Прикладная математика и механика. Том XIX, 1955
Институт механики Академии наук Союза ССР

ОБ ОЦЕНКАХ ДЛЯ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ САМОСОПРЯЖЕННОГО ОПЕРАТОРА[1]

М. Г. Слободянский

(Москва)

Задача об определении оценок для собственных значений самосопряженных операторов рассматривалась рядом авторов[1—13].

При этом верхние границы для собственных значений могут быть найдены сравнительно просто, пользуясь вариационным методом и теоремой Куранта[1].

На основании теоремы Куранта о минимаксимальных свойствах собственных значений можно установить, что собственные значения, полученные из уравнений Галеркина, дают верхние границы для первых собственных значений[2].

Более сложным является вопрос об определении нижних границ (по модулю) для собственных значений.

Если известны грубые значения нижних границ для собственных значений, то, пользуясь методом последовательных приближений или теоремами включения (Темпля, Крылова — Боголюбова и др.), можно найти все более узкие границы для собственных значений.

Когда же о расположении собственных значений мы не имеем никаких сведений, то необходимо применять более общие приемы для определения собственных значений.

В случае вполне непрерывного опрератора, например в случае интегрального уравнения Фредгольма, нижние границы для собственных значений можно получить. исходя из теоремы Куранта о минимаксимальных свойствах собственных значений (см., например, [10]). Для неограниченных самосопряженных операторов, к которым относятся краевые задачи для дифференциальных уравнений, получение оценок для собственных значений является более трудной задачей.

Ф. Реллих[6] получил оценки для собственных значений неограниченного самосопряженного оператора, если известны собственные значения «возмущенного» оператора (метод возмущений см. также [10]).

Недостатком метода возмущений следует признать трудность в вычислении последовательных приближений.

Оценки Реллиха были усовершенствованы С.-Надь[10]. Пользуясь методом Реллиха, М. К. Гаврин[12] получил некоторые оценки для собственных значений ограниченных операторов.

В работе [13] предложен способ для определения собственных значений самосопряженных краевых задач, основанный на построении двусторонних приближений для функции Грина. Настоящая работа посвящена задаче об определении оценок для собственных значений для неограниченного самосопряженного оператора.

К таким задачам относятся, как известно, многие краевые задачи для дифференциальных уравнений.

---

[1] Доложено на совещании по теории упругости, теории пластичности и теоретическим вопросам строительной механики 22—25 декабря 1954 г. в Институте механики Академии Наук СССР.

Метод, изложенный в § 1 настоящей работы, основан на использовании минимаксимальных свойств собственных значений и на введении некоторых «близких» операторов.

В качестве примера в § 2 рассмотрена краевая задача для обыкновенного дифференциального уравнения.

В § 3 рассмотрен численный пример для уравнения второго порядка. § 4 посвящен задаче об определении собственных значений самосопряженных положительно-определенных операторов. К операторам этого вида относятся многие краевые задачи математической физики, например основные краевые задачи теории потенциала, теории упругости и др. Для операторов этого вида в § 4 излагается способ определения собственных значений, имеющий ряд существенных преимуществ.

В § 5 и 6 рассмотрены некоторые примеры на применение оценок § 4. Более полная библиография приведена в работах [7,8].

§ 1. Некоторые общие оценки для собственных значений самосопряженного оператора. 1°. Пусть A — самосопряженный оператор, заданный в некотором гильбертовом пространстве H; область его определения обозначим через $D(A)$.

Пусть требуется найти собственные значения уравнения

$$A_\lambda u = (A - \lambda E)\, u = 0 \tag{1.1}$$

где E — тождественный оператор.

Положим, что $\lambda = 0$ не есть собственное значение оператора A и что все собственные значения оператора A — конечной кратности (рассматривается самосопряженный оператор A с чисто точечным спектром).

О том, как установить, является ли $\lambda = 0$ регулярным значением оператора A, речь будет ниже.

Введя обратный оператор A^{-1}, имеем из (1.1)

$$-\mu u + A^{-1} u = 0 \qquad \left(\mu = \frac{1}{\lambda}\right) \tag{1.2}$$

Пусть A^{-1} — вполне непрерывный оператор. Наряду с уравнением (1.1) рассмотрим уравнение

$$A_1 u - \lambda u = 0 \tag{1.3}$$

Положим, что оператор A_1 имеет вполне непрерывный образный A_1^{-1}, тогда

$$-\mu u + A_1^{-1} u = 0 \qquad \left(\mu = \frac{1}{\lambda}\right) \tag{1.4}$$

Пусть

$$M = \sup\left((A^{-1} - A_1^{-1}) f, f\right), \quad m = \inf\left((A^{-1} - A_1^{-1}) f, f\right) \quad (\|f\| = 1) \tag{1.5}$$

Тогда собственные значения оператора $A^{-1} - A_1^{-1}$, как известно, лежат в интервале $\{m, M\}$.

Следовательно, оператор $A^{-1} - A_1^{-1} - mE$ положительный и

$$A_1^{-1} + (A^{-1} - A_1^{-1}) - mE = A^{-1} - mE > A_1^{-1}. \tag{1.6}$$

Следовательно, как известно, на основании теоремы Куранта [2] о минимаксимальных свойствах собственных значений имеем [10]

$$\mu_n^+ - m > \mu_{1n}^+ \tag{1.7}$$

где μ_n^+ — положительное собственное значение оператора A, а μ_{1n}^+ — положительное собственное значение оператора A_1, причем каждое собственное значение считается столько раз, какова его кратность, и

$$\mu_1 \geqslant \mu_2 \geqslant \mu_3 \geqslant \ldots, \qquad \mu_{11} \geqslant \mu_{12} \geqslant \mu_{13} \geqslant \ldots$$

Поменяв A и A_1 местами, аналогичным образом найдем

$$\mu_n^+ < \mu_{1n}^+ + M \tag{1.8}$$

Из неравенств (1.7) и (1.8) найдем

$$|\mu_n^+ - \mu_{1n}^+| \leqslant \max(|m|, |M|) = \|A^{-1} - A_1^{-1}\| \tag{1.9}$$

Аналогичным образом, если μ_n^- и μ_{1n}^- — отрицательные собственные значения операторов A и A_1 соответственно, то

$$|\mu_n^- - \mu_{1n}^-| < \|A^{-1} - A_1^{-1}\| \tag{1.10}$$

Введем теперь оператор A_2, имеющий вполне непрерывный обратный A_2^{-1}. Из (1.10) получим

$$|\mu_n^+ - \mu_{1n}^+| < \|A^{-1} - A_1^{-1}\| = \|A^{-1} - A_2^{-1} + A_2^{-1} - A_1^{-1}\| <$$
$$< \|A^{-1} - A_2^{-1}\| + \|A_2^{-1} - A_1^{-1}\| \tag{1.11}$$

Далее имеем

$$\|A^{-1} - A_2^{-1}\| = \|A^{-1}(A_2 - A)A_2^{-1}\| = \|A^{-1}(AA_2^{-1} - E)\| <$$
$$< \|A^{-1}\| \|AA_2^{-1} - E\| \tag{1.12}$$

Оценку для величины $\|A^{-1}\|$ можно найти, если известна оценка снизу λ_0 для первого собственного значения λ_1 оператора A. Тогда можно принять $\|A^{-1}\| \leqslant {}^1/\lambda_0$, где $\lambda_0 \leqslant \lambda_1$ (мы рассматриваем операторы с чисто точечным спектром). Итак, пусть каким-либо способом найдена оценка ${}^1/\lambda_0$ для величины $\|A^{-1}\|$. Далее из (1.11) и (1.12) следует

$$|\mu_n^+ - \mu_{1n}^+| < \|A^{-1}\| \|AA_2^{-1} - E\| + \|A_2^{-1} - A_1^{-1}\| \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{\lambda_0} \|AA_2^{-1} - E\| + \|A_2^{-1} - A_1^{-1}\| = \alpha \tag{1.13}$$

где α — некоторое число.

Операторы A_1^{-1} и A_2^{-1} будем считать известными. Из (1.13) имеем

$$\left|\frac{1}{\lambda_n} - \frac{1}{\lambda_{1n}}\right| = \frac{|\lambda_{1n} - \lambda_n|}{\lambda_n \lambda_{1n}} < \alpha \tag{1.14}$$

Рассмотрим интервал

$$\delta_1 + \lambda_{1n} < \lambda < \lambda_{1n} + \delta_2 \tag{1.15}$$

где δ_1 и δ_2 определяются неравенством (1.14), т. е. рассмотрим интервал, на котором имеет место неравенство

$$\left|\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda_{1n}}\right| \leqslant \alpha \tag{1.16}$$

Из (1.16) следует

$$\frac{1}{\lambda_{1n} + \delta_1} - \frac{1}{\lambda_{1n}} = \alpha, \qquad \frac{1}{\lambda_{1n} + \delta_2} - \frac{1}{\lambda_{1n}} = -\alpha \tag{1.17}$$

Откуда

$$\delta_1 = -\frac{\alpha\lambda_{1n}^2}{1+\alpha\lambda_{1n}}, \qquad \delta_2 = \frac{\alpha\lambda_{1n}^2}{1-\alpha\lambda_{1n}} \tag{1.18}$$

Из (1.14) вытекает следующая теорема.

Теорема. 1. Если λ_{1n} — собственное значение кратности $k+1$, т. е.

$$\lambda_{1n} = \lambda_{1,n+1} = \ldots = \lambda_{1,n+k}$$

то в интервале

$$\delta_1 + \lambda_{1n} < \lambda < \lambda_{1n} + \delta_2, \qquad \delta_2 - \delta_1 = \frac{2\alpha\lambda_{1n}^2}{1-\alpha^2\lambda_{1n}^2} \tag{1.19}$$

лежат $k+1$ собственных значений $\lambda_n, \ldots, \lambda_{n+k}$ оператора A.

2. Если

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\lambda_{1,n+k+1}} - \frac{1}{\lambda_{1n}}\right) > \alpha, \qquad \frac{1}{2}\left|\frac{1}{\lambda_{1,n-1}} - \frac{1}{\lambda_{1n}}\right| > \alpha \tag{1.20}$$

то в интервале (1.19) нет других собственных значений оператора A, кроме собственных значений $\lambda_n, \ldots, \lambda_{n+k}$.

Доказательство. Первое утверждение теоремы следует непосредственно из неравенства (1.14), ибо

$$\left|\frac{1}{\lambda_{n+i}} - \frac{1}{\lambda_{1,n+i}}\right| < \alpha, \qquad \lambda_{1,n+i} = \lambda_{1n} \qquad (i = 0, 1, \ldots, k) \tag{1.21}$$

и, следовательно, на основании (1.17) — (1.18) собственные значения λ_{n+i} $(i = 0\, 1, \ldots, k)$ лежат на интервале (1.19).

Для доказательства второго утверждения напишем неравенство, аналогичное (1.14):

$$\left|\frac{1}{\lambda_{n+k+1}} - \frac{1}{\lambda_{1,n+k+1}}\right| < \alpha \tag{1.22}$$

или

$$\left|\left(\frac{1}{\lambda_{n+k+1}} - \frac{1}{\lambda_{1n}}\right) - \left(\frac{1}{\lambda_{1,n+k+1}} - \frac{1}{\lambda_{1n}}\right)\right| < \alpha \tag{1.23}$$

Из (1.23) следует

$$-\left|\frac{1}{\lambda_{n+k+1}} - \frac{1}{\lambda_{1n}}\right| + \left|\frac{1}{\lambda_{1,n+k+1}} - \frac{1}{\lambda_{1n}}\right| < \alpha \tag{1.24}$$

Принимая во внимание неравенство (1.20), получим из (1.24)

$$2\alpha - \left|\frac{1}{\lambda_{n+k+1}} - \frac{1}{\lambda_{1n}}\right| < \alpha \quad \text{или} \quad \left|\frac{1}{\lambda_{n+k+1}} - \frac{1}{\lambda_{1n}}\right| > \alpha \tag{1.25}$$

т. е. собственное значение λ_{n+k+1} оператора A лежит вне интервала, определяемого неравенством (1.19), что и требовалось доказать.

В частности, если $n = 1$, кратность корня λ_{11} равна 1, т. е. $k = 0$, и

$$\frac{1}{\lambda_{1,2}} - \frac{1}{\lambda_{1,1}} > 2\alpha \tag{1.26}$$

то на интервале

$$\delta_1 + \lambda_{11} < \lambda < \lambda_{11} + \delta_2 \qquad \left(\delta_1 = -\frac{\alpha\lambda_{11}^2}{1+\alpha\lambda_{11}},\ \delta_2 = \frac{\alpha\lambda_{11}^2}{1-\alpha\lambda_{11}}\right) \tag{1.27}$$

нет собственных значений оператора A, кроме собственного значения λ_1.

2°. Перейдем теперь к вопросу о построении операторов A_1^{-1} и A_2^{-1}.

В качестве оператора A_1^{-1} возьмем оператор, собственные значения которого известны. В частности, в качестве оператора A_1^{-1} можно взять вырожденный оператор, который можно построить, например, методом Галеркина следующим образом.

Пусть элементы $\varphi_1, \ldots, \varphi_m$ принадлежат области определения A_D оператора A. Составим уравнения Галеркина для определения приближенного решения уравнения

$$Au = f \tag{1.28}$$

где f принадлежит H. Имеем

$$u_m = \sum_{k=1}^{m} a_k \varphi_k \qquad (a_k = \mathrm{const}) \tag{1.29}$$

$$\sum_{k=1}^{m} a_k (A\varphi_k, \varphi_r) = (f, \varphi_r) \qquad (r = 1, \ldots, m) \tag{1.30}$$

Из системы уравнений Галеркина (1.30) найдем

$$a_k = \sum_{r=1}^{m} b_{kr} (f, \varphi_r) \qquad (b_{kr} = \mathrm{const},\ k = 1, \ldots, m) \tag{1.31}$$

Подставляя (1.31) в (1.29), получим

$$u_m = \sum_{r=1}^{m} \sum_{k=1}^{m} b_{kr} (f, \varphi_r) \varphi_k = \sum_{k=1}^{m} (f, \psi_k) \varphi_k \tag{1.32}$$

где

$$\psi_k = \sum_{r=1}^{m} b_{kr} \varphi_r, \qquad b_{kr} = b_{rk} \tag{1.33}$$

За оператор $A_1^{-1}f$ примем правую часть (1.32), т. е. положим

$$A_1^{-1} f = \sum_{k=1}^{m} (f, \psi_k) \varphi_k = \sum_{k=1}^{m} \sum_{r=1}^{m} b_{kr} (f, \varphi_r) \varphi_k \tag{1.34}$$

Тогда очевидно, что собственные значения оператора A_1^{-1} будут равны обратным величинам собственных значений следующей системы уравнений Галеркина [11] для приближенного определения собственных значений оператора A:

$$\sum_{k=1}^{m} c_k [(A\varphi_k, \varphi_r) - \lambda (\varphi_k, \varphi_r)] = 0 \qquad (c_k = \mathrm{const},\ r = 1, \ldots, m) \tag{1.35}$$

Далее положим

$$A_2^{-1} = A_0 + A_{02} \tag{1.36}$$

где A_0 — вполне непрерывный оператор, который мы считаем известным.

Вопрос о построении оператора A_0 должен быть рассмотрен отдельно (см. § 2 настоящей работы). В качестве оператора A_{02} также можно взять вырожденный оператор

$$A_{02}f = \sum_{k=1}^{m} \sum_{r=1}^{m} b_{kr}'(f, \varphi_r)\varphi_k = \sum_{k=1}^{m} (f, \psi_k')\varphi_k \tag{1.37}$$

где

$$\psi_k' = \sum_{r=1}^{m} b_{kr}'\varphi_r, \qquad b_{kr}' = b_{rk}' = \text{const} \tag{1.38}$$

Коэффициенты b_{kr}', входящие в (1.38), будем определять из условия, чтобы найденная оценка для величины

$$\| AA_2^{-1} - E \| = \sup \frac{\| (AA_2^{-1} - E) f \|}{\| f \|} \tag{1.39}$$

была наименьшей.

Другой способ определения коэффициентов b_{kr} и b_{kr}', входящих в (1.32) и (1.37) соответственно, заключается в том, чтобы полученная оценка для α в (1.13) была наименьшей. Однако при этом мы получим сложную систему уравнений для определения b_{kr} и b_{kr}'. Поэтому поступим следующим образом.

Коэффициенты b_{kr}' будем искать, как и выше, из того условия, чтобы оценка для величины (1.39) была наименьшей, а коэффициенты b_{kr} будем искать из условия, чтобы полученная оценка для величины (1.40)

$$\| A_2^{-1} - A_1^{-1} \| = \| A_0 + A_{02} - A_1^{-1} \| = \sup \frac{\| (A_0 + A_{02} - A_1^{-1}) f \|}{\| f \|} \tag{1.40}$$

входящей в (1.13), была наименьшей. Затем определяем собственные значения вырожденного оператора $A_1^{-1}f$ обычным способом.

Этот метод приводит к меньшим значениям для величины α, входящей в (1.13), чем метод Галеркина, как это ясно из приведенных рассуждений.

Остановимся теперь на вопросе об определении величины $\| A^{-1} \|$, входящей в (1.13). Из (1.12), принимая во внимание, что $\| A^{-1} \| - \| A_2^{-1} \| < \| A^{-1} - A_2^{-1} \|$, найдем $\| A^{-1} \| - \| A_2^{-1} \| < \| A^{-1} \| \| AA_2^{-1} - E \|$. Откуда получим известное неравенство

$$\| A^{-1} \| < \frac{\| A_2^{-1} \|}{1 - \| AA_2^{-1} - E \|} \tag{1.41}$$

при условии

$$1 - \| AA_2^{-1} - E \| > 0 \tag{1.42}$$

В частности, если A и A_2 — операторы второго рода ($A = E - \lambda K$, $A_2 = E - \lambda K_2$), то, как показал Л. В. Канторович, при выполнении неравенства (1.42) следует, что λ не есть собственное значение оператора $A = E - \lambda K$ (Л. В. Канторович [9] рассматривает операторы в банаховом пространстве).

Еще раньше Л. В. Канторовичем и В. И. Крыловым [4] и А. И. Акбергеновым [5] неравенства вида (1.41) — (1.42) получены для уравнения

Фредгольма. На основании (1.41), если чевез λ_1 обозначим наименьшее по модулю собственное значение оператора A, то

$$|\lambda_1| > \frac{1 - \| A(A_0 + A_{02}) - E \|}{\| A_0 + A_{02} \|} \tag{1.43}$$

при условии

$$1 - \| A(A_0 + A_{02}) - E \| > 0 \tag{1.44}$$

Если известен оператор $A_0 + A_{02}$, который близок в смысле нормы к оператору A^{-1}, но неизвестны собственные значения этого оператора, то оценка (1.43) дает, вообще говоря, грубую оценку для величины λ_1. Поэтому положим, что известен оператор $A_0 + A_{02}(\lambda')$, «близкий» по норме к оператору $(A - \lambda' E)^{-1}$.

Подставим в неравенства (1.43) и (1.44) вместо операторов A и A_{02} операторы $A - \lambda_0 E$ и $A_{02}(\lambda')$ соответственно. Тогда получим

$$|\lambda_1 - \lambda_0| > \frac{1 - \| (A - \lambda_0 E)[A_0 + A_{02}(\lambda')] - E \|}{\| A_0 + A_{02}(\lambda') \|} \tag{1.45}$$

где $(\lambda_1 - \lambda_0)$ — наименьшее по модулю собственное значение оператора $A - \lambda_0 E$, т. е. $|\lambda_1 - \lambda_0| = \| (A - \lambda_0 E)^{-1} \|$.

Следовательно, если λ удовлетворяет неравенству

$$|\lambda - \lambda_0| < \frac{1 - \| (A - \lambda_0 E)[A_0 + A_{02}(\lambda')] - E \|}{\| A_0 + A_{02}(\lambda') \|} \tag{1.46}$$

то λ не является собственным значением оператора A, если

$$1 - \| (A - \lambda_0 E)[A_0 + A_{02}(\lambda')] - E \| > 0 \tag{1.47}$$

Отсюда также следует, что если выполнено неравенство (1.47), то λ_0 не есть собственное значение оператора A.

Существенной особенностью неравенства (1.47) является введение операторов A и A_{02} и параметров λ_0 и λ'.

Пусть теперь известна оценка при любом значении λ_0.

$$\| (A - \lambda_0 E)[A_0 + A_{02}(\lambda')] - E \| \leqslant a(\lambda') + 2\lambda_0 b(\lambda') + \lambda_0^2 c(\lambda') \tag{1.48}$$

Тогда, как это следует из (1.47), λ_0 не является собственным значением оператора A, если выполнено неравенство

$$-1 + a(\lambda') + 2\lambda_0 b(\lambda') + \lambda_0^2 c(\lambda') \leqslant 0 \tag{1.49}$$

Откуда

$$\lambda_0^{\pm} = \lambda_0^{\pm}(\lambda') = \frac{1}{c}\left(b \pm \sqrt{b^2 + c(1 - a)}\right) \tag{1.50}$$

Если оператор A — положительный, то вместо λ_0 следует взять λ_0^+, а в общем случае — наименьшее из чисел λ_0^+, $|\lambda_0^-|$. Может оказаться также выгодным в связи с этим перейти от рассмотрения оператора A к определению собственных значений оператора $A - bE$. Из (1.50) следует, что для определения λ_0 надо подобрать коэффициенты b_{kr}', входящие в (1.37), из того условия, чтобы правая часть (1.50) была наибольшей. Однако при этом мы получим сложную систему уравнений для определения b_{kr}'. Поэтому поступим следующим образом.

Построим оператор $A_0+A_{02}(\lambda')$, пользуясь каким-либо приближенным методом, так, чтобы оператор $A_0+A_{02}(\lambda')$ был «близок» к оператору $(A-\lambda' E)^{-1}$, т. е. чтобы, например, оценка величины

$$\|(A-\lambda' E)[A_0+A_{02}(\lambda')]-E\| \tag{1.51}$$

была наименьшей. Тогда, очевидно, величины b_{kr}' будут функциями от λ'. Из (1.50) тогда найдем значение для λ_0, если выполнено неравенство (1.49) при любом $0\leqslant\lambda\leqslant\lambda_0$.

3°. Подставим теперь в (1.13) вместо операторов A, A_1^{-1} и $A_2^{-1}=A_0+A_{02}$ операторы $A-\lambda^\circ E$, $A_1^{-1}(\lambda^\circ)$ и $A_0+A_{02}(\lambda^\circ)$ соответственно, где λ° — постоянное, причем полагаем, что λ° не есть собственное значение оператора A. Получим вместо (1.13)

$$\left|\frac{1}{\lambda_n-\lambda^\circ}-\frac{1}{\lambda_{1n}(\lambda^\circ)}\right|<\|(A-\lambda^\circ E)^{-1}\|\,\|(A-\lambda^\circ E)[A_0+A_{02}(\lambda^\circ)]-E\|\leqslant$$
$$\leqslant\frac{1}{\lambda_1{}^0}\|(A-\lambda^\circ E)[A_0+A_{02}(\lambda^\circ)]-E\|\leqslant\alpha(\lambda^\circ) \tag{1.52}$$
$$\|(A-\lambda^\circ E)^{-1}\|\leqslant\frac{1}{\lambda_1{}^\circ}$$

где $\lambda_1{}^\circ$ — нижняя грань наименьшего по модулю собственного значения оператора $A-\lambda^\circ E$ и $A_1^{-1}(\lambda^\circ)$, $A_0+A_{02}(\lambda^\circ)$ — операторы, «близкие» к оператору $(A-\lambda^\circ E)^{-1}$.

Полагая, как и выше, что $A_1^{-1}(\lambda^\circ)$ и $A_{02}(\lambda^\circ)$ — вырожденные операторы, взятые в виде (1.33) и (1.37), и определяя коэффициенты b_{kr} и b_{kr}', как и выше, из того условия, чтобы оценки для величин

$$\|(A-\lambda^\circ E)(A_0+A_{02})-E\|,\qquad \|A_0+A_{02}-A_1^{-1}\| \tag{1.53}$$

были наименьшими, мы, очевидно, получим значения b_{kr} и b_{kr}', а также λ_{1n} и α как функции от λ°.

Очевидно, что для того, чтобы интервал $\delta_2-\delta_1$ из (1.19), заключающий собственные значения оператора A, был наименьшим, следует определить λ° из условия минимума значения величины

$$\delta_2(\lambda^\circ)-\delta_1(\lambda^\circ)=\frac{2\alpha(\lambda^\circ)\,\lambda_{1n}{}^2(\lambda_0)}{1-[\alpha(\lambda^\circ)\,\lambda_{1n}(\lambda^\circ)]^2} \tag{1.54}$$

Примечание. Если определение $\alpha(\lambda^\circ)$ и $\lambda_{1n}(\lambda^\circ)$ представляет известные трудности, то можно подставить в (1.52) вместо операторов $A_1^{-1}(\lambda^\circ)$ и $A_{02}(\lambda^\circ)$ операторы $A_1^{-1}(\lambda')$ и $A_{02}(\lambda'')$ соответственно, где λ' и λ'' — произвольные числа, однако близкие к вероятному значению λ°. В этом случае выражение для функции в правой части (1.54) значительно упрощается, ибо мы считаем λ' и λ'' известными.

§ 2. Определение собственных значений в случае краевой задачи для обыкновенного дифференциального уравнения. Пусть имеем самосопряженную краевую задачу

$$Au=\sum_{\nu=0}^{s}(-1)^\nu\frac{d^\nu}{dx^\nu}\left[p_\nu(x)\,\frac{d^\nu u}{dx^\nu}\right]=f(x) \tag{2.1}$$

$$\begin{aligned} u^{(s-1)}(a)&=u^{(s-2)}(a)=\cdots=u(a)=0\\ u^{(s-1)}(b)&=u^{(s-2)}(b)=\cdots=u(b)=0\end{aligned} \tag{2.2}$$

Рассмотрим задачу об определении собственных значений уравнения

$$Au - \lambda u = 0 \tag{2.3}$$

при краевых условиях (2.2). Положим в (1.36)

$$A_0 u = \int_a^b g_0(x, y)\, u(y)\, dy \tag{2.4}$$

где g_0 — функция Грина оператора

$$Lu = (-1)^s \frac{d^s}{dx^s}\left(p_s \frac{d^s u}{dx^s}\right) \tag{2.5}$$

при краевых условиях (2.2).

Далее выберем систему координатных элементов φ_k $(k = 1, \ldots, m)$, удовлетворяющих краевым условиям (2.2), и положим, как и выше [(1.32) и (1.37)]:

$$A_1^{-1} f = \sum_{k=1}^{m} \sum_{r=1}^{m} b_{kr}' (\varphi_k, f)\, \varphi_r, \qquad A_{02} f = \sum_{k=1}^{m} \sum_{r=1}^{m} b_{kr} (\varphi_k, f)\, \varphi_r \tag{2.6}$$

где скалярное произведение определено по формуле

$$(\varphi_k, f) = \int_a^b \varphi_k f\, dx \tag{2.7}$$

Подставляя $A_{02} f$ согласно (2.6) в (1.39), найдем, применяя неравенство Буняковского:

$$\| AA_2^{-1} - E \|^2 = \sup \frac{1}{\| f \|^2} \| (AA_2^{-1} - E) f \| \leqslant \frac{1}{\| f \|^2} \int_a^b [A(A_0 + A_{02}) f - f]^2\, dy =$$

$$= \frac{1}{\| f \|^2} \int_a^b \left\{ \int_a^b \left[\psi_0 + \sum_{k=1}^{m} \sum_{r=1}^{m} b_{kr} A[\varphi_r(x)]\, \varphi_k(y) \right] f(x)\, dx \right\}^2 dy <$$

$$< \int_a^b \int_a^b [\psi(x, y)]^2\, dx\, dy = d^2 \tag{2.8}$$

где

$$\psi(x, y) = \psi_0(x, y) + \sum_{k=1}^{m} \sum_{r=1}^{m} b_{kr} A[\varphi_r(x)]\, \varphi_k(y) \tag{2.9}$$

$$\psi_0(x, y) = (A - L)\, g_0(x, y) = A^\circ [g_0(x, y)], \qquad \| f \|^2 = \int_a^b f^2(x)\, dx \tag{2.10}$$

Соотношение (2.10) следует из того, что

$$AA_0 f - f = A \int_a^b g_0(x, y)\, f(y)\, dy - f =$$

$$= L\left\{ \int_a^b g_0(x, y)\, f(y)\, dy \right\} - f + \int_a^b A^\circ [g_0(x, y)]\, f(y)\, dy =$$

$$= \int_a^b \psi_0(x, y)\, f(y)\, dy \tag{2.11}$$

где оператор L определяется по формуле (2.5) и

$$A^{\circ}u = (A - L)\,u = \sum_{\nu=0}^{s-1} (-1)^{\nu} \frac{d^{\nu}}{dx^{\nu}}\left[p_{\nu}(x)\frac{d^{\nu}u}{dx^{\nu}}\right] \tag{2.12}$$

Аналогичным образом, подставляя $A_1^{-1}f$ согласно (2.6) в (1.40) и применяя далее неравенство Буняковского, найдем (2.13)

$$\|A_0 + A_{02} - A_1^{-1}\|^2 < \frac{1}{\|f\|}\,\|(A_0 + A_{02} - A_1^{-1})\,f\| < \int_a^b\int_a^b \psi_1^2(x,\ y)\,dx\,dy = d_1$$

где

$$\psi_1(x,\ y) = g_0(x,\ y) + \sum_{k=1}^{m}\sum_{r=1}^{m} (b_{kr} - b_{kr}')\,\varphi_r(x)\,\varphi_k(y) \tag{2.14}$$

Далее из условий минимума правых частей (2.8) и (2.13)

$$d^2 = \int_a^b\int_a^b \psi^2\,dx\,dy = \min, \qquad d_1^2 = \int_a^b\int_a^b \psi_1^2\,dx\,dy = \min \tag{2.15}$$

получим системы уравнений для определения коэффициентов b_{kr} и b_{kr}':

$$\int_a^b\int_a^b \Big(\psi_0 + \sum_{k=1}^{m}\sum_{r=1}^{m} b_{kr}A\,[\varphi_r]\,\varphi_k\Big)\,A\,[\varphi_i]\,\varphi_j dx\,dy = 0 \tag{2.16}$$

$$\begin{pmatrix} i = 1,\ \ldots,\ m \\ j = 1,\ \ldots,\ m \end{pmatrix}$$

$$\int_a^b\int_a^b \Big(g_0 + \sum_{k=1}^{m}\sum_{r=1}^{m} (b_{kr} - b_{kr}')\,\varphi_r\varphi_k\Big)\,\varphi_i\varphi_j\,dx\,dy = 0 \tag{2.17}$$

Определив b_{kr} и b_{kr}', найдем величины d и d_1, входящие в (2.8) и (2.13). Определим далее собственные значения уравнения

$$A_1^{-1}f - \frac{1}{\lambda}f = 0 \tag{2.18}$$

Для этого положим в (2.18)

$$f = \sum_{j=1}^{m} c_j\varphi_j \tag{2.19}$$

и найдем $\min\,(A_1^{-1}f,\ f)$ при $\|f\| = 1$, где f определяется по формуле (2.19). Получим следующую систему уравнений, которая в данном случае совпадает с системой уравнений Галеркина для уравнения (2.18):

$$\sum_{j=1}^{m} c_j \left\{(A_1^{-1}\varphi_j,\ \varphi_i) - \frac{1}{\lambda}(\varphi_j,\ \varphi_i)\right\} = 0 \qquad (i = 1,\ \ldots,\ m) \tag{2.20}$$

Из первого равенства (2.6) далее имеем

$$(A_1^{-1}\varphi_k,\ \varphi_r) = \sum_{r=1}^{m}\sum_{k=1}^{m} b_{kr}'\,(\varphi_k,\ \varphi_j)\,(\varphi_r,\ \varphi_i) = \sum_{r=1}^{m}\sum_{k=1}^{m} b_{kr}'\alpha_{kj}\alpha_{ri} = \beta_{ij} \tag{2.21}$$

где введено обозначение

$$(\varphi_i,\ \varphi_j) = \int_a^b \varphi_i\,\varphi_j dx = \alpha_{ij} \tag{2.22}$$

Подставляя (2.21) в (2.20), найдем

$$\sum_{j=1}^{m} c_j \left(\beta_{ij} - \frac{1}{\lambda}\alpha_{ij}\right) = 0 \tag{2.23}$$

и, следовательно, собственные значения $1/\lambda_{11}, \ldots, 1/\lambda_{1m}$ оператора A_1^{-1} суть корни уравнения

$$D_m(\lambda) = \begin{vmatrix} \beta_{11} - \frac{1}{\lambda}\alpha_{11} & \ldots & \beta_{1m} - \frac{1}{\lambda}\alpha_{1m} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \beta_{m1} - \frac{1}{\lambda}\alpha_{m1} & \ldots & \beta_{mm} - \frac{1}{\lambda}\alpha_{mm} \end{vmatrix} = 0 \tag{2.24}$$

Уравнение (2.24) упрощается, если система функций φ_k ортонормированная, ибо в этом случае $\alpha_{ij} = 0$ при $i \neq j$ и $\alpha_{ii} = 1$.

Иначе можно построить операторы $A_1^{-1}f$ и $A_{02}f$ способом, изложенным в § 2, а именно оператор $A_1^{-1}f$ можно построить методом Галеркина (это дает возможность найти верхние границы для собственных значений), а затем определить коэффициенты b_{kr}, входящие в (2.7), чтобы найденное значение для α из (1.13) было наименьшим.

Из (1.13), принимая во внимание (2.8), (2.13) и (2.23), найдем

$$\alpha = \frac{1}{\lambda_0} d + d_1 \tag{2.25}$$

Воспользовавшись далее формулами (1.18)—(1.20), найдем оценки для собственных значений задачи (2.3)—(2.2).

Аналогичным образом могут быть найдены оценки для собственных значений, если вместо (1.13) воспользуемся оценкой (1.52) и оценим величины (1.53)—(1.54).

Далее остановимся на вопросе об определении величины $\| A^{-1} \|$, входящей в (1.13), в рассматриваемой краевой задаче.

Вместо (1.48) в данном случае получим, принимая во внимание (2.9)—(2.11):

$$\| (A - \lambda_0 E)(A_0 + A_{02}) \| < \int_a^b \int_a^b \psi^2(x, y)\, dx\, dy = a + 2b\lambda_0 + c\lambda_0^2 \tag{2.26}$$

где

$$\begin{gathered} \psi = \psi_{\lambda_0}(x, y) + \sum_{r=1}^{m} \sum_{k=1}^{m} b_{kr} \left(A[\varphi_r(x)] - \lambda_0 \varphi_r(x)\right) \varphi_k(y) \\ \psi_{\lambda_0}(x, y) = (A - L - \lambda_0 E)\, g_0(x, y) = A^\circ [g_0(x, y)] - \lambda_0 g_0(x, y) \end{gathered} \tag{2.27}$$

Откуда, подставляя (2.27) в (2.26), найдем величины a, b и c и по формуле (1.50) определим λ_0.

Примечание. Полагая в (2.27) и (2.26), в частности, $b_{kr} = 0$, найдем

$$a + 2b\lambda_0 + c\lambda_0^2 = \int_a^b \int_a^b (A^\circ g_0 - \lambda_0 g_0)^2\, dx\, dy =$$

$$= \int_a^b \int_a^b [A^\circ g_0]^2 dx\, dy + 2\lambda_0 \int_a^b \int_a^b A^\circ g_0 g_0\, dx\, dy + \lambda_0^2 \int_a^b \int_a^b g_0^2 dx\, dy \tag{2.28}$$

Откуда

$$\lambda_0^{\pm} = \frac{b \pm \sqrt{b^2 - c\,(a-1)}}{a} \tag{2.29}$$

где

$$a = \int_a^b\int_a^b [A^\circ g_0]^2\, dx\, dy = \int_a^b\int_a^b \psi_0^2 dx\, dy$$

$$b = \int_a^b\int_a^b [A^\circ g_0]\, g_0\, dx\, dy = \int_a^b\int_a^b \psi_0 g_0 dx\, dy \tag{2.30}$$

$$c = \int_a^b\int_a^b g_0^2 dx\, dy$$

Оценка (2.29), (2.30) является грубой оценкой, однако во многих задачах эта оценка дает достаточно хорошее приближение снизу для наименьшего по модулю собственного значения оператора A.

Примечание. Для многих самосопряженных краевых задач для уравнений в частных производных можно получить аналогичные результаты, беря в качестве оператора A_0 оператор вида

$$A_0 f = \int_\Omega g_0 f d\Omega$$

где Ω — область тела, g_0 — главная часть функции Грина.

§ 3. Краевая задача для уравнения второго порядка (определение собственных значений). Пусть требуется найти собственные значения уравнения

$$-\frac{d^2u}{dx^2} + (x - 1.5)\, u - \lambda u = 0 \tag{3.1}$$

при краевых условиях

$$u\,(0) = u\,(1) = 0 \tag{3.2}$$

В качестве функции g_0, входящей в (2.4), возьмем функцию Грина для дифференциального оператора $L_1(u) = -d^2u\,/\,dx^2$ при краевых условиях (3.2), которая, как известно, имеет вид:

$$g_0\,(x,\ y) = \begin{cases} x\,(1-y) & (0 \leqslant x \leqslant y) \\ y\,(1-x) & (y < x \leqslant 1) \end{cases} \tag{3.3}$$

Подставляя (3.3) в (2.11), найдем

$$\psi_0\,(x,\ y) = \begin{cases} (x-1.5)\, x\,(1-y) & (0 \leqslant x \leqslant y) \\ (x-1.5)\, y\,(1-x) & (y < x \leqslant 1) \end{cases} \tag{3.4}$$

В качестве системы функции φ_k, входящей в (2.6), возьмем функции вида

$$\varphi_k\,(x) = x\,(1-x)\, x^{k-1} \qquad (k = 1,\ 2,\ \ldots) \tag{3.5}$$

удовлетворяющие краевым условиям (3.2).

Ограничимся в (3.5) двумя функциями:

$$\varphi_1 = x\,(1-x), \qquad \varphi_2 = x^2\,(1-x) \tag{3.6}$$

Далее возьмем оператор $A_1^{-1}f$ в виде (2.6)

$$A_1^{-1}f = \sum_{k=1}^{2}\sum_{r=1}^{2} b_{kr}\,(\varphi_k,\ f)\,\varphi_r \tag{3.7}$$

где скалярное произведение, как и в § 2, определено по формуле

$$(\varphi_k,\ f) = \int_0^1 \varphi_k\,(x)\, f(x)\, dx \tag{3.8}$$

Далее положим в (2.6) в данном случае $b_{kr} = 0$, т. е. $A_{02}f = 0$.

Коэффициенты b_{kr} будем искать из условия минимума второго выражения (2.15), т. е. из системы уравнений (2.17), где положено $b_{kr} = 0$.

Подставляя (3.6) в (2.17), найдем, полагая $b_{kr} = 0$:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{900} b_{11} + \frac{1}{900} b_{12} + \frac{1}{3600} b_{22} &= \frac{17}{5040} \\
\frac{1}{900} b_{11} + \frac{2}{1575} b_{12} + \frac{1}{3150} b_{22} &= \frac{17}{5040} \\
\frac{1}{3600} b_{11} + \frac{1}{3150} b_{12} + \frac{1}{11025} b_{22} &= \frac{11}{12600}
\end{aligned} \tag{3.9}$$

Откуда

$$b_{11} = \frac{85}{28}, \qquad b_{22} = -\frac{21}{32}, \qquad b_{22} = \frac{21}{8} \tag{3.10}$$

Подставляя (3.10) в (2.21), определим теперь коэффициенты β_{ij} и α_{ij} по формулам (2.21)—(2.22) и найденные значения подставим в уравнения (2.24); получим

$$\begin{vmatrix} \frac{85}{25200} - \frac{1}{\lambda}\frac{1}{30} & \frac{1381}{806400} - \frac{1}{\lambda}\frac{1}{60} \\ \frac{1381}{806400} - \frac{1}{\lambda}\frac{1}{60} & \frac{11}{12600} - \frac{1}{\lambda}\frac{1}{105} \end{vmatrix} = 0 \tag{3.11}$$

или

$$\lambda^2 - 413.950\lambda - 3334.670 = 0$$

Из уравнения (3.11) найдем собственные значения оператора A_1^{-1}:

$$\begin{aligned}
\lambda_{1,1} &= 206.9750 - 198.758 = 8.217 \\
\lambda_{1,2} &= 206.9750 + 198.758 = 405.733
\end{aligned} \tag{3.12}$$

Далее из (2.9), (2.10) и (2.14) найдем, принимая во внимание, что мы положили $b_{kr} = 0$:

$$\psi(x, y) = \psi_0(x, y), \qquad \psi_1(x, y) = g_0(x, y) - \sum_{k=1}^{2} \sum_{r=1}^{2} b_{kr} \varphi_r(x) \varphi_k(y) \tag{3.13}$$

где g_0 и ψ_0 определяются формулами (3.3) и (3.4) соответственно.

Подставляя (3.13) в (2.15), найдем

$$d^2 = 0.000397, \qquad d_1^2 = 0.000792; \qquad d = 0{,}00198, \qquad d_1 = 0.02821 \tag{3.14}$$

Подставляя далее (3.3) и (3.4) в (2.29), (2.30), определим величину λ_0, входящую в (2.25). Здесь λ_0 — нижняя грань первого собственного значения краевой задачи (3.1)—(3.2):

$$\lambda_0 = 8.4849 \tag{3.15}$$

Подставляя (3.14) и (3.15) в (2.25), найдем окончательно

$$\alpha = \frac{1}{\lambda_0} d + d_1 = 0.0284 \tag{3.16}$$

Воспользовавшись теперь формулами (1.19) — (1.20), найдем, принимая во внимание (3.12) и (3.16):

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\lambda_{11}} - \frac{1}{\lambda_{12}}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{8.217} - \frac{1}{405.71}\right) = \alpha_1 = 0.0597 > \alpha = 0.0284 \tag{3.17}$$

Откуда следует, что в интервале

$$\delta_1 + \lambda_{11} < \lambda < \lambda_{11} + \delta_2 \tag{3.18}$$

где

$$\delta_1 = -\frac{\alpha_1 \lambda_{11}^2}{1 + \alpha_1 \lambda_{11}} = -2.7040, \qquad \delta_2 = \frac{\alpha_1 \lambda_{11}^2}{1 - \alpha_1 \lambda_{11}} = 8.0420 \tag{3.19}$$

нет собственных значений краевой задачи (3.1) — (3.2), кроме первого, причем простого собственного, значения λ_1, т. е. в интервале

$$6.513 = -2.704 + 8.217 < \lambda < 8.217 + 8.042 = 16.239 \qquad (3.20)$$

имеется лишь одно собственное значение λ_1.

Границы для λ_1 мы получим, если подставим в (3.18) — (3.19) вместо α_1 значение α. Получим

$$-1.612 + \lambda_{11} < \lambda_1 < \lambda_{11} + 2.984 \qquad (3.21)$$

Более точные границы для λ_1 мы в данном случае получим, если определим верхнюю границу первого собственного значения краевой задачи (3.1) — (3.2) методом Релея-Ритца (или из уравнений Галеркина) и за нижнюю грань для первого собственного значения примем найденную величину для λ_0 из (3.15).

Полагая в краевой задаче (3.1)—(3.2), что $u = c_1 x(1-x)$, найдем из уравнений (1.39)

$$\lambda_1 < 9 \qquad (3.22)$$

Следовательно, на основании (3.15) и (3.22)

$$8.4849 < \lambda < 9 \qquad (3.23)$$

Замечая далее, что интервал (3.20) включает интервал (3.23), мы приходим к выводу, что собственное значение λ_1, лежащее в интервале (3.23), простое и на этом интервале нет других собственных значений.

§ 4. Определение собственных значений самосопряженных положительно-определенных операторов. В этом параграфе мы рассмотрим задачу об определении собственных значений самосопряженного положительно-определенного оператора A.

Для определения собственных значений операторов указанного вида можно применить способ, изложенный в § 1—3. Однако для этих операторов может быть указан другой способ определения собственных значений, обладающий рядом существенных преимуществ.

Пусть самосопряженный положительно-определенный оператор A определен на линеале M в вещественном гильбертовом пространстве H.

На основании (1.19)—(1.20) для определения областей расположения собственных значений надо найти величину $\alpha > \| A^{-1} - A_1^{-1} \|$, где оператор A_1^{-1} имеет то же значение, что и в предыдущих параграфах (см. (1.34), (2.6) и др.).

На основании (1.5) и (1.9) имеем

$$\| A^{-1} - A_1^{-1} \| < \sup \frac{|((A^{-1} - A_1^{-1}) f, f)|}{\| f \|^2} \qquad (4.1)$$

или, обозначив

$$A^{-1} f = u, \quad Au = f, \quad A_1^{-1} f = u_{11} \qquad (4.2)$$

получим из (4.1)

$$\| A^{-1} - A_1^{-1} \| < \sup_{\| Au \| = 1} |(u - u_{11}, \; Au)| = \sup \frac{|(A(u - u_{11}), \; u)|}{\| Au \|^2} \qquad (4.3)$$

$$A(u - u_{11}) = f - AA_1^{-1} f = (E - AA_1^{-1}) f \qquad (4.4)$$

причем u и u_{11} принадлежат линеалу M.

Так как оператор A положительный, то

$$|(A(u - u_{11}), u)| < (A(u - u_{11}), u - u_{11})^{1/2} (Au, u)^{1/2} \qquad (4.5)$$

и из (4.3) следует

$$\| A - A_1^{-1} \| < \sup \frac{(A(u-u_{11}), u-u_{11})^{1/2}}{\| Au \|} \sup \frac{(Au, u)^{1/2}}{\| Au \|} \tag{4.6}$$

при этом связь между u и u_{11} определяется соотношениями (4.2).

Далее, так как

$$(Au, u) \geqslant \lambda_1 (u, u), \quad (A^2 u, u) > \lambda_1 (Au, u)$$

то

$$\frac{1}{\lambda_1} = \sup \frac{(Au, u)}{\| Au \|^2} < \frac{1}{\lambda_0} \tag{4.7}$$

где λ_1 — наименьшее по модулю собственное значение оператора A, λ_0 — оценка снизу для первого собственного значения λ_1 оператора A.

Для определения верхней грани правой части (4.6) и (4.7) сперва найдем оценку сверху для числителя дроби (4.7), считая элемент $Au = f$ заданным.

Задача сводится к определению оценок сверху для величин

$$(A(u - u_{11}), u - u_{11}), \qquad (Au, u) \tag{4.8}$$

при условии

$$A(u - u_{11}) = (E - AA_1^{-1}) f = f_1 \tag{4.9}$$

$$Au = f \tag{4.10}$$

где элементы u и u_{11} принадлежат линеалу, на котором определен оператор A.

Как известно, элементы $u - u_{11}$ и u, удовлетворяющие уравнениям (4.9) и (4.10) соответственно, сообщают наименьшие значения следующим функционалам [11]:

$$\begin{gathered} F_{f_1}^A (u - u_{11}) = (A(u - u_{11}), u - u_{11}) - 2((E - AA_1^{-1}) f, u - u_{11}) \\ F_f^A (u) = (Au, u) - 2(f, u) \end{gathered} \tag{4.11}$$

где элемент f считаем заданным. Далее, так как

$$(A(u - u_{11}), u - u_{11}) = -F_{f_1}^A (u - u_{11}), \qquad (Au, u) = -F_f^A (u) \tag{4.12}$$

то для определения верхних оценок для величин (4.8) или (4.12) надо найти верхние значения для функционалов $-F_{f_1}^A (u - u_{11})$ и $-F_f^A (u)$.

Для этого необходимо преобразовать проблему минимума функционалов (4.11) к проблеме максимума других функционалов, т. е. необходимо построить функционалы $H_{f_1}(\sigma_1)$ и $H_f(\sigma)$ так, чтобы

$$\min H_{f_1}(\sigma_1) \geqslant -F_{f_1}^A (u - u_{11}), \qquad \min H_f(\sigma) \geqslant -F_f^A (u) \tag{4.13}$$

где σ_1 и σ — совокупности допустимых элементов в задачах о минимуме функционалов H_{f_1} и H_f соответственно.

Эта задача о преобразовании проблемы минимума функционала к проблеме максимума может быть решена для широкого класса самосопряженных положительно-определенных операторов (принцип дополнительной работы Кастильяно в теории упругости, метод Треффтца для первой граничной задачи теории потенциала [11], преобразование К. Фридрихса[1], основанное на введении множителей Лагранжа и на введении новых переменных).

В работах[14,15] дано обобщение способа введения новых переменных на функционалы вида

$$F_f^A(u) = (Au, u) - 2(f, u) = \int_\Omega F(u, u_x, \ldots) d\Omega - 2\int_\Omega fu\, d\Omega$$

где $F(u, u_x, \ldots)$ — положительная квадратичная форма относительно переменных u, $u_x, \ldots$ (при этом $u_x = \partial u/\partial x$); дано обобщение метода Треффтца; а также рассмотрены операторы вида $A = \Sigma A_i$, где A_i — положительные операторы, определенные на линеалах M_i, включающих в себя линеал M (подробнее об этом см. работы[14,15]).

Построив таким образом функционал $H_{f_1}(\sigma_1)$ и $H_f(\sigma)$ и принимая во внимание, что эти функционалы зависят от f, найдем из (4.6) и (4.7)

$$\| A^{-1} - A_1^{-1} \|^2 < \frac{1}{\lambda_0} \sup \frac{H_{f_1}(\sigma_1)}{\| f \|^2}, \qquad \frac{1}{\lambda_1} < \frac{1}{\lambda_0} = \sup \frac{H_f(\sigma)}{\| f \|^2} \tag{4.14}$$

Оценки (4.14) совместно с (1.19)—(1.20) дают возможность найти оценки для собственных значений оператора A рассматриваемого вида.

Примечание. Коэффициенты b_{kr}, входящие в выражение (1.34) для A_1^{-1}, можно найти каким-либо приближенным методом, например методом Галеркина, либо исходя, как и в § 3, из условия, чтобы значение для α, найденное из (4.14), было как можно меньше.

§ 5. Задача о собственных значениях для обыкновенного дифференциального уравнения частного вида. Рассмотрим задачу об определении собственных значений уравнения (2.3) при краевых условиях (2.2), где оператор A определяется по формуле (2.1), однако в данном случае положим

$$p_s > 0, \ p_k(x) \geqslant 0 \quad (k = 0.1, \ldots, t-1, t+1, \ldots, s-1), \quad p_t(x) > p_{t_0} > 0 \tag{5.1}$$

где p_{t_0} — постоянная.

При этих условиях оператор A положительно-определенный и представим в виде

$$A = \sum_{k=0}^{s} A_k, \qquad A_k = (-1)^k \frac{d^k}{dx^k}\left[p_k \frac{d^k u_k}{dx_k}\right] \tag{5.2}$$

где операторы A_k положительные, если функции $u_k(x)$ удовлетворяют краевым условиям

$$u_k(a) = \ldots u_k^{(k-1)}(a) = 0, \qquad u_k(b) = \ldots = u_k^{(k-1)}(b) = 0 \tag{5.3}$$

Нетрудно показать, что оператор A_t положительно-определенный в силу того, что $p_t \geqslant p_{t_0} > 0$.

Функционал $H_f(\sigma)$ в данном случае имеет вид[14]:

$$H_f(\sigma) = \sum_{k=0}^{s} (A_k u_k, u_k) = \int_a^b \sum_{k=0}^{s} p_k(x) \left(\frac{d^k u_k}{dx^k}\right)^2 dx \tag{5.4}$$

где

$$\sum_{k=0}^{s} A_k u_k = \sum_{k=0}^{s} (-1)^k \frac{d^k}{dx^k}\left[p_k(x)\frac{d^k u_k}{dx^k}\right] = f \tag{5.5}$$

Здесь через $\{\sigma\}$ обозначена совокупность допустимых элементов u_k, удовлетворяющих условиям (5.3). Положим $u_t \neq 0$, $u_k = 0$ при $k \neq t$. Тогда из (5.4)—(5.5) имеем

$$u_t = A_t^{-1} f = \int_a^b g_t(x, y) f(y)\, dy \tag{5.6}$$

где $g_t(x, y)$ — функция Грина оператора A_t. Из (5.5), (5.4) и (5.6) найдем

$$H_f(\sigma) < \int_a^b \left\{\int_a^b g_t(x, y) f(y)\, dy\right\} f(x)\, dx = \int_a^b\int_a^b g_t(x, y) f(x) f(y)\, dx\, dy \leqslant$$

$$\leqslant \left\{\int_a^b\int_a^b g_t^2(x, y)\, dx\, dy\right\}^{1/2} \int_a^b f^2(x)\, dx \tag{5.7}$$

Подставляя (5.7) в (4.14), найдем

$$\frac{1}{\lambda_0} < \left\{\int_a^b\int_a^b g^2{}_t(x, y)\, dx\, dy\right\}^{1/2} \tag{5.8}$$

Таким же образом, подставляя в (5.5) вместо f значение

$$f_1 = (E - AA_1^{-1}) f = f(x) - \int_a^b g_1(x, y) f(y)\, dy \tag{5.9}$$

где A^{-1} имеет то же значение, что и в § 2, найдем

$$u_{t1} = \int_a^b g_t(x, y)\left[f(y) - \int_a^b g_1(y, z) f(z)\, dz\right] dy = \int_a^b (g_t - g_{t1}) f(y)\, dy \tag{5.10}$$

где

$$g_{t1}(x, y) = \int_a^b g_t(x, z)\, g_1(y, z)\, dz \tag{5.11}$$

Подставляя (5.9)—(5.11) в (5.4), получим

$$\begin{aligned} H_{f_1}(\sigma) &= \int_a^b \left\{\int_a^b (g_t - g_{t_1}) f(y)\, dy \left[f(x) - \int_a^b g_1(x, z) f(z)\, dz\right]\right\} dx = \\ &= \int_a^b\int_a^b (g_t - g_{t_1} - g_{t_2}) f(x) f(y)\, dx\, dy \leqslant \\ &\leqslant \left\{\int_a^b\int_a^b \psi^2(x, y)\, dx\, dy\right\}^{1/2} \int_a^b f^2(x)\, dx \end{aligned} \tag{5.12}$$

где

$$g_{t_2}(x, y) = \int_a^b [g_t(x, z) - g_{t_1}(x, z)]\, g_1(y, z)\, dz, \quad \psi = g_t - q_{t_1} - g_{t_2} \tag{5.13}$$

Подставляя (5.12) в (4.14), найдем

$$\| A^{-1} - A_1^{-1} \| < \frac{1}{\lambda_0} \left(\int_a^b \int_a^b \psi^2 (x, y) \, dx \, dy \right)^{1/2} = \alpha \tag{5.14}$$

где λ_0 определяется по (5.8).

Воспользовавшись далее формулами (1.19) — (1.20), найдем оценки для собственных значений рассматриваемого оператора.

Очевидно, что чем меньше величина f_1, определяемая формулой (5.9), тем меньше величина α, определяемая по формуле (5.14).

Примечание. Для построения функционалов $H_f(\sigma)$ и $H_{f_1}(\sigma_1)$ в рассматриваемой задаче можно также воспользоваться выражением для функционала $H_f(\sigma)$ в виде [15]

$$H_f(\sigma) = \int_a^b \sum_{k=0}^{s} p_k' F_k^2 \, dx \qquad \left(\sum_{k=0}^{s} (-1)^k \frac{d^k F_k}{dx^{k}} = f, \; p_k' = \frac{1}{p_k} \right) \tag{5.15}$$

и на функции F_k не наложено никаких граничных условий.

§ 6. Колебания защемленной пластины. В качестве примера на применение оценок, изложенных в § 4, к уравнениям в частных производных рассмотрим задачу об определении собственных частот колебаний защемленной по контуру пластины.

Задача приводится к определению собственных значений уравнения

$$Aw = \nabla^4 w = \lambda w \tag{6.1}$$

при условии на контуре l области s:

$$w = \frac{\partial w}{\partial \nu} = 0 \qquad \text{на контуре } l \tag{6.2}$$

Функционал H_f в данной задаче можно построить различными способами. В частности, можно положить [11] (см. также [15])

$$H_f(\sigma) = \int_s (\nabla^2 w)^2 \, ds \tag{6.3}$$

$$\nabla^2 (\nabla^2 w) = f \tag{6.4}$$

где $\nabla^2 w$ — функция, удовлетворяющая уравнению (6.4). Пусть далее

$$f_1 = (E - AA_1^{-1}) f = f - \int_s g_1 (x, y; x_1, y_1) f (x, y) \, ds \tag{6.5}$$

Частное решение уравнения (6.4) можно построить различными способами. В частности, можно положить

$$\nabla^2 w = \int_s \ln r f ds_1 \qquad (r^2 = (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2) \tag{6.6}$$

Подставляя (6.6) в (6.3), найдем

$$H_f(\sigma) = \int_s \left\{ \int_s \ln r f ds_1 \right\}^2 ds \leqslant \left\{ \int_s \int_s \ln^2 r ds \, ds_1 \right\}^{1/2} \int_s f^2 ds \tag{6.7}$$

Подставляя (6.7) в (4.15), найдем

$$\frac{1}{\lambda_0} = \int_s \int_s \ln^2 r ds \, ds_1 \tag{6.8}$$

Примечание. В данной задаче можно найти оценку снизу для первого собственного значения λ_0 другим путем, а именно в качестве λ_0 можно взять первую собственную частоту колебания защемленной пластины s_0, целиком включающую данную пластину.

Таким образом, находим из (6.3), принимая во внимание (6.5) — (6.6):

$$H_{f_1}(\sigma) = \int\limits_s [\nabla^2 w_1]^2 ds \tag{6.9}$$

где

$$\nabla^2 w_1 = \int\limits_s f_1 \ln r\, ds = \int\limits_s \left[f - \int\limits_s g_1 f\, ds_1\right] \ln r ds = \int\limits_s f\, \{\ln r - g_2\}\, ds \tag{6.10}$$

где

$$g_2 = \int\limits_s g_1 \ln r ds \tag{6.11}$$

Откуда

$$H_{f_1}(\sigma) = \int\limits_s \left\{\int\limits_s f\, (\ln r - g_2)\, ds_1\right\}^2 ds \leqslant \left\{\iint\limits_{s\,s} (\ln r - g_2)^2\, ds\, ds_1\right\}^{1/2} \int\limits_s f^2 ds \tag{6.12}$$

Подставляя (6.12) в (4.14), найдем

$$\| A - A_1^{-1} \| < \frac{1}{\lambda_0} \iint\limits_{s\,s} (\ln r - g_2)^2\, ds\, ds_1 = \alpha \tag{6.13}$$

Воспользовавшись далее формулами (1.19) — (1.20), найдем оценки для собственных частот колебаний пластины.

Очевидно, что чем меньше величина $\nabla^2 w_1$, определяемая по (6.10), тем меньше будет значение α, найденное из (6.13).

Примечание. В качестве функционала $H_f(\sigma)$ вместо (6.3) можно также взять следующее выражение:

$$H_f(\sigma) = \int\limits_s \{\sigma_x{}^2 + \sigma_y{}^2 + 2\tau_{xy}{}^2\}\, ds \tag{6.14}$$

где функции σ_x, σ_y, τ_{xy} должны удовлетворять уравнению

$$\frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2} + 2\, \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x\, \partial y} = f \tag{6.15}$$

Применение функционала (6.14) вместо (6.3) может оказаться во многих случаях более целесообразно.

§ 7. Операторы вида $A - \lambda B$. В приложениях часто встречаются задачи на определение собственных значений уравнения $Au - \lambda Bu = 0$, где A и B самосопряженные операторы, определенные в гильбертовом пространстве, и B_D включает A_D, где B_D, A_D — области определения операторов B и A соответственно.

Допустим, что оператор A имеет обратный A^{-1}, и что задача об определении собственных значений уравнения $A\lambda - \lambda Bu = 0$ приводится к определению собственных значений уравнения

$$A^{-1}Bu - \mu u = 0, \qquad \lambda = \frac{1}{\mu} \tag{7.1}$$

причем полагаем, что оператор $A^{-1}B$ вполне непрерывный.

Рассматривая, наряду с уравнением (7.2), уравнение

$$C_1{}^{-1}u - \mu u = 0 \tag{7.2}$$

где $C_1{}^{-1}$ — вполне непрерывный оператор, собственные значения которого известны (за оператор $C_1{}^{-1}$ можно взять вырожденный оператор, см. § 1—3), и обозначая через μ_n и μ_{1n} собственные значения уравнений (7.1) и (7.2) соответственно, найдем аналогично (1.11) — (1.13)

$$|\mu_n - \mu_{1n}| = \left| \frac{1}{\lambda_n} - \frac{1}{\lambda_{1n}} \right| < \| A^{-1}B - A_2{}^{-1}B \| + \| A_2{}^{-1}B - C_1{}^{-1} \|\,. \tag{7.3}$$

$$\| A^{-1}B - A_1{}^{-1}B \| = \| A_2{}^{-1} \left[\sum_{k=1}^{t-1} (AA_2{}^{-1} - E)^k \right] B + A^{-1}(AA_2{}^{-1} - E)^t B \| <$$

$$< \| A_2{}^{-1} \left[\sum_{k=1}^{t-1} (AA_2{}^{-1} - E)^k \right] B \| + \| A^{-1} \| \, \| (AA_2{}^{-1} - E)^t B \| \tag{7.4}$$

где $A_2{}^{-1} = A_0 + A_{02}$ вполне непрерывный оператор, имеющий тот же смысл, что и в § 1—3.

Из (7.3), (7.4) найдем оценку для разности $|\mu_n - \mu_{1n}|$ и для оценки собственных значений уравнения (7.1) можно применить формулы (1.19) — (1.20). Пусть, например, $A = L^{(2s)}(u)$, $B = L^{(2\nu)}(u)$, где $L^{(2s)}(u)$, $L^{(2\nu)}(u)$ — обыкновенные самосопряженные дифференциальные операторы вида (2.1), $\nu < s$, u удовлетворяет граничным условиям (2.2). Тогда A_0 и A_{02} строим так же как к в § 2, причем достаточно положить в (7.4) $t = \nu + 1$.

Поступила 10 I 1955

ЛИТЕРАТУРА

1. Курант Р. и Гильберт Д. Методы математической физики, т. I. ГТТИ, 1933.
2. Крылов Н. М. и Боголюбов Н. Н. Sur le calcul de racines de la transcendante de Fredholm. Известия АН СССР, сер. ОМЕН, № 5, 1929.
3. Temple G. The Computation of Characteristic Number and Characteristic Functions. Proc. Lond. math. Soc. (2), 29, 1929.
4. Канторович Л. В. и Крылов В. И. Приближенные методы высшего анализа. ГИТТИ, 1949.
5. Акбергенов А. И. О приближенном решении интегрального уравнения Фредгольма. Математический сборник, 42, вып. 6, 1936.
6. Rellich F. Störungstheorie der Spektralzerlegung. Mathem. Ann., Bd. 113, 1936; Bd 117, 1940.
7. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. ИИЛ, 1950.
8. Collatz L. Eigenwertaufgaben mit technischen Anwendungen. Leipzig, 1949.
9. Канторович Л. В. Функциональный анализ и прикладная математика. Успехи математических наук, т. 3, вып. 6, 1948.
10. Рисс Ф. и Секефальви-Надь Б. Лекции по функциональному анализу. ИИЛ, 1954.
11. Михлин С. Г. Прямые методы в математической физике. ГИТТИ, 1950.
12. Гавурин М. К. О собственных числах операторов, зависящих от параметра. Вестник Ленинградского университета, № 9, 1952.
13. Слободянский М. Г. Приближенное решение самосопряженной краевой задачи для обыкновенного дифференциального уравнения и определение областей расположения собственных значений. ПММ, т. XVIII, вып. 5, 1954.
14. Слободянский М. Г. О преобразовании проблемы минимума функционала к проблеме максимума. ДАН СССР, т. XCI, № 4, 1953.
15. Слободянский М. Г. Оценки погрешностей приближенных решений линейных задач. ПММ, т. XVII, вып. 2, 1953.