v}{a^2}\right)\frac{dv}{dy}$$

$$\frac{d^2T}{dy^2} = -\frac{a^2}{a^2-1}\left[\frac{2}{a^2} + \frac{ma^2}{(a^2-1)T}\left(\frac{\gamma_2-\gamma_1}{a} - \frac{2v}{a^2}\right)^2\right]\left(\frac{dv}{dy}\right)^2$$

Используя эти выражения, можно получить представление о распределении скорости и температуры в газе для различных случаев температурных граничных условий.

Если на подвижной плоскости $y = 0$ задана температура, а неподвижная плоскость $y = 1$ теплоизолирована (5), то

$$T(1) = \frac{a^2}{a^2-1}, \qquad \frac{dv}{dy} < 0, \qquad \frac{d^2v}{dy^2} \geqslant 0, \qquad \frac{dT}{dy} \geqslant 0, \qquad \frac{d^2T}{dy^2} < 0$$

Таким образом, кривая скорости всюду вогнутая, а кривая температуры всюду выпуклая и монотонно возрастающая.

Если на неподвижной плоскости задана температура, а подвижная плоскость теплоизолирована (6), то

$$T(0) = \frac{a^2}{a^2-1}, \qquad \frac{dv}{dy} < 0, \qquad \frac{d^2v}{dy^2} \leqslant 0, \qquad \frac{dT}{dy} \leqslant 0, \qquad \frac{d^2T}{dy^2} < 0$$

В этом случае кривая скорости всюду выпуклая, кривая температуры также всюду выпуклая, но монотонно убывающая.

Рассмотрим третий случай температурных граничных условий (7), когда на поверхностях заданы постоянные температуры:

$$T(0) = 1, \qquad T(1) = \alpha$$

В этом случае

$$\frac{dv}{dy} < 0, \qquad \frac{d^2v}{dy^2} = -\frac{\gamma m}{(a^2-1)\,T}\left(\frac{dv}{dy}\right)^2 [a^2 - \alpha(a^2-1) - 2v]$$

$$\frac{dT}{dy} = \frac{1}{a^2-1}[a^2 - \alpha(a^2-1) - 2v]\frac{dv}{dy}, \qquad \frac{d^2T}{dy^2} < 0$$

Если

$$0 < \alpha \leqslant \frac{a^2-2}{a^2-1}$$

то $d^2v/dy^2 \leqslant 0$, $dT/dy \leqslant 0$ и кривая скорости всюду выпуклая, а кривая температуры выпуклая и монотонно убывающая.

Если

$$\alpha \geqslant \frac{a^2}{a^2-1}$$

то $d^2v/dy^2 \geqslant 0$, $dT/dy \geqslant 0$ и кривая скорости всюду вогнутая, а кривая температуры выпуклая и монотонно возрастающая.

Если

$$\frac{a^2-2}{a^2-1} < \alpha < \frac{a^2}{a^2-1}$$

то в точке, где $v = {}^1\!/_2[a^2 - \alpha(a^2-1)]$, кривая скорости имеет точку перегиба, в которой кривизна меняет знак с плюса на минус, а кривая температуры в этой точке имеет максимум.

Максимальная температура равна

$$T_{\max} = \alpha + \frac{[a^2 - \alpha(a^2-1)]^2}{4(a^2-1)}$$

Приведенное выше рассмотрение касается лишь случая дозвуковых течений между параллельными плоскостями. Оценим нижний предел величины $a^2$ в этом случае.

Если скорость газа нигде не превосходит местной скорости звука, то число

$$M(y) = \frac{v_0 v(y)}{\sqrt{\varkappa R T'(y)}} < 1$$

где $\varkappa = c_p/c_v$ — отношение темплоемкостей, $R$ — газовая постоянная, $\varkappa R T'(y)$ — квадрат местной скорости звука.

Отсюда в принятых обозначениях следует

$$\frac{T}{v^2} > \frac{2}{(\varkappa-1)(a^2-1)\,Pr}$$

Подставляя сюда выражение (8) для $T(v)$ и вводя обозначение

$$x = \frac{v}{a}, \qquad f(x) = \frac{T(a^2-1)}{v^2}$$

получим

$$f(x) = \frac{\gamma_1\gamma_2 + (\gamma_2 - \gamma_1)x - x^2}{x^2}, \qquad f(x) > \frac{2}{(\varkappa - 1)Pr} \tag{12}$$

Находя наименьшие положительные значения функции $f(x)$ при $0 \leqslant x \leqslant a^{-1}$ и подставляя их в неравенство (12), получим искомые оценки для величины $a^2$ при различных температурных условиях. Так как

$$f'(x) = -\frac{2\gamma_1\gamma_2 + x(\gamma_2 - \gamma_1)}{x^3}$$

то для всех случаев граничных условий (5), (6) и (7) наименьшим положительным значением функции $f(x)$ будет ее значение при $x = a^{-1}$ $(v = 1)$. Отсюда для случаев (5) и (7) температурных граничных условий получим

$$a^2 > \frac{2}{(\varkappa - 1)Pr} + 1$$

а для случая (6)

$$a^2 > \frac{2}{(\varkappa - 1)Pr}$$

Оценку для функции $v(y)$ на всем интервале удобно получить из выражения (10), которое запишем в виде

$$F(v) = yF(0), \qquad F(v) = \int_v^1 \left(\gamma_1\gamma_2 + (\gamma_2 - \gamma_1)\frac{t}{a} - \frac{t^2}{a^2}\right)^m dt$$

Рассмотрим для простоты случай граничных условий (5). Тогда

$$F(0) < 1, \quad F(v) > (1 - v)\left(\frac{a^2 - 1}{a^2}\right)^m$$

Отсюда, учитывая дополнительно то, что $d^2v / dy^2 \geqslant 0$, получим

$$1 - \left(\frac{a^2}{a^2 - 1}\right)^m y \leqslant v(y) \leqslant 1 - y$$

Аналогичные оценки можно привести и для остальных случаев температурных граничных условий.

При достаточно больших значениях величины $a^2$ во всех случаях температурных граничных условий функция скорости незначительно отличается от линейной, которая является решением соответствующей задачи для несжимаемой жидкости с постоянной вязкостью [1].

Сила трения на единицу площади движущейся пластины равна

$$\tau = -\mu_0 \frac{v_0}{\delta}\left[T^m \frac{dv}{dy}\right]_{y=0}$$

Здесь $\delta$ — расстояние между пластинками, $\mu_0$ — вязкость газа при температуре $T_0'$. Отсюда, используя выражения (8) и (9), получим

$$\tau \frac{\delta}{\mu_0 v_0} = \left(\frac{a^2}{a^2 - 1}\right)^m \int_0^1 \left(\gamma_1\gamma_2 + (\gamma_2 - \gamma_1)\frac{t}{a} - \frac{t^2}{a^2}\right)^m dt$$

Если одна из плоскостей теплоизолирована [случаи (5) и (6)], то

$$1 < \left(\frac{a^2}{a^2-1}\right)^m \left(1 - \frac{1}{3a^2}\right) < \tau \frac{\delta}{\mu_0 v_0} < \left(\frac{a^2}{a^2-1}\right)^m$$

Если на обеих плоскостях заданы температуры [случай (7)], то

$$\alpha^m < \tau \frac{\delta}{\mu_0 v_0} < 1 \qquad \text{при} \quad 0 \leqslant \alpha \leqslant \frac{a^2-2}{a^2-1}$$

$$1 < \tau \frac{\delta}{\mu_0 v_0} < \alpha^m \qquad \text{при} \quad \alpha \geqslant \frac{a^2}{a^2-1}$$

$$\alpha^m < \tau \frac{\delta}{\mu_0 v_0} < \left(\frac{a^2}{a^2-1}\right)^m \qquad \text{при} \quad \frac{a^2-2}{a^2-1} < \alpha \leqslant 1$$

$$1 < \tau \frac{\delta}{\mu_0 v_0} < \left(\frac{a^2}{a^2-1}\right)^m \qquad \text{при} \quad 1 < \alpha < \frac{a^2}{a^2-1}$$

Последние оценки получены из общей формулы для случая (7) температурных граничных условий

$$\tau \frac{\delta}{\mu_0 v_0} = \left(\frac{a^2}{a^2-1}\right)^m \int_0^1 \left(\alpha \frac{a^2-1}{a^2} + \frac{a^2 - \alpha (a^2-1)}{a^2} t - \frac{t^2}{a^2}\right)^m dt$$

Проведенные оценки показывают, что безразмерное напряжение трения $\tau\delta / \mu_0 v_0$ может быть меньше соответствующей величины для случая несжимаемой жидкости между плоскостями только тогда, когда на обеих плоскостях поддерживаются определенные постоянные температуры.

Поступила 25 II 1954

ЛИТЕРАТУРА

1. Кочин Н. Е., Кибель И. А. и Розе Н. В. Теоретическая гидромеханика, т. II, Гостехиздат, 1948.
2. Pearson. Tables of the incomplete Beta-Function. Cambridge, Biometrica, 1904.