Прикладная математика и механика. Том XIX, 1955
Институт механики Академии наук Союза ССР

ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ ОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА

В. С. Владимиров

(Калининград)

В работе дается способ численного решения краевой задачи для самосопряженного дифференциального уравнения второго порядка с суммируемыми коэффициентами. Доказаны равномерная сходимость приближенного решения вместе с его первой производной и сходимость в среднем его второй производной к соответствующим истинным функциям. Приведены два примера.

§ 1. Рассматриваем в промежутке (0.1) дифференциальное уравнение

$$y'' - p(x)\,y = -f(x) \tag{1.1}$$

с граничными условиями

$$y'(0) - H_1 y(0) = y'(1) + H_2 y(1) = 0 \qquad (0 \leqslant H_1,\ H_2 \leqslant +\infty) \tag{1.2}$$

Предполагаем функции $p(x)$ и $f(x)$ суммируемыми на (0.1) и при почти всех x на (0.1)

$$p(x) > 0, \qquad p(x) \geqslant p_0 \geqslant 0 \tag{1.3}$$

Обозначим через L пространство суммируемых, а через C пространство непрерывных функций с нормами соответственно

$$\|f\|_L = \int_0^1 |f(x)|\,dx, \qquad \|f\|_C = \max|f(x)| \qquad (0 \leqslant x \leqslant 1)$$

Искомая функция $y(x)$ $(y \in C,\ y' \in C,\ y'' \in L)$ должна удовлетворять требованиям: 1) вместе с $y'(x)$ абсолютно непрерывна на (0.1); 2) удовлетворять уравнению (1.1) почти везде; 3) удовлетворять граничным условиям (1.2).

Сформулированная задача имеет единственное решение. Построим его. Для этого представим дифференциальный оператор второго порядка в виде произведения двух дифференциальных операторов первого порядка ([1], стр. 172) при помощи вспомогательной функции $g(x)$:

$$\frac{d^2}{dx^2} - p = \left(\frac{d}{dx} + g\right)\left(\frac{d}{dx} - g\right) \tag{1.4}$$

Отсюда получаем уравнение Рикатти для $g(x)$:

$$g' + g^2 = p(x) \tag{1.5}$$

Уравнение (1.5) получено в работе [2] для решения соответствующей задачи на собственные значения. Далее из (1.4) следует, что уравнение (1.1) эквивалентно системе двух уравнений первого порядка:

$$q' + g(x)\,q = f(x), \qquad y' - g(x)\,y = -q(x) \tag{1.6}$$

Непосредственной проверкой убеждаемся в том, что абсолютно непрерывные решения уравнений (1.5) и (1.6), удовлетворяющие условиям

$$g(0) = H_1, \qquad q(0) = 0, \qquad y(1) = \frac{q(1)}{g(1) + H_2} \tag{1.7}$$

дают решение поставленной задачи:

$$\begin{gathered} q(x) = \int_0^x f(x') \exp\left(-\int_{x'}^x g(t)\,dt\right) dx' \\ y(x) = \frac{q(1)}{g(1) + H_2} \exp\left(-\int_x^1 g(t)\,dt\right) + \int_x^1 q(x') \exp\left(-\int_x^{x'} g(t)\,dt\right) dx' \end{gathered} \tag{1.8}$$

Формулы (1.8) позволяют построить приближенное решение поставленной задачи. Приближенным решением задачи назовем точное решение уравнения

$$Y'' - p_{h_1, \ldots, h_n}(x) Y = -f_{h_1, \ldots, h_n}(x) \tag{1.9}$$

при условиях (1.2). В уравнении (1.9) функции $p_{h_1, \ldots, h_n}(x)$ и $f_{h_1, \ldots, h_n}(x)$ — кусочно-постоянные и являются результатом применения соответственно к функциям $p(x)$ и $f(x)$ следующей операции: промежуток (0.1) разбиваем произвольным образом точками

$$0 = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = 1 \qquad (n \geqslant 1) \tag{1.10}$$

и обозначаем

$$h_i = x_i - x_{i-1}, \qquad h = \max h_i \qquad (1 \leqslant i \leqslant n) \tag{1.11}$$

Полагаем при x на (x_{i-1}, x_i) (1.12)

$$p_{h_1, \ldots, h_n}(x) = p_i = \frac{1}{h_i} \int_{x_{i-1}}^{x_i} p(x)\,dx, \qquad f_{h_1, \ldots, h_n}(x) = f_i = \frac{1}{h_i} \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\,dx$$

Из (1.3), (1.11) и (1.12) имеем

$$p_{h_1, \ldots, h_n}(x) \geqslant \min p_i > 0, \qquad p_i \geqslant p_0 \qquad (1 \leqslant i \leqslant n) \tag{1.13}$$

§ 2. Построим теперь решение $Y(x)$ уравнения (1.9) при условиях (1.2) по изложенному выше методу. Уравнение (1.5) и первое из условий (1.7) для уравнения (1.9) примут вид:

$$G^1 + G^2 = p_{h_1, \ldots, h_n}(x), \qquad G(0) = H_1$$

В силу (1.12) получим далее при x на (x_{i-1}, x_i)

$$G^1 + G^2 = p_i \qquad (1 \leqslant i \leqslant n) \tag{2.1}$$

Отсюда получим при x на (x_{i-1}, x_i)

$$G(x) = \sqrt{p_i}\, \frac{1 - C_i \exp\left[-2\sqrt{p_i}\,(x - x_{i-1})\right]}{1 + C_i \exp\left[-2\sqrt{p_i}\,(x - x_{i-1})\right]} \qquad (1 \leqslant i \leqslant n) \tag{2.2}$$

Из (2.2) следует, что функция $G(x)$ будет удовлетворять условию $G(0) = H_1$ и будет абсолютно непрерывной в (0.1) в том случае, если постоянные C_i удовлетворяют рекуррентному соотношению

$$C_i = \frac{\sqrt{p_i} - \sqrt{p_{i-1}} + (\sqrt{p_i} + \sqrt{p_{i-1}})C_{i-1} \exp(-2\sqrt{p_{i-1}}\, h_{i-1})}{\sqrt{p_i} + \sqrt{p_{i-1}} + (\sqrt{p_i} - \sqrt{p_{i-1}})\, C_{i-1} \exp(-2\sqrt{p_{i-1}} h_{i-1})}$$

$$C_1 = \frac{\sqrt{p_1} - H_1}{\sqrt{p_1} + H_1} \qquad (2 \leqslant i \leqslant n) \tag{2.3}$$

Первое из уравнений (1.6) и второе из условий (1.7) примут вид для уравнения (1.9)

$$Q' + G(x)\, Q = f_{h_1, \ldots, h_n}(x), \qquad Q(0) = 0$$

В силу (1.12) последнее уравнение примет вид при x на (x_{i-1}, x_i):

$$Q' + G(x)\, Q = f_i, \qquad (1 \leqslant i \leqslant n)$$

Отсюда получим при x на (x_{i-1}, x_i)

$$Q(x) = Q(x_{i-1}) \exp\Bigl(-\int\limits_{x_{i-1}}^{x} G(t)\, dt\Bigr) + f_i \int\limits_{x_{i-1}}^{x} \exp\Bigl(-\int\limits_{x'}^{x} G(t)\, dt\Bigr) dx' \quad (1 \leqslant i \leqslant n)$$

Учитывая (2,2), отметим формулу при $t_1 \leqslant t_2$ и t_1, t_2 на $[x_{i-1}, x_i]$:

$$\exp\Bigl(-\int\limits_{t_1}^{t_2} G(t)\, dt\Bigr) = \exp[-\sqrt{p_i}\,(t_2 - t_1)]\, \frac{1 + C_i \exp[-2\sqrt{p_i}\,(t_1 - x_{i-1})]}{1 + C_i \exp[-2\sqrt{p_i}\,(t_2 - x_{i-1})]}$$

$$(1 \leqslant i \leqslant n) \tag{2.4}$$

Принимая во внимание (2.4), получим далее при x на (x_{i-1}, x_i)

$$Q(x) = Q(x_{i-1}) \exp[-\sqrt{p_i}\,(x - x_{i-1})]\, \frac{1 + C_i}{1 + C_i \exp[-2\sqrt{p_i}\,(x - x_{i-1})]} +$$

$$+ \frac{f_i \{1 - \exp[-\sqrt{p_i}\,(x - x_{i-1})]\} \{1 + C_i \exp[-\sqrt{p_i}\,(x - x_{i-1})]\}}{\sqrt{p_i}\, \{1 + C_i \exp[-2\sqrt{p_i}\,(x - x_{i-1})]\}}$$

$$Q(0) = 0 \qquad (1 \leqslant i \leqslant n) \tag{2.5}$$

Полагая в (2.5) $x = x_i$ и принимая во внимание (1.11), получим рекуррентную формулу для величин $Q(x_i)$:

$$Q(x_i) = Q(x_{i-1})\, \frac{\exp(-\sqrt{p_i}\, h_i)\,(1 + C_i)}{1 + C_i \exp(-2\sqrt{p_i}\, h_i)} +$$

$$+ \frac{f_i\, [1 - \exp(-\sqrt{p_i}\, h_i)]\, [1 + C_i \exp(-\sqrt{p_i}\, h_i)]}{\sqrt{p_i}\, [1 + C_i \exp(-2\sqrt{p_i}\, h_i)]} \tag{2.6}$$

$$Q(x_0) = 0 \qquad (1 \leqslant i \leqslant n)$$

Второе из уравнений (1.6) и третье из уравнений (1.7) примут вид для уравнения (1.9):

$$Y' - G(x)\, Y = -Q(x), \qquad Y(1) = \frac{Q(1)}{G(1) + H_2}$$

Откуда следует при x на (x_{i-1}, x_i)

$$Y(x) = Y(x_i) \exp\Bigl(-\int\limits_{x}^{x_i} G(t)\, dt\Bigr) + \int\limits_{x}^{x_i} Q(x') \exp\Bigl(-\int\limits_{x}^{x'} G(t)\, dt\Bigr) dx' \qquad (1 \leqslant i \leqslant n)$$

где в силу (2.2)

$$Y(1)=Y(x_n)=\frac{Q(x_n)\left[1+C_n\exp\left(-2\sqrt{p_n}\,h_n\right)\right]}{\sqrt{p_n}\left[1-C_n\exp\left(-2\sqrt{p_n}\,h_n\right)\right]+H_2\left[1+C_n\exp\left(-2\sqrt{p_n}h_n\right)\right]} \tag{2.7}$$

Принимая во внимание (2.4) и (2.5), получим при x на (x_{i-1}, x_i)

$$Y(x)=Y(x_i)\exp\left[-\sqrt{p_i}\,(x_i-x)\right]\frac{1+C_i\exp\left[-2\sqrt{p_i}\,(x-x_{i-1})\right]}{1+C_i\exp\left(-2\sqrt{p_i}\,h_i\right)}+$$
$$+\left\{1+C_i\exp\left[-2\sqrt{p_i}\,(x-x_{i-1})\right]\right\}\Bigl[Q(x_{i-1})(1+C_i)\times$$
$$\times\int_x^{x_i}\frac{\exp\left[-\sqrt{p_i}\,(2x'-x-x_{i-1})\right]}{\left\{1+C_i\exp\left[-2\sqrt{p_i}\,(x'-x_{i-1})\right]\right\}^2}dx'+$$
$$+\frac{f_i}{\sqrt{p_i}}\int_x^{x_i}\frac{\left\{1-\exp\left[-\sqrt{p_i}\,(x'-x_{i-1})\right]\right\}\left\{1+C_i\exp\left[-\sqrt{p_i}(x'-x_{i-1})\right]\right\}}{\left\{1+C_i\exp\left[-2\sqrt{p_i}\,(x'-x_{i-1})\right]\right\}^2}\times$$
$$\times\exp\left[-\sqrt{p_i}\,(x'-x)\right]dx'\Bigr]$$

или

$$Y(x)=Y(x_i)\exp\left[-\sqrt{p_i}\,(x_i-x)\right]\frac{1+C_i\exp\left[-2\sqrt{p_i}\,(x-x_{i-1})\right]}{1+C_i\exp\left(-2\sqrt{p_i}\,h_i\right)}+$$
$$+\frac{1}{\sqrt{p_i}\left[1+C_i\exp\left(-2\sqrt{p_i}\,h_i\right)\right]}\left\{\frac{1+C_i}{2}Q(x_{i-1})\left(\exp\left[-\sqrt{p_i}\,(x-x_{i-1})\right]-\right.\right.$$
$$-\exp\left[-\sqrt{p_i}\,(x_i+h_i-x)\right]\Bigr)+\frac{f_i}{\sqrt{p_i}}\Bigl[\frac{C_i-1}{2}\left(\exp\left[-\sqrt{p_i}\,(x-x_{i-1})\right]-\right.$$
$$-\exp\left[-\sqrt{p_i}\,(x_i+h_i-x)\right]\Bigr)+1-\exp\left[-\sqrt{p_i}\,(x_i-x)\right]+$$
$$\left.\left.+C_i\left(\exp\left(-2\sqrt{p_i}\,h_i\right)-\exp\left[-\sqrt{p_i}\,(x+h_i-x_{i-1})\right]\right)\right]\right\}\qquad (1\leqslant i\leqslant n) \tag{2.8}$$

Полагая в (2.8) $x=x_{i-1}$ и принимая во внимание (1.11) и (2.6), получим рекуррентную формулу для величин $Y(x_{i-1})$:

$$Y(x_{i-1})=Y(x_i)\frac{\exp\left(-\sqrt{p_i}\,h_i\right)(1+C_i)}{1+C_i\exp\left(-2\sqrt{p_i}\,h_i\right)}+\frac{Q(x_i)}{\sqrt{p_i}}\operatorname{sh}\sqrt{p_i}\,h_i-\frac{f_i}{p_i}\left(\operatorname{ch}\sqrt{p_i}\,h_i-1\right) \tag{2.9}$$
$$(1\leqslant i\leqslant n)$$

где $Y(x_n)$ определяется формулой (2.7). Формула (2.8) вместе с формулами (2.3), (2.6), (2.7) и (2.9) полностью решает задачу.

§ 3. Выведем теперь формулу для контроля вычислений. Для этого проинтегрируем уравнение (1.9) по промежутку (0.1). Принимая во внимание условия (1.2), получим с учетом (1.11) и (1.12)

$$H_1Y(0)+H_2Y(1)+\sum_{1\leqslant i\leqslant n}p_i\int_{x_{i-1}}^{x_i}Y(x)\,dx=\sum_{1\leqslant i\leqslant n}f_ih_i$$

Принимая во внимание формулу (2.8), получим

$$\int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} Y(x)\,dx = \frac{1-\exp(-\sqrt{p_i}h_i)}{\sqrt{p_i}\left[1+C_i\exp(-2\sqrt{p_i}h_i)\right]}\times$$

$$\times\Big\{Y(x_i)\left[1+C_i\exp(-\sqrt{p_i}h_i)\right]+Q(x_{i-1})\frac{1+C_i}{2\sqrt{p_i}}\left[1-\exp(-\sqrt{p_i}h_i)\right]+$$

$$+\frac{f_i}{2p_i}\left[C_i+\exp(-\sqrt{p_i}h_i)-3-3C_i\exp(-\sqrt{p_i}h_i)\right]\Big\}+\frac{f_ih_i}{p_i} \qquad (1\leqslant i\leqslant n)$$

Принимая во внимание (2.6), получим далее

$$\int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} Y(x)\,dx = \frac{Y(x_i)\left[1-\exp(-\sqrt{p_i}h_i)\right]\left[1+C_i\exp(-\sqrt{p_i}h_i)\right]}{\sqrt{p_i}\left[1+C_i\exp(-2\sqrt{p_i}h_i)\right]}+$$

$$+\frac{Q(x_i)}{p_i}(\operatorname{ch}\sqrt{p_i}h_i-1)-\frac{f_i}{p_i\sqrt{p_i}}\operatorname{sh}\sqrt{p_i}h_i+\frac{f_ih_i}{p_i}$$

Таким образом, получим формулу для контроля вычислений

$$\sum_{1\leqslant i\leqslant n}\Big[\frac{f_i}{\sqrt{p_i}}\operatorname{sh}\sqrt{p_i}h_i-Y(x_i)\sqrt{p_i}\,\frac{\left[1-\exp(-\sqrt{p_i}h_i)\right]\left[1+C_i\exp(-\sqrt{p_i}h_i)\right]}{1+C_i\exp(-2\sqrt{p_i}h_i)}-$$

$$-Q(x_i)(\operatorname{ch}\sqrt{p_i}h_i-1)\Big]=H_1Y(x_0)+H_2Y(x_n) \qquad (3.1)$$

Вычислим величины $H_1Y(x_0)$ и $H_2Y(x_n)$, входящие в формулу (3.1), когда $H_1=H_2=+\infty$. Имеем из (2.3) и (2.8) при $i=1$ и $x=x_0=0$

$$[H_1Y(x_0)]_{H_1=+\infty}=\frac{\sqrt{p_1}}{1-\exp(-2\sqrt{p_1}h_1)}\times$$

$$\times\Big\{2Y(x_1)\exp(-\sqrt{p_1}h_1)+\frac{f_1}{p_1}\left[1-\exp(-\sqrt{p_1}h_1)\right]^2\Big\}$$

Но из (2.6) следует при $i=1$

$$Q(x_1)=\frac{f_1\left[1-\exp(-\sqrt{p_1}h_1)\right]^2}{\sqrt{p_1}\left[1-\exp(-2\sqrt{p_1}h_1)\right]}$$

Это дает окончательно

$$[H_1Y(x_0)]_{H_1=+\infty}=Q(x_1)+\frac{2Y(x_1)\sqrt{p_1}\exp(-\sqrt{p_1}h_1)}{1-\exp(-2\sqrt{p_1}h_1)}$$

Из формулы (2.7) легко получим

$$[H_2Y(x_n)]_{H_2=+\infty}=Q(x_n)$$

§ 4. Для оценки погрешности $\varepsilon(x)=y(x)-Y(x)$ докажем леммы.

Лемма 1. Для любой функции $f\in L$ и для любого разбиения (1.10) имеет место неравенство

$$\|f_{h_1,\ldots,h_n}\|_L\leqslant\|f\|_L$$

Доказательство. Имеем на основании (1.11) и (1.12)

$$\|f_{h_1,\ldots,h_n}\|_L=\sum_{1\leqslant i\leqslant n}\frac{1}{h_i}\int\limits_{x_{i-1}}^{x_i}\Big|\int\limits_{x_{i-1}}^{x_i}f(x')\,dx'\Big|\,dx\leqslant\sum_{1\leqslant i\leqslant n}\int\limits_{x_{i-1}}^{x_i}|f(x')|\,dx'=\|f\|_L.$$

Лемма 2. Для любой функции $f \in L$ и для любых разбиений (1.10)

$$\lim_{h\to 0} \| f - f_{h_1, \ldots, h_n} \|_L = 0$$

Доказательство. Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$. Пространство C всюду плотно в L. Следовательно, найдется такая функция $f_\varepsilon \in C$, что

$$\| f - f_\varepsilon \|_L < \frac{1}{3} \varepsilon \tag{4.1}$$

Выберем теперь $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ настолько малым, чтобы

$$\omega_{f_\varepsilon}(\delta) < \frac{1}{3} \varepsilon \tag{4.2}$$

где $\omega_{f_\varepsilon}(\delta)$ — модуль непрерывности функции $f_\varepsilon(x)$. Пусть h — любое положительное число, меньшее δ. По данному h строим разбиение (1.10), такое, что $h_i \leqslant h$, $1 \leqslant i \leqslant n$. Тогда для этого разбиения будем иметь

$$\| f - f_{h_1, \ldots, h_n} \|_L \leqslant \| f - f_\varepsilon \|_{L_1} + \| f_\varepsilon - (f_\varepsilon)_{h_1, \ldots, h_n} \|_L + \\ + \| (f_\varepsilon)_{h_1, \ldots, h_n} - f_{h_1, \ldots, h_n} \|_L \tag{4.3}$$

На основании (1.11), (1.12) и (4.2) имеем

$$\| f_\varepsilon - (f_\varepsilon)_{h_1, \ldots, h_n} \|_L = \sum_{1 \leqslant i \leqslant n} \int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} \left| f_\varepsilon(x) - \frac{1}{h_i} \int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} f_\varepsilon(x')\, dx' \right| dx \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{1 \leqslant i \leqslant n} \frac{1}{h_i} \int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} \int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} | f_\varepsilon(x) - f_\varepsilon(x') |\, dx'\, dx \leqslant \omega_{f_\varepsilon}(h) \leqslant \omega_{f_\varepsilon}(\delta) < \frac{1}{3} \varepsilon$$

Далее на основании леммы 1 получаем

$$\| (f_\varepsilon)_{h_1, \ldots, h_n} - f_{h_1, \ldots, h_n} \|_L = \| (f_\varepsilon - f)_{h_1, \ldots, h_n} \|_L \leqslant \| f - f_\varepsilon \|_L$$

Таким образом, из (4.1) и (4.3) получаем при всех $h < \delta$

$$\| f - f_{h_1, \ldots, h_n} \|_L < 2 \| f - f_\varepsilon \|_L + \frac{1}{3} \varepsilon < \varepsilon$$

Если, например, $f \in \mathrm{Lip}_M \alpha$, то для любого разбиения (1.10) имеем

$$\| f - f_{h_1, \ldots, h_n} \|_L \leqslant \frac{2 M h^\alpha}{(1+\alpha)(2+\alpha)}$$

Лемма 3. Для решения уравнения (1.5) при условии $g(0) = H_1$ имеют место оценки $\quad 0 \leqslant g_2(x) \leqslant g_1(x) \leqslant g(x)$, $\quad$ где

$$g_1(x) = \sqrt{p_0} \frac{1 - C_0 \exp(-2\sqrt{p_0} x)}{1 + C_0 \exp(-2\sqrt{p_0} x)}, \qquad C_0 = \frac{\sqrt{p_0} - H_1}{\sqrt{p_0} + H_1}, \quad g_2(x) = \frac{H_1}{1 + x H_1}$$

Доказательство. Функция $g_1(x)$ удовлетворяет уравнению

$$g_1' + g_1^2 = p_0, \qquad g_1(0) = H_1$$

Вычитая из уравнения (1.5) последнее уравнение и обозначая

$$t(x) = g(x) - g_1(x)$$

получаем

$$t' + [g(x) + g_1(x)]\, t = p(x) - p_0, \qquad t(0) = 0$$

Отсюда следует, что $t(x) \geqslant 0$ при x на (0.1). Аналогично доказывается и второе неравенство, если заметить, что функция $g_2(x)$ удовлетворяет уравнению $g_2' + g_2^2 = 0$, где $g_2(0) = H_1$.

Из (2.2) и леммы 3 следует, что $|C_i| \leqslant 1 \qquad (1 \leqslant i \leqslant n)$.

Лемма 4. Для решения поставленной задачи имеют место оценки

$$\|y\|_C \leqslant \gamma \|f\|_L, \qquad \|y'\|_C \leqslant \gamma_1 \|f\|_L, \qquad \|y''\|_L \leqslant \gamma_2 \|f\|_L$$

где

$$\gamma_1 = \tfrac{3}{2} + \tfrac{1}{2}\gamma\|p\|_L, \qquad \gamma_2 = 1 + \gamma\|p\|_L, \qquad \gamma = \frac{1 - \exp(-2\sqrt{p_0})}{\sqrt{p_0}\,[1 + \exp(-2\sqrt{p_0})]} +$$

$$+ \frac{\sqrt{p_0}\,[1 + \exp(-2\sqrt{p_0})] + [\min(H_1, H_2)]\,[1 - \exp(-2\sqrt{p_0})]}{\sqrt{p_0}\,(H_1 + H_2)\,[1 + \exp(-2\sqrt{p_0})] + (H_1 H_2 + p_0)\,[1 - \exp(-2\sqrt{p_0})]}$$

Доказательство. Из леммы 3 и из первой формулы (1.8) имеем

$$\|g\|_C \leqslant \|f\|_L \tag{4.4}$$

Из формул (1.8), (4.4) и леммы 3 получим

$$|y(x)| \leqslant \frac{\|f\|_L}{g(1) + H_2} + \int_x^1 \exp\Big(-\int_x^{x'} g(t)\,dt\Big) \int_0^{x'} |f(x'')| \exp\Big(-\int_{x''}^{x'} g(t)\,dt\Big)\,dx''dx' \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\|f\|_L}{g_1(1) + H_2} + \int_x^1 \exp\Big(-\int_x^{x'} g_1(t)\,dt\Big) \int_0^{x'} |f(x'')| \exp\Big(-\int_{x''}^{x'} g_1(t)\,dt\Big)\,dx''dx'$$

Запишем формулу (2.4) для функции $g_1(t)$ при $t_1 \leqslant t_2$ и t_1, t_2 на $[0,1]$

$$\exp\Big(-\int_{t_1}^{t_2} g_1(t)\,dt\Big) = \exp[-\sqrt{p_0}\,(t_2 - t_1)]\,\frac{1 + C_0 \exp(-2\sqrt{p_0}t_1)}{1 + C_0 \exp(-2\sqrt{p_0}t_2)} \tag{4.5}$$

Отсюда в силу леммы 3 следует неравенство

$$\frac{1 + C_0 \exp(-2\sqrt{p_0}t_1)}{1 + C_0 \exp(-2\sqrt{p_0}t_2)} \leqslant \exp[\sqrt{p_0}\,(t_2 - t_1)] \tag{4.6}$$

Меняя порядок интегрирования и принимая во внимание лемму 3, (4.5) и (4.6), получим далее

$$|y(x)| \leqslant \frac{\|f\|_L}{g_1(1) + H_2} + \frac{1 + C_0 \exp(-2\sqrt{p_0}x)}{2\sqrt{p_0}\,[1 + C_0 \exp(-2\sqrt{p_0})]}\Big[[\exp(-2\sqrt{p_0}x) -$$

$$- \exp(-2\sqrt{p_0})] \int_0^x |f(x'')| \exp[\sqrt{p_0}\,(x + x'')]\,\frac{1 + C_0 \exp(-2\sqrt{p_0}x'')}{1 + C_0 \exp(-2\sqrt{p_0}x)}\,dx'' +$$

$$+ \int_x^1 |f(x'')| \exp[\sqrt{p_0}\,(x + x'')]\,[\exp(-2\sqrt{p_0}x'') - \exp(-2\sqrt{p_0})]\,dx''\Big] \leqslant$$

$$\leqslant \Big[\frac{1 + C_0 \exp(-2\sqrt{p_0})}{\sqrt{p_0}\,[1 - C_0 \exp(-2\sqrt{p_0})] + H_2\,[1 + C_0 \exp(-2\sqrt{p_0})]} +$$

$$+ \frac{[1 + C_0 \exp(-2\sqrt{p_0}x)]\,\{1 - \exp[-2\sqrt{p_0}\,(1 - x)]\}}{2\sqrt{p_0}\,[1 + C_0 \exp(-2\sqrt{p_0})]}\Big]\|f\|_L \leqslant$$

$$\leqslant \Big\{\frac{[1 + C_0 \exp(-2\sqrt{p_0}x)]\,[1 - \exp(-2\sqrt{p_0})]}{2\sqrt{p_0}\,[1 + C_0 \exp(-2\sqrt{p_0})]} +$$

$$+ \frac{\sqrt{p_0} + H_1 + (\sqrt{p_0} - H_1) \exp(-2\sqrt{p_0})}{\sqrt{p_0}\,m_1(p_0) + H_2\, m_2(p_0)}\Big\}\|f\|_L$$

Здесь обозначено

$$m_{1,2}(p_0) = \sqrt{p_0} + H_1 + (\sqrt{p_0} - H_1)\exp(-2\sqrt{p_0})$$

Замечая, что при $C_0 \leqslant 0$

$$\frac{1 + C_0 \exp(-2\sqrt{p_0}x)}{2[1 + C_0 \exp(-2\sqrt{p_0})]} \leqslant \frac{1}{2} \leqslant \frac{1}{1 + \exp(-2\sqrt{p_0})}$$

и при $C_0 \geqslant 0$

$$\frac{1 + C_0 \exp(-2\sqrt{p_0}x)}{2[1 + C_0 \exp(-2\sqrt{p_0})]} \leqslant \frac{1 + C_0}{2[1 + C_0 \exp(-2\sqrt{p_0})]} =$$

$$= \frac{\sqrt{p_0}}{\sqrt{p_0} + H_1 + (\sqrt{p_0} - H_1)\exp(-2\sqrt{p_0})} \leqslant \frac{1}{1 + \exp(-2\sqrt{p_0})}$$

получаем далее

$$\|y\|_C \leqslant \left[\frac{1 - \exp(-2\sqrt{p_0})}{\sqrt{p_0}[1 + \exp(-2\sqrt{p_0})]} + \right.$$

$$\left. \frac{\sqrt{p_0}[1 + \exp(-2\sqrt{p_0})] + H_1[1 - \exp(-2\sqrt{p_0})]}{\sqrt{p_0}(H_1 + H_2)[1 + \exp(-2\sqrt{p_0})] + (H_1H_2 + p_0)[1 - \exp(-2\sqrt{p_0})]}\right] \|f\|_L$$

Ввиду того что числа H_1 и H_2 входят в задачу симметрично, справедлива также оценка, если H_1 и H_2 поменять местами. Этим и завершается оценка $\|y\|_C$. Из уравнения (1.1) при условиях (1.2) получаем

$$y'(x) = \quad H_1 y(0) + \int_0^x p(x')\, y(x')\, dx' - \int_0^x f(x')\, dx'$$

$$y'(x) = -H_2 y(1) - \int_x^1 p(x')\, y(x')\, dx' + \int_x^1 f(x')\, dx'$$

Откуда имеем

$$\|y'\|_C \leqslant \tfrac{1}{2}\,[H_1 |y(0)| + H_2 |y(1)| + \|y\|_C \|p\|_L + \|f\|_L]$$

Принимая во внимание (1.7), лемму 3 и (4.4), получаем

$$|y(1)| \leqslant \frac{\|f\|_L}{H_2}$$

Ввиду симметрии H_1 и H_2 в задаче получаем также

$$|y(0)| \leqslant \frac{\|f\|_L}{H_1}$$

На основании полученных оценок заключаем о справедливости оценки для $\|y'\|_C$. Оценка для $\|y''\|_L$ легко следует из полученных оценок и из уравнения (1.1).

Лемма 4 справедлива при $p_0 = 0$, причем

$$\gamma = 1 + \frac{1 + \min(H_1, H_2)}{H_1 + H_2 + H_1 H_2}$$

Теорема. При условии

$$p_0 + H_1 + H_2 > 0 \tag{4.7}$$

имеют место оценки

$$\|\varepsilon\|_C \leqslant \gamma(\|f - f_{h_1,\ldots,h_n}\|_L + \gamma\|f\|_L\|p - p_{h_1,\ldots,h_n}\|_L)$$

$$\|\varepsilon'\|_C \leqslant \gamma_1(\|f - f_{h_1,\ldots,h_n}\|_L + \gamma\|f\|_L\|p - p_{h_1,\ldots,h_n}\|_L)$$

$$\|\varepsilon''\|_L \leqslant \gamma_2(\|f - f_{h_1,\ldots,h_n}\|_L + \gamma\|f\|_L\|p - p_{h_1,\ldots,h_n}\|_L)$$

Доказательство. Из уравнений (1.1) и (1.9) получим уравнение

$$\varepsilon'' - p(x)\varepsilon = -\delta(x) \tag{4.8}$$

при граничных условиях (1.2). В уравнении (4.8)

$$\delta(x) = f(x) - f_{h_1,\ldots,h_n}(x) + Y(x)\,[p_{h_1,\ldots,h_n}(x) - p(x)] \tag{4.9}$$

Из условия (4.7) следует, что $0 < \gamma < +\infty$. Принимая во внимание неравенства (1.13) и лемму 4 для уравненения (1.9), получим оценку $\|Y\|_C \leqslant \gamma\|f_{h_1,\ldots,h_n}\|_L$, или, в силу леммы 1, имеем

$$\|Y\|_C \leqslant \gamma\|f\|_L$$

Отсюда и из (4.9) получаем оценку

$$\|\delta\|_L \leqslant \|f - f_{h_1,\ldots,h_n}\|_L + \gamma\|f\|_L\,\|p - p_{h_1,\ldots,h_n}\|_L \tag{4.10}$$

Для полного доказательства теоремы осталось применить лемму 4 к уравнению (4.8) и учесть оценку (4.10).

Следствие. При условии (4.7) в силу леммы 2 имеем

$$\|y - Y\|_C \to 0, \qquad \|y' - Y'\|_C \to 0, \qquad \|y'' - Y''\|_L \to 0 \qquad \text{при } h = 0$$

§ 5. Изложенная схема приближенного решения задачи обладает устойчивостью по отношению к случайным ошибкам в том смысле, что если в процессе вычисления величин $Q(x_i)$ [или величин $Y(x_i)$] на каком-либо шаге j будет совершена случайная ошибка ε_j, то эта ошибка при дальнейшем движении по i будет затухать. Действительно, из (2.6) [или из (2.9)] имеем тогда на k-м шаге $(k > j)$

$$\varepsilon_k = \varepsilon_j \prod_{j+1\leqslant i\leqslant k} \frac{\exp(-\sqrt{p_i}h_i)(1 + C_i)}{1 + C_i\exp(-2\sqrt{p_i}h_i)} \leqslant \varepsilon_j\rho^{k-j}$$

где

$$\rho = \max_{1\leqslant i\leqslant n} \frac{\exp(-\sqrt{p_i}h_i)(1 + C_i)}{1 + C_i\exp(-2\sqrt{p_i}h_i)} < 1$$

так как $p_i > 0$, $|C_i| \leqslant 1$, $1 \leqslant i \leqslant n$. Аналогично получим и при $k < j$

$$\varepsilon_k \leqslant \varepsilon_j\rho^{j-k}$$

Такая устойчивость вычислений достигнута благодаря тому, что линейный дифференциальный оператор второго порядка расщеплен по формуле (1.4) на два линейных дифференциальных оператора первого порядка, причем вспомогательная функция $g(x)$ всегда положительна в (0.1). Отсюда следует, что для первого из уравнений (1.6) будет иметь место устойчивость, если вычисления производить в порядке возрастания x, а для второго из уравнений (1.6) устойчивость будет иметь место в том случае, если вычисления производить в порядке убывания x. Эта схема и осуществляется в формулах (2.6) и (2.9). Заметим, что исходный дифференциальный оператор второго порядка с почти всюду положительной функцией $p(x)$ устойчивостью в изложенном смысле не обладает.

Схема вычислений не предполагает, чтобы шаг по x был постоянный. Это позволяет выбирать разбиение (1.10) с учетом особенностей функций $p(x)$ и $f(x)$, которые предполагаются только суммируемыми.

§ 6. Приведем два пример, характеризующие точность схемы вычислений.

Пример 1 [3] (стр. 130)

$$y'' - \frac{2}{x^2}y = -\frac{1}{x}, \qquad y(2) = y(3) = 0$$

Точное решение имеет вид:

$$y(x) = \frac{1}{38}\left(19x - 5x^2 - \frac{36}{x}\right)$$

Здесь $p_0 = {}^2/_9$, $\| f \|_L \approx 0.40$, $H_1 = H_2 = +\infty$. Разбиение (1.10) выбираем с постоянным шагом $h = 0.2$, $x_i = 2 + 0.2i$, $0 \leqslant i \leqslant 5$. Имеем

$$p_i = \frac{2}{x_{i-1}x_i}, \qquad f_i = 5\ln\frac{x_i}{x_{i-1}}, \qquad \gamma \approx 0.93$$

$$\| p - p_{h_1,\ldots,h_5} \|_L \approx 0.0139, \qquad \| f - f_{h_1,\ldots,h_5} \|_L \approx 0.0083$$

Согласно теореме погрешность не будет превосходить 0.0125. Фактическая погрешность значительно меньше указанной, как это видно из приводимой ниже таблицы:

$y(2.2) = 0.03254$,	$y(2.4) = 0.04737$,	$y(2.6) = 0.04615$,	$y(2.8) = 0.03008$
$Y(2.2) = 0.03257$,	$Y(2.4) = 0.04742$,	$Y(2.6) = 0.04620$,	$Y(2.8) = 0.03010$

Пример 2

$$y'' - \frac{1}{\sqrt{x}}y = -\frac{7}{4\sqrt{x}} + x, \qquad y'(0) = y(1) = 0 \qquad (H_1 = 0, \qquad H_2 = +\infty)$$

Точное решение имеет вид:

$$y(x) = 1 - x\sqrt{x}$$

Разбиение (1.10) выбираем с переменным шагом. Приводим результаты вычислений значений $Y(x_i)$ по изложенному здесь способу:

$y(0) = 1.0000$,	$y(0.05) = 0.9888$,	$y(0.15) = 0.9419$
$Y(0) = 0.9938$,	$Y(0.05) = 0.9854$,	$Y(0.15) = 0.9394$
$y(0.30) = 0.8357$,	$y(0.50) = 0.6464$,	$y(0.70) = 0.4143$
$Y(0.30) = 0.8338$,	$Y(0.50) = 0.6452$,	$Y(0.70) = 0.4129$

Автор выражает благодарность Н. Н. Боголюбову за ценные советы при выполнении данной работы.

Поступила 3 XII 1954

ЛИТЕРАТУРА

1. Айнс Э. Л. Обыкновенные дифференциальные уравнения. ОНТИ, Харьков, 1939.
2. Задирака К. В. Укр. матем. журнал, т. VI, № 2, 190—201, 1954.
3. Коллатц Л. Численные методы решения дифференциальных уравнений. Изд. Иностр. лит., 1953.